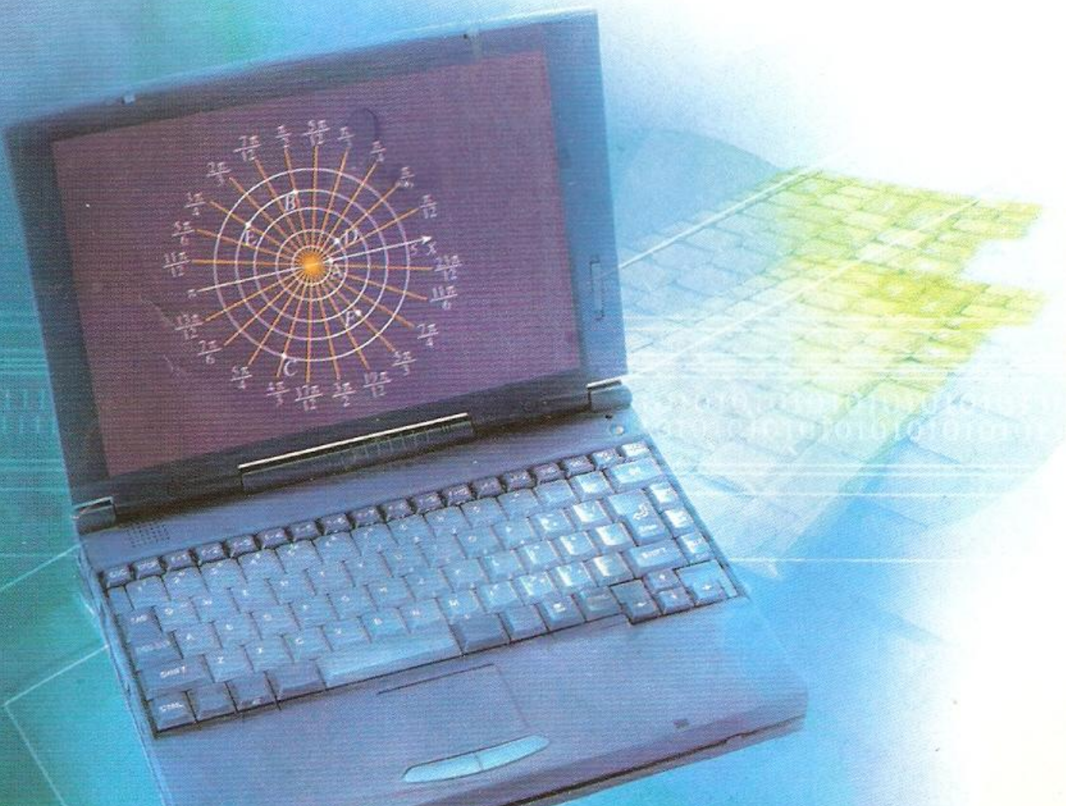
2005 - يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا

تاللانما دەرسلىك 4 - 4

كوئوردىنات سىستېمىسى ۋە پارامېتىرلىق تەڭلىمە



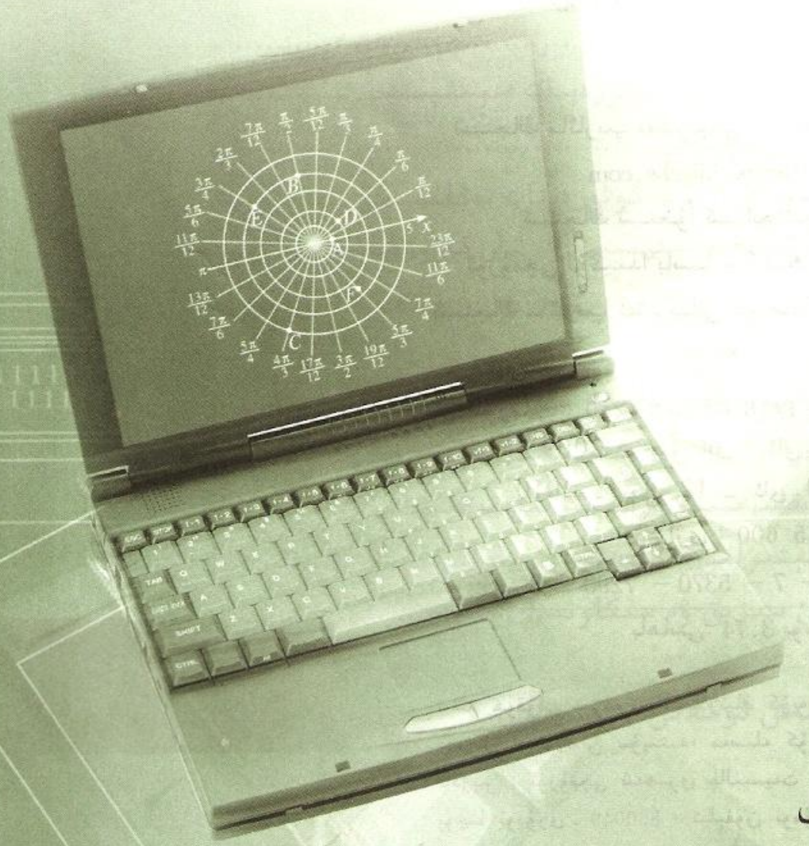
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا

تاللانما دەرسلىك 4-4

كوئوردېنا سىستېمىسى ۋە پارامېتىرلىق تەڭلىمە



شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

译　　者：吾尔卡西·阿布都热依木
复　　审：热夏提·帕尔萨
责任编辑：热米拉·阿布都热西提
责任校对：木尼拉·阿布力孜

تەرجىمانى: ئۆركەش ئابدۇرېھىم
مۇھەررىرى: رىشات پەرسا
مەسئۇل مۇھەررىرى: رەمىلە ئابدۇرېشىت
مەسئۇل كوررېكتورى: مۇنىرە ئابلىز

普通高中课程标准实验教科书
数学
选修 4-4
A 版
坐标系与参数方程
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
(维吾尔文)
*
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى تەرجىمە ۋە نەشر قىلدى
http://www.xjjycbs.com
شىنجاڭ شىنخۇا كىتابخانىسى تارقاتتى
ئۈرۈمچى لۇڭيىدا باسما چەكلىك شىركىتى باستى
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى كومپيۇتېر مەركىزى تىزدى
*
فورماتى : 890×1240 ، 1/16 ؛ باسما تاۋىقى : 4
2009 - يىل 6 - ئاي 1 - نەشرى
2010 - يىل 12 - ئاي 4 - بېسىلىشى
تىراژى : 600 5—1
ISBN 978 — 7 — 5370 — 7290 — 8
باھاسى: 3.74 يۈەن

نەشر هوقۇقى بىزدە ، باشقىلارنىڭ كۆپەيتىپ بېسىشىغا بولمايدۇ .
بېسىش - تۈپلەش سۈپىتىدە مەسىلە كۆرۈلسە ئالماشتۇرۇپ بېرىلىدۇ .
ئادرېس : ئۈرۈمچى شەھىرى غالىبىيەت يولى 187 - نومۇر
پوچتا نومۇرى : 830049 ؛ تېلېفون نومۇرى : 2870654 ، 2863761 (0991)

مۇندەرىجە

كىرىش سۆز 1

1 ـ لېكسىيە. كوئوردېنات سىستېمىسى 2

I تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى 2

II قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى 10

III ئاددىي ئەگرى سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى 14

IV قۇتۇپ ـ تىك كوئوردېنات سىستېمىسى ۋە شار كوئوردېنات سىستېمىسىنى قىسقىچە تونۇشتۇرۇش 19

2 ـ لېكسىيە. پارامېتىرلىق تەڭلىمە 27

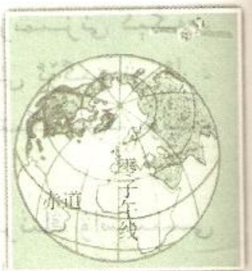
I ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى 27

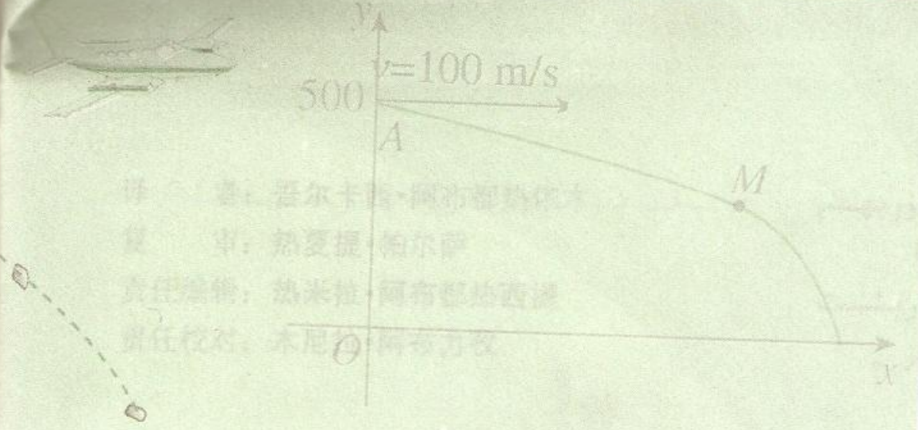
II كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى 35

III تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى 46

IV تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق ۋە سىكلوئىدا 52

ئۆگىنىشنى خۇلاسىلەش دوكلاتى 59





كىرىش سۆز

بۇ مەخسۇس تېما تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا تاللىما دەرسلەر سىستېمىسى 4 تىكى تۆتىنچى مەخسۇس تېما بولۇپ، مەزمۇنى «كوئوردېنات سىستېمىسى» ۋە «پارامېتىرلىق تەڭلىمە» دىن ئىبارەت ئىككى بۆلەكنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

فرانسىيىلىك ماتېماتىك دېكارت ۋە فېرمات ئوتتۇرىغا قويغان كوئوردېنات ئۇسۇلى ئىدىيىسى نيۇتون بىلەن لايبىنىسنىڭ دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنى بەرپا قىلىشىغا ئاساس هازىرلاپ بەردى. كوئوردېنات ئۇسۇلى ئىدىيىسى يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسى تەرەققىياتىنىڭ باشلىنىشى بولۇپ، ئۇ هازىرقى زامان ماتېماتىكىسىدىكى ئەڭ مۇھىم ئاساسىي ئىدىيىلەرنىڭ بىرى بولۇپ قالدى. كوئوردېنات سىستېمىسى گېئومېترىيە بىلەن ئالگېبرانى تۇتاشتۇرىدىغان كۆۋرۈك، سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈشتىكى كۈچلۈك قورال بولۇپ، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ سان بىلەن شەكىلنى ئۆزئارا ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ.

بىز سان ئوقى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىغا دائىر دەسلەپكى بىلىملەرنى ئۆگىنىپ ئۆتتۇق. مۇشۇ ئاساستا، بۇ مەخسۇس تېمىدا قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى، بوشلۇقتىكى قۇتۇپ ـ تىك كوئوردېنات سىستېمىسى، شار كوئوردېنات سىستېمىسى قاتارلىقلارنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تونۇشتۇرۇپ، ئوخشاش بولمىغان كوئوردېنات سىستېمىلىرىنىڭ گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنى سۈرەتلەش ياكى تەبىئەت هادىسىلىرىنى تەسۋىرلەشتىكى رولىنى نامايان قىلىمىز ۋە كوئوردېنات سىستېمىسىغا دائىر بىلىملىرىمىزنى كېڭەيتىمىز. ئاددىي ئەگرى سىزىقلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى قاتارلىق بىلىملەرنى ئۆگىنىش ئارقىلىق كوئوردېنات ئۇسۇلى ئىدىيىسىنى تېخىمۇ ئەتراپلىق چۈشىنىۋېلىش ئىمكانىيىتىگە ئىگە بولىمىز.

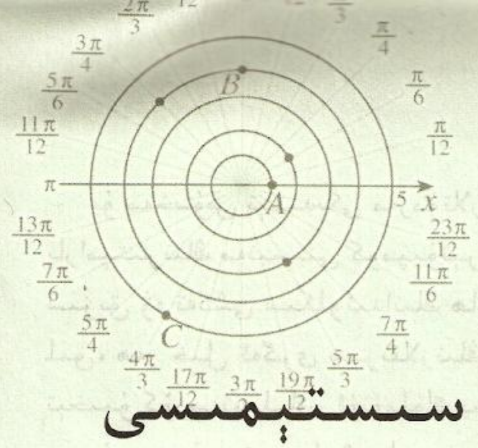
پارامېتىرلىق تەڭلىمە ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى پارامېتىرنىڭ ۋاستىسى بىلەن ئىپادىلىنىدىغان تەڭلىمە بولۇپ، ئۇ، ئەگرى سىزىقنىڭ ئوخشاش بىر كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى يەنە بىر خىل ئىپادىلىنىش شەكلىدۇر. بۇ مەخسۇس تېمىدا پارامېتىرنى كىرگۈزۈشنىڭ ئەگرى سىزىق تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش جەريانىدىكى ئەهمىيىتى ۋە رولى ئەمەلىي مىساللار ئارقىلىق نامايان قىلىندى. بەزى ئەگرى سىزىقلارنى پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن ئىپادىلىسەك ئادەتتىكى تەڭلىمە بىلەن ئىپادىلىگەندىكىگە قارىغاندا تېخىمۇ ئاسان بولىدۇ. ئەگرى سىزىق تەڭلىمىسىنىڭ ئىپادىلىنىش شەكلىنى شۇ ئەگرى سىزىقنىڭ ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن مۇۋاپىق تاللاش ماتېماتىكىلىق ئۇسۇلنىڭ مەسىلەلەرنى هەل قىلىشتىكى جانلىقلىقىنى گەۋدىلەندۈرۈپ بېرىدۇ.

پارامېتىرلىق تەڭلىمىنىڭ ئەمەلىي قوللىنىلىشى سۈپىتىدە، بۇ مەخسۇس تېمىدا تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق ۋە سىكلوئىدا تونۇشتۇرۇلۇپ، ئوقۇغۇچىلارغا هەر خىل ئەگرى سىزىقلار (يۈرەكسىمان سىزىق، سپىرال، ئەترگۇل سىزىقى، يوپۇرماقسىمان سىزىق، تەكشى سىكلوئىدا، تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق) دىن ھۇزۇرلىنىش پۇرسىتى يارىتىلدى، بۇنىڭدىن پارامېتىرنىڭ مۇشۇ ئەگرى سىزىقلارنى تەتقىق قىلىشتىكى رولىنى چۈشىنىۋالغىلى بولىدۇ.

بۇ مەخسۇس تېمىدىكى مەزمۇنلارنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش (مەسىلەن، پارامېتىرنىڭ مەنىسىنى كومپيۇتېر يۇمشاق دېتالىدىن پايدىلىنىپ بىلىۋېلىش، تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق ۋە تەكشى سىكلوئىدانىڭ ھاسىل بولۇش جەريانىنى كومپيۇتېردا كۆزىتىش قاتارلىقلار) ئارقىلىق، ھەر خىل ئەگرى سىزىقلارنىڭ ھاسىل بولۇش جەريانى، خۇسۇسىيىتى ۋە ئەمەلىي قوللىنىلىشىنى تېخىمۇ كۆرسەتمىلىك، ئۇنۇملۇك بىلىۋالغىلى بولىدۇ.

بۇ مەخسۇس تېمىدا، ئەمەلىي مىساللار ئارقىلىق، چوڭقۇر مەنىدىكى مىساللارنى ئاددىي سۆزلەر بىلەن بايان قىلىشتىن پايدىلىنىپ ئوقۇغۇچىلارنىڭ ماتېماتىكىلىق ئۇقۇملارنى چۈشىنىۋېلىشىغا ياردەم بېرىشكە؛ «مۇلاھىزە»، «ئىزدىنىش»، «ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى» قاتارلىقلار ئارقىلىق ئوقۇغۇچىلارنىڭ ماتېماتىكىلىق تەپەككۇرىنى قوزغىتىپ ۋە يېتەكلەپ، ئۇلارنىڭ تەشەببۇسكارلىق بىلەن ئىزدىنىش ۋە پائال پىكىر يۈرگۈزۈشتىن ئىبارەت ياخشى ئادىتىنى يېتىلدۈرۈشكە كۈچ چىقىرىلدى.

ئوقۇغۇچىلارنىڭ بۇ مەخسۇس تېمىنى ئۆگىنىشى ئارقىلىق ماتېماتىكىغا بولغان ھەۋىسىنى يەنىمۇ قوزغىتىشى، ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ماتېماتىكا بىلىملىرىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش قابىلىيىتىنى يۇقىرى كۆتۈرۈپ، ماتېماتىكىغا نىسبەتەن تېخىمۇ ئەتراپلىق چۈشەنچە ھاسىل قىلىشى ھەمدە ماتېماتىكىنىڭ ئىلمىي قىممىتى، ئەمەلىي قىممىتى ۋە مەدەنىي قىممىتىنى تەدرىجىي تونۇپ يېتىشىنى ئۈمىد قىلىمىز.



1 - لېكسىيە

كوئوردېنات سىستېمىسى

بىزگە مەلۇمكى، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، تەكشىلىكتىكى نۇقتا بىلەن كوئوردېنات (تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى)، ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمە ئارىسىدا باغلىنىش ئورنىتىلىپ، بۇ ئارقىلىق سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش ئەمەلگە ئاشۇرۇلدى. گېئومېترىيىلىك ئوبيېكتنىڭ ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، مۇۋاپىق كوئوردېنات سىستېمىسىنى تاللاپ، بۇ گېئومېترىيىلىك ئوبيېكتنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇۋېلىش ھەم ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتى ۋە باشقا گېئومېترىيىلىك شەكىللەر بىلەن بولغان مۇناسىۋىتىنى تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشتىن ئىبارەت بۇ ئۇسۇل گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىشنىڭ كوئوردېنات ئۇسۇلى دەپ ئاتىلىدۇ.

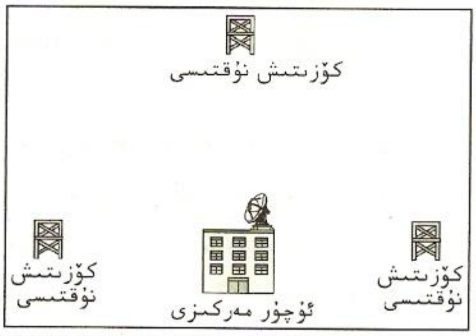
ئەمەلىي مەسىلىلەر مۇرەككەپ بولغانلىقتىن، بەزىدە گېئومېترىيىلىك شەكىلنىڭ تەڭلىمىسىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا تۇرغۇزۇش قىيىن بولۇپ قالىدۇ. شۇڭا، گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنى ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا قولايلىق بولۇشى ئۈچۈن، ئوخشاش بولمىغان كوئوردېنات سىستېمىلىرىنى تۇرغۇزۇشىمىزغا توغرا كېلىدۇ. بەزى گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇشتا، قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى، قۇتۇپ - تىك كوئوردېنات سىستېمىسى ۋە شار كوئوردېنات سىستېمىسىدىن پايدىلانساق تېخىمۇ ئاسان بولىدۇ.

تۆۋەندە، ئالدى بىلەن ئەمەلىي مەسىلىلەرنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا ھەل قىلىشنىڭ جەريانىنى ئەسلەپ ئۆتەيلى.

I تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى

1. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى

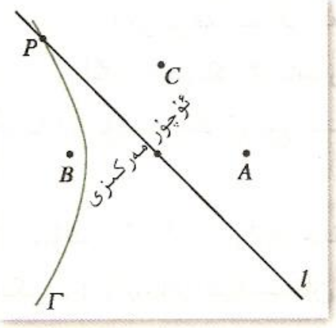
مۇلاھىزە



مەلۇم ئۇچۇر مەركىزى شەرق، غەرب، شىمال يۆنىلىشتىكى ئۈچ كۆزىتىش نۇقتىسىدىن كەلگەن دوكلاتنى تاپشۇرۇۋالدى: غەرب، شىمال يۆنىلىشتىكى ئىككى كۆزىتىش نۇقتىسى بىر پارتلاش ئاۋازىنى تەڭلا ئاڭلىغان، شەرق يۆنىلىشتىكى كۆزىتىش نۇقتىسى پارتلاش ئاۋازىنى ئۇلاردىن 4s كېيىن ئاڭلىغان. ھەر-

قايسى كۆزىتىش نۇقتىلىرىدىن ئۇچۇر مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىقلار ئوخشاشلا 1020m بولسا، پارتلاش ئاۋازى چىققان ئورۇننى ئېنىقلاڭ. (ئاۋازنىڭ تارقىلىش تېزلىكىنى 340m/s، ھەرقايسى كۆزىتىش نۇقتىلىرىنى ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتىدۇ دەپ پەرەز قىلىڭ.)

1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۈچ كۆزىتىش نۇقتىسىنى A، B، C دەپ ئالايلى. B، C لار P نۇقتىدىن چىققان ئاۋازنى تەڭلا ئاڭلىغانلىقتىن، $|PB|=|PC|$ بولىدۇ، بۇ، P نۇقتا BC كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى l ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ؛ A نىڭ پارتلاش ئاۋازىنى ئاڭلىغان پەيتى B، C لاردىن 4s كېيىن بولغانلىقتىن، $|PA|-|PB|=4\times 340=1360<|AB|$ بولىدۇ، بۇ، P نۇقتا A، B نۇقتىلارنى فوكۇس قىلغان ھىپېربولا Γ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ. شۇڭا، P نۇقتا تۈز سىزىق l بىلەن ھىپېربولا Γ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ.



1.1 ـ رەسىم

تۆۋەندە مەسىلىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، P نۇقتىنىڭ ئورنىنى مۇۋاپىق تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇش ئارقىلىق كونكرېت ئېنىقلايمىز.

مۇلاھىزە

بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىشىمىزغا ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەك؟

P نۇقتا l تۈز سىزىق بىلەن ھىپېربولا Γ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى بولغانلىقتىن، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يېشىش ئارقىلىق تېپىشىمىزغا ئاسان بولۇشى ئۈچۈن، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاشتا، l تۈز سىزىق بىلەن ھىپېربولا Γ نىڭ تەڭلىمىسىنىڭ ئىمكانقەدەر ئاددىي بولۇشىنى ئويلىشىش كېرەك.

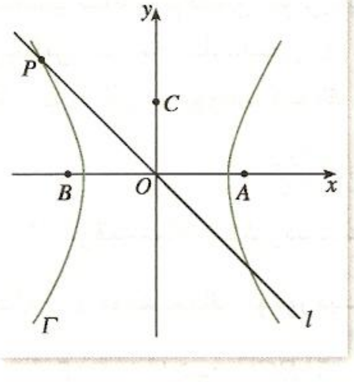
2.1 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۇچۇر مەركىزىنى كوئوردىنات بېشى O، BA تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، A، B، C نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$A(1020, 0),\ B(-1020, 0),\ C(0, 1020).$$

شۇنىڭ بىلەن، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى:

$$y=-x.$$

ھىپېربولا Γ نىڭ تەڭلىمىسىنى



2.1 ـ رەسىم

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$$

دەپ پەرەز قىلساق، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$a=680,\ c=1\,020,\ b^2=c^2-a^2=1020^2-680^2=5\times340^2,$

شۇنىڭ بىلەن ھىپېربولا Γ نىڭ تەڭلىمىسى:

$$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1.$$

$y=-x$ نى يۇقىرىدىكى تەڭلىمىگە قويۇپ يەشسەك، $x=\pm680\sqrt{5}$ ، $y=\mp680\sqrt{5}$ كېلىپ چىقىدۇ.

بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، ئاۋاز چىققان ئورۇن ھىپېربولا Γ نىڭ سول تارمىقىدا بولۇشى كېرەك، شۇڭا P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(-680\sqrt{5},\ 680\sqrt{5})$ بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن:

$$|PO|=680\sqrt{10}\ (\mathrm{m}).$$

شۇڭا، پارتلاش ئاۋازى چىققان ئورۇن ئۇچۇر مەركىزىنىڭ غەربتىن شىمالغا 45° ئاغقان يۆنىلىشىدىكى $680\sqrt{10}$ m كېلىدىغان جايدا بولىدۇ.

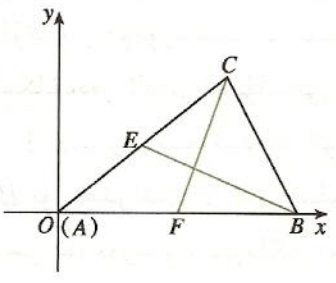
مۇلاھىزە

بىز P نۇقتىنىڭ ئورنىنى ئۇچۇر مەركىزىنى ئاساس نۇقتا قىلىپ، بۇلۇڭ ۋە ئارىلىقتىن پايدىلىنىپ سۈرەتلىدۇق. P نۇقتىنىڭ ئورنىنى بۇ خىل ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەش بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتتىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەشنىڭ قانداق پەرقى ۋە باغلىنىشى بار؟ سىزچە قايسى خىل ئۇسۇل تېخىمۇ ئاسان؟

يۇقىرىدىكى مەسىلىنىڭ ھەل قىلىنىشى كوئوردىنات ئۇسۇلى ئىدىيىسىنى تولۇق گەۋدىلەندۈرۈپ بېرىدۇ.

1 - مىسال. $\triangle ABC$ نىڭ a، b، c ئۈچ تەرىپى $b^2+c^2=5a^2$ نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى، BE، CF لارنىڭ بولسا ئايرىم - ئايرىم AC، AB تەرەپلەردىكى مېدىئانا ئىكەنلىكى بېرىلگەن. مۇۋاپىق تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، BE بىلەن CF نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى ئۈستىدە ئىزدىنەيلى.

يېشىش: 3.1 - رەسىمدىكىدەك، $\triangle ABC$ نىڭ A چوققىسىنى كوئوردىنات بېشى O، AB تەرەپ ياتقان تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز. بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، A، B، F نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم - ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:



3.1 - رەسىم

$$A(0,\ 0),\ B(c,\ 0),\ F\left(\frac{c}{2},\ 0\right).$$

C نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى $(x,\ y)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا E نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right)$ بولىدۇ.

$b^2+c^2=5a^2$ تىن $|AC|^2+|AB|^2=5|BC|^2$ كېلىپ چىقىدۇ، يەنى

$x^2+y^2+c^2=5[(x-c)^2+y^2].$

بۇنى رەتلىسەك:

$$2x^2+2y^2+2c^2-5cx=0.$$

$\because\ \overrightarrow{BE}=\left(\frac{x}{2}-c,\frac{y}{2}\right),\ \overrightarrow{CF}=\left(\frac{c}{2}-x,-y\right),$

$\therefore\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\frac{x}{2}-c\right)\left(\frac{c}{2}-x\right)-\frac{y^2}{2}$

$=-\frac{1}{4}(2x^2+2y^2+2c^2-5cx)$

$=0.$

شۇڭا، BE بىلەن CF ئۆزئارا تىك بولىدۇ.

ئىزدىنىش

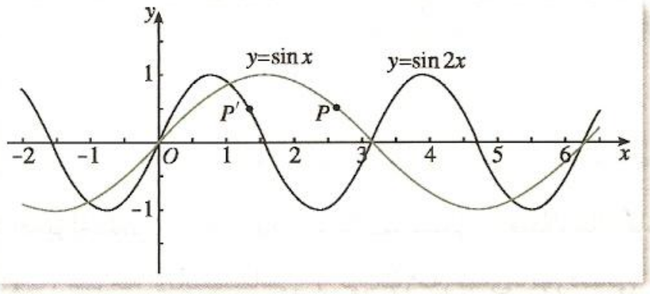
سىز بۇ مەسىلىنى يۇقىرىقى يېشىشتىكىسگە ئوخشاش بولمىغان تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستې-مىسىنى تۇرغۇزۇپ ھەل قىلالامسىز؟ مەسىلىنى ئوخشاش بولمىغان تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستې-مىلىرىنى تۇرغۇزۇپ ھەل قىلغاندىكى جەريانلارنى سېلىشتۇرۇڭ، سىزچە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزغاندا نېمىلەرگە دىققەت قىلىش كېرەك؟

2. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى ئۆزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى

بىز ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ گرافىكىنى ئۆگەنگەندە تۆۋەندىكى مەسىلىلەرنى مۇھا-كىمە قىلغانىدۇق:

(1) قانداق قىلىپ سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ تىن ئەگرى سىزىق $y=\sin 2x$ كە ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

4.1 - رەسىمدىكىدەك، سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ ئۈستىدىن خالىغان بىر $P(x, y)$ نۇقتىنى ئېلىپ، ئۇنىڭ ئوردىناتى y نى ئۆزگەرتمەي، ئابسېسساسى x نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ىگىچە قىس-قارتساق، ئۇ ھالدا سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ ئەگرى سىزىق $y=\sin 2x$ كە ئۆزگىرىدۇ.



4.1 - رەسىم

مۇلاھىزە

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلارنىڭ ماسلىق مۇناسىۋىتىدىن چىقىپ پىكىر يۈرگۈزۈڭ، سىزىچە «ئوردىناتى y نى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسى x نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ىگىچە قىسقارتىش» نىڭ ماھىيىتى نېمە؟

ئەمەلىيەتتە، «ئوردىناتى y نى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسى x نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ىگىچە قىسقارتىش» دېگەنلىك بىر كوئوردىناتنى قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىدىن ئىبارەت.

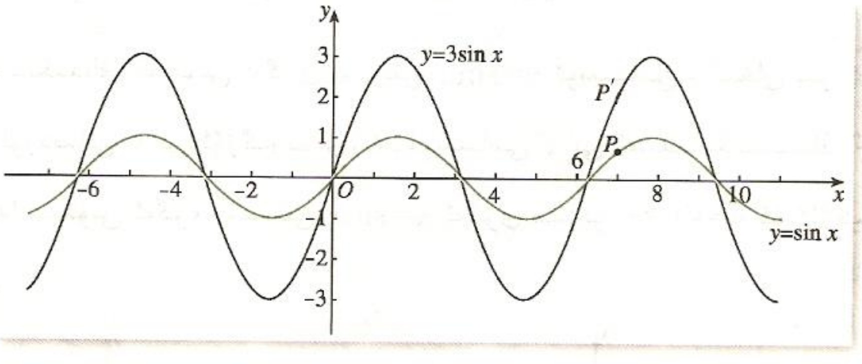
$P(x, y)$ نى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، ئۇنىڭ ئوردىناتى y نى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسساسى x نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ىگىچە قىسقارتىشىنىڭ نەتىجىسىدە $P'(x', y')$ نۇقتا كېلىپ چىقىدۇ، بۇ چاغدا تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = y. \end{cases} \quad ①$$

بىز ① ئىپادىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىر كوئوردىناتنى قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز.

(2) قانداق قىلىپ سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ تىن ئەگرى سىزىق $y=3\sin x$ كە ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

5.1 ‒ رەسىمدىكىدەك، سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ ئۈستىدىن خالىغان بىر $P(x, y)$ نۇقتىنى ئېلىپ، ئۇنىڭ ئابسىسساسى x نى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتى y نى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتساق، ئۇ ھالدا سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ ئەگرى سىزىق $y=3\sin x$ كە ئۆزگىرىدۇ.



5.1 ‒ رەسىم

مۇلاھىزە

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلارنىڭ ماسلىق مۇناسىۋىتىدىن چىقىپ پىكىر يۈرگۈزۈڭ، سىزىچە «ئابسىسساسى x نى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتى y نى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش» نىڭ ماھىيىتى نېمە؟

ئەمەلىيەتتە، «ئابسىسساسى x نى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتى y نى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش» دېگەنلىك بىر كوئوردىناتنى ئۇزارتىش ئالماشتۇرۇشىدىن ئىبارەت.

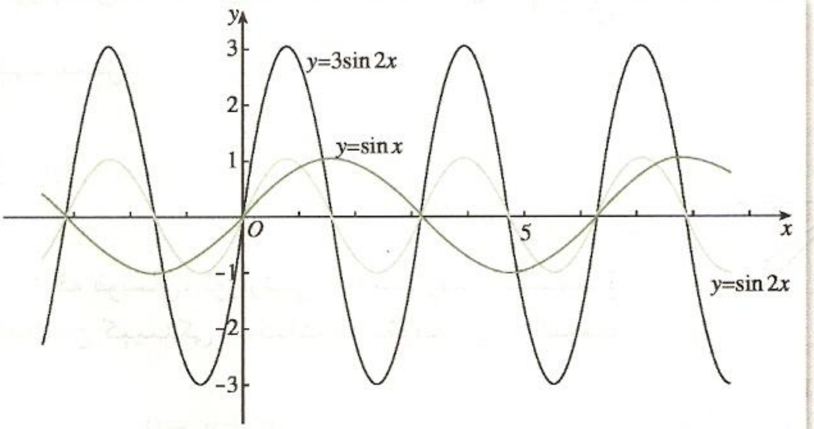
$P(x,y)$ نى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، ئۇنىڭ ئابسىسساسى x نى ئۆزگەرتمەي، ئوردىناتى y نى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىشنىڭ نەتىجىسىدە $P'(x',y')$ نۇقتا كېلىپ چىقىدۇ، بۇ چاغدا تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=3y.\end{cases} \qquad ②$$

بىز ② ئىپادىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىر كوئوردىناتنى ئۇزارتىش ئالماشتۇرۇشى دەپ ئاتايمىز.

(3) قانداق قىلىپ سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ تىن ئەگرى سىزىق $y=3\sin 2x$ كە ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

ئەمەلىيەتتە، بۇ، يۇقىرىدىكى (1)، (2) نىڭ «بىرىكىشى» دىن ئىبارەت: 6.1 ـ رەسىمدىكىدەك، ئاۋۋال ئوردىنات y نى ئۆزگەرتمەي، ئابسىسسا x نى ئەسلىدىكىسىنىڭ $\frac{1}{2}$ ىگىچە قىسقارتىش؛ ئاندىن مۇشۇ ئاساستا ئوردىنات y نى ئەسلىدىكىسىنىڭ 3 ھەسسىسىگىچە ئۇزارتىش ئارقىلىق سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ تىن ئەگرى سىزىق $y=3\sin 2x$ كە ئېرىشكىلى بولىدۇ.



6.1 ـ رەسىم

يۇقىرىقى مۇھاكىمىلەردىكىگە ئوخشاش، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر $P(x, y)$ نۇقتا يۇقىرىقىدەك ئالماشتۇرۇش ئارقىلىق $P'(x', y')$ نۇقتىغا ئۆزگەردى دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=3y.\end{cases} \qquad ③$$

بىز ③ ئىپادىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى كوئوردىناتنى ئۇزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى دەيمىز.

ئەمدى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى كوئوردىناتنى ئۇزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىغا ئېنىقلىما بېرىمىز.

ئېنىقلىما $P(x,\ y)$ نۇقتىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلايلى. ئەگەر بۇ $P(x,\ y)$ نۇقتا ئالماشتۇرۇش

$$\varphi:\begin{cases}x'=\lambda\cdot x\,(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y\,(\mu>0)\end{cases} \qquad ④$$

نىڭ تەسىرىدە ماس $P'(x',y')$ نۇقتىغا ئۆزگەرگەن بولسا، ئۇ ھالدا φ نى **تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى كوئوردىناتنى ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى، قىسقىچە ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى** دەپ ئاتايمىز.

يۇقىرىدىكى ①، ②، ③ لەرنىڭ ھەممىسى كوئوردىناتنى ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىدۇر. ئۇلارنىڭ تەسىرىدە، تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنى ئۇزارتىش - قىسقارتىشنى ئەمەلگە ئاشۇرغىلى بولىدۇ. مەسىلەن، ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ③ نىڭ تەسىرىدە، سىنۇس ئەگرى سىزىقى $y=\sin x$ ئەگرى سىزىق $y=3\sin 2x$ كە ئۆزگىرىدۇ. شۇڭا، تەكشىلىكتىكى شەكىللەرنى ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىنى كوئوردىناتنى ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

2 - مىسال. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تۆۋەندىكى ئىككى تەڭلىمىگە ماس كېلىدىغان شەكىللەر ئۈستىدە ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى $\begin{cases}x'=2x\\ y'=3y\end{cases}$ ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىنكى ئىككى شەكىلنى تاپايلى.

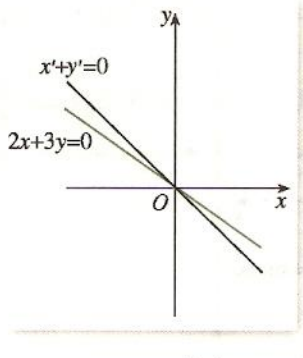
(1) $2x+3y=0$; (2) $x^2+y^2=1$.

يېشىش: (1) ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ تىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}x',\\ y=\dfrac{1}{3}y'.\end{cases} \qquad ⑤$$

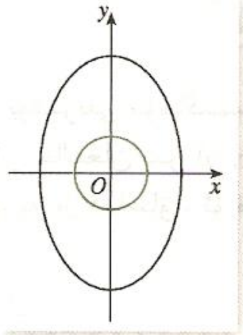
⑤ نى $2x+3y=0$ گە قويساق، ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىنكى شەكىلنىڭ تۆۋەندىكى تەڭلىمىسىگە ئېرىشىمىز:

$$x'+y'=0.$$



7.1 - رەسىم

شۇڭا، ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىن، تۈز سىزىق $2x+3y=0$ تۈز سىزىق $x'+y'=0$ گە ئۆزگىرىدۇ (7.1 - رەسىم).



8.1 - رەسىم

(2) ⑤ نى $x^2+y^2=1$ گە قويساق، ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىنكى شەكىلنىڭ تۆۋەندىكى تەڭلىمىسىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1.$$

شۇڭا، ئۇزارتىش - قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىن، چەمبەر

$x^2+y^2=1$ ئېللىپس $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1$ گە ئۆزگىرىدۇ (8.1 ـ رەسىم).

يۇقىرىقى بايانلاردىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئۆزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ④ نىڭ تەسىرىدە، تۈز سىزىق يەنىلا تۈز سىزىققا ئۆزگىرىدۇ، چەمبەر بولسا ئېللىپسقا ئۆزگىرىشى مۇمكىن.

مۇلاھىزە

ئۆزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ④ نىڭ تەسىرىدە، ئېللىپس چەمبەرگە ئۆزگىرەلەمدۇ؟ پارابولا ۋە ھىپېربولا قانداق ئەگرى سىزىققا ئۆزگىرىدۇ؟

1.1 ـ كۆنۈكمە

1. ئىككى مۇقىم نۇقتىنىڭ ئارىلىقى 6 بولۇپ، M نۇقتىدىن بۇ ئىككى مۇقىم نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى 26 بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تېپىڭ.

2. A نۇقتا مۇقىم نۇقتا، BC كېسىك مۇقىم تۈز سىزىق l ئۈستىدە سىيرىلىدۇ. ئەگەر $|BC|=4$ بولۇپ، A نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق 3 بولسا، $\triangle ABC$ نىڭ سىرتقى مەركىزىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ ئېگىزلىكى بىر نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقىنى ئىككىدىن ئارتۇق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ.

4. ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، تۆۋەندىكى ئۈچ تەڭلىمىگە ماس كېلىدىغان شەكىللەر ئۈستىدە ئۆزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x, \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$$

ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىنكى ئۈچ شەكىلنى تېپىڭ:

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; (2) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{12}=1$; (3) $y^2=2x$.

5. ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئۆزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=y \end{cases}$ ئېلىپ بېرىلغاندىن كېيىن، ئەگرى سىزىق C ئەگرى سىزىق $x'^2+9y'^2=9$ غا ئۆزگەرگەن بولسا، ئەگرى سىزىق C نىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەم ئۇنىڭ گرافىكىنى سىزىڭ.

6. ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، تۆۋەندىكى شەكىل ئالماشتۇرۇشلارنى قانائەتلەندۈرىدىغان ئۆزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىنى تېپىڭ:

(1) تۈز سىزىق $x-2y=2$ تۈز سىزىق $2x'-y'=4$ كە ئۆزگىرىدۇ؛

(2) ئەگرى سىزىق $x^2-y^2-2x=0$ ئەگرى سىزىق $x'^2-16y'^2-4x'=0$ گە ئۆزگىرىدۇ.

II قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى

بۇ پاراگرافنىڭ بېشىدىكى مەسىلىنى ھەل قىلغاندا، پارتلاش ئاۋازى چىققان ئورۇننى «ئۇچۇر مەركىزىنىڭ غەربتىن شىمالغا $45°$ ئاغقان يۆنىلىشىدىكى $680\sqrt{10}$ m كېلىدىغان جايدا» دەپ تەسۋىرلىگەندۇق. ئەمەلىيەتتە، بىز بۇ يەردە ئۇچۇر مەركىزىنى ئاساس نۇقتا، غەرب يۆنىلىشىنى پايدىلىنىش ئوبيېكتى قىلىپ، پارتلاش ئاۋازى چىققان ئورۇننى ئۇچۇر مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق ۋە غەرب يۆنىلىش بىلەن ھاسىل قىلغان بۇلۇڭدىن پايدىلىنىپ سۈرەتلىدۇق. مانا بۇ، كۈندىلىك تۇرمۇشتا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان ئورۇن سۈرەتلەش ئۇسۇلى بولۇپ، بۇ ئۇسۇل قۇتۇپ كوئوردىنات ئىدىيىسىنى گەۋدىلەندۈرىدۇ.

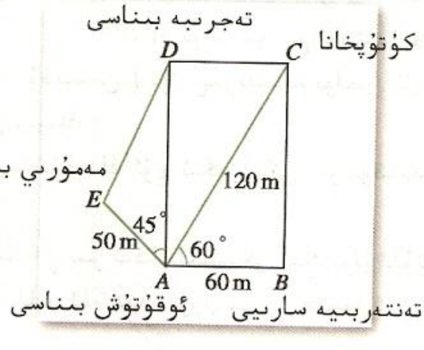
1. قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى ئۇقۇمى

مۇلاھىزە

9.1 - رەسىمدە مەلۇم مەكتەپ قورۇسىنىڭ تەكشىلىكتىكى خەرىتىسى بېرىلدى. مەلۇم بىر ئوقۇغۇچىنى ئوقۇتۇش بىناسى بار جايدا تۇرغان دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى سوئاللارغا جاۋاب بېرىڭ:

(1) بۇ ئوقۇغۇچى شەرقتىن شىمالغا $60°$ ئاغقان يۆنىلىشتە 120m ماڭسا قايسى ئورۇنغا يېتىپ بارىدۇ؟ بۇ ئورۇن بىردىنبىر ئېنىقلىنامدۇ؟

(2) ئەگەر بۇ ئوقۇغۇچىدىن تەنتەربىيە سارىيى ۋە مەمۇرىي بىنانىڭ ئورنى قەيەردە ئىكەنلىكى سورالسا، ئۇ قانداق تەسۋىرلەپ بېرىشى كېرەك؟

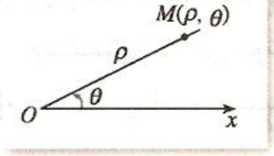


9.1 - رەسىم

A نى ئاساس نۇقتا، AB نۇرنى پايدىلىنىش يۆنىلىشى قىلىپ، تەكشىلىكتىكى نۇقتىنىڭ ئورنىنى A بىلەن بولغان ئارىلىق ۋە AB بىلەن ھاسىل قىلغان بۇلۇڭدىن پايدىلىنىپ سۈرەتلىگىلى بولىدۇ. بەزىدە بۇ ئۇسۇل تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتتىنمۇ قۇلايلىق بولىدۇ، مەسىلەن، تەيفېڭ بورىنىدىن ئالدىن مەلۇمات بېرىش، يەر تەۋرەشتىن ئالدىن مەلۇمات بېرىش، ئۆلچەش، ھاۋا قاتنىشى، دېڭىز قاتنىشى قاتارلىقلاردا ئاساسلىقى مۇشۇ خىل ئۇسۇل قوللىنىلىدۇ.

مۇلاھىزە

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ تۇرغۇزۇلۇش جەريانىغا تەققاسلاپ، تەكشىلىكتىكى نۇقتىنىڭ ئورنىنى ئارىلىق ۋە بۇلۇڭدىن پايدىلىنىپ بەلگىلەشكە بولىدىغان كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەك؟



10.1 - رەسىم

10.1 - رەسىمدىكىدەك، تەكشىلىك ئىچىدىن بىر مۇقىم O نۇقتىنى ئېلىپ، ئۇنى **قۇتۇپ نۇقتا** دەپ ئاتايمىز؛ قۇتۇپ نۇقتا O ئارقىلىق بىر Ox نۇرنى ئۆتكۈزۈپ، ئۇنى **قۇتۇپ ئوقى** دەپ ئاتايمىز؛ ئاندىن بىر ئۇزۇنلۇق بىرلىكى، بىر بۇلۇڭ بىرلىكى (ئادەتتە رادىئاننى بىرلىك قىلىپ ئالىمىز) ۋە ئۇنىڭ ئوڭ يۆنىلىش (ئادەتتە سائەت ئىستىرېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى ئېلىنىدۇ) نى بەلگىلىۋالساق، بىر **قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى** تۇرغۇزۇلغان بولىدۇ.

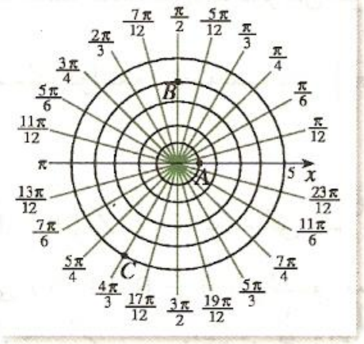
بىز قۇتۇپ نۇقتا O بىلەن تەكشىلىك ئىچىدىكى بىر M نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق $|OM|$ نى M نۇقتىنىڭ **قۇتۇپ دىئامېتىرى** دەپ ئاتايمىز ۋە ئۇنى ρ قىلىپ يازىمىز؛ قۇتۇپ ئوقى Ox نى باش تەرەپ، OM نۇرنى ئاخىرقى تەرەپ قىلغان بۇلۇڭ xOM نى M نۇقتىنىڭ **قۇتۇپ بۇلۇڭى** دەپ ئاتايمىز ۋە ئۇنى θ قىلىپ يازىمىز. تەرتىپلىك سانلار جۈپى (ρ, θ) نى M نۇقتىنىڭ **قۇتۇپ كوئوردېناتى** دەپ ئاتايمىز ۋە ئۇنى $M(\rho, \theta)$ قىلىپ يازىمىز.

ئادەتتە، ئالاھىدە ئەسكەرتىش بېرىلمىسە، بىز $\rho \geqslant 0$ بولىدۇ ھەم θ خالىغان ھەقىقىي ساننى ئالالايدۇ دەپ قارايمىز.

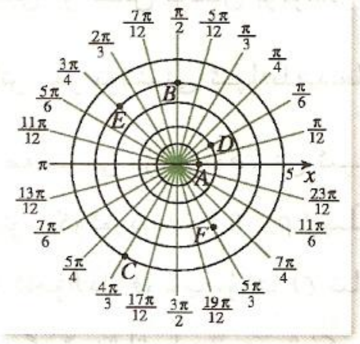
1 - مىسال. 11.1 - رەسىمدىكىدەك، قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىدا، A، B، C نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتىنى يازايلى ھەم $D\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$، $E\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$، $F\left(3.5, \frac{5\pi}{3}\right)$ نۇقتىلارنىڭ ئورنىنى بەلگىلەيلى.

يېشىش: 11.1 - رەسىمگە ئاساسەن، A، B، C نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ:

$$(1, 0),\ \left(4, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(5, \frac{4\pi}{3}\right).$$



11.1 - رەسىم



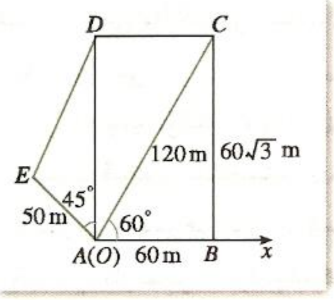
12.1 - رەسىم

D، E، F نۇقتىلارنىڭ ئورنى 12.1 - رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.

2 - مىسال. 9.1 - رەسىمدە، ئوقۇتۇش بىناسى، تەنتەربىيە سارىيى، كۇتۇپخانا، تەجرىبە بىناسى ۋە مەمۇرىي بىنانىڭ ئورنى ئايرىم - ئايرىم A، B، C، D، E نۇقتىلار بىلەن ئىپادىلەنگەن. مۇۋاپىق قۇتۇپ

كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، ھەرقايسى نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتىنى يازايلى.

يېشىش: A نى قۇتۇپ نۇقتا، AB ياتقان نۇرنى قۇتۇپ ئوقى (بىرلىك ئۇزۇنلۇقى 1m) قىلىپ قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق (13.1 ـ رەسىم)، A، B، C، D، E نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(0,0)$، $(60,0)$، $\left(120, \frac{\pi}{3}\right)$، $\left(60\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$، $\left(50, \frac{3\pi}{4}\right)$ بولىدۇ.



13.1 ـ رەسىم

قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، ρ ۋە θ بېرىلسىلا، تەكشىلىك ئىچىدە M نۇقتىنى بىردىنبىر ئېنىقلاشقا بولىدۇ؛ ئەكسىچە، تەكشىلىك ئىچىدىكى خالىغان بىر نۇقتا بېرىلسىمۇ، ئۇنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتى (ρ, θ) نى تېپىشقا بولىدۇ.

مۇلاھىزە

قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسىدا، $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$، $\left(4, \frac{\pi}{6}+2\pi\right)$، $\left(4, \frac{\pi}{6}+4\pi\right)$، $\left(4, \frac{\pi}{6}-2\pi\right)$ لار ئىپادىلىگەن نۇقتىلار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ سىز بۇنىڭدىن نۇقتىنىڭ ئورنىنى قۇتۇپ كوئوردىنات ۋە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتتىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەشنىڭ پەرقىنى ھېس قىلالامسىز؟

ئاخىرقى تەرىپى ئوخشاش بولغان بۇلۇڭلارنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، يۇقىرىقى قۇتۇپ كوئوردىناتلارنىڭ ئوخشاش بىر نۇقتىنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، $\left(4, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$ لارنىڭ ھەممىسى مۇشۇ نۇقتىنى ئىپادىلەيدۇ.

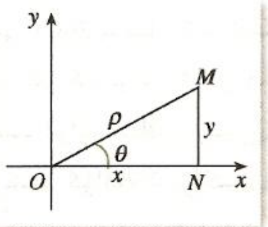
ئومۇمەن، قۇتۇپ كوئوردىنات (ρ, θ) بىلەن $(\rho, \theta+2k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ ئوخشاش بىر نۇقتىنى ئىپادىلەيدۇ. ئالاھىدە ئەھۋالدا، قۇتۇپ نۇقتا O نىڭ كوئوردىناتى $(0, \theta)$ $(\theta \in \mathbf{R})$ بولىدۇ. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتتىكىسىگە ئوخشاشمايدىغىنى شۇكى، تەكشىلىك ئىچىدىكى بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتىنىڭ چەكسىز كۆپ ئىپادىلىنىشى بار.

ئەگەر $\rho > 0$، $0 \leqslant \theta < 2\pi$ دەپ بەلگىلىۋالساق، ئۇ ھالدا قۇتۇپ نۇقتىدىن سىرت، تەكشىلىك ئىچىدىكى نۇقتىنى بىردىنبىر قۇتۇپ كوئوردىنات (ρ, θ) بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ؛ شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، قۇتۇپ كوئوردىنات (ρ, θ) ئىپادىلىگەن نۇقتىمۇ بىردىنبىر ئېنىقلانغان بولىدۇ.

2. قۇتۇپ كوئوردىنات بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتنى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇش

مۇلاھىزە

تەكشىلىك ئىچىدىكى بىر نۇقتىنى ھەم تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات بىلەن، ھەم قۇتۇپ كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، بۇ ئىككى خىل كوئوردىنات ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟



14.1 - رەسىم

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ كوئوردىنات بېشىنى قۇتۇپ نۇقتا، x ئوقىنىڭ مۇسبەت يېرىمىنى قۇتۇپ ئوقى قىلىپ ئېلىپ، ئىككى خىل كوئوردىنات سىستېمىسىدا ئوخشاش ئۇزۇنلۇق بىرلىكىنى ئالىمىز. M نى تەكشىلىك ئىچىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، ئۇنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتىنى (x, y)، قۇتۇپ كوئوردىناتىنى (ρ, θ) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئۇلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى 14.1 - رەسىمگە ئاساسەن كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta. \qquad ①$$

① دىن تۆۋەندىكى مۇناسىۋەت ئىپادىسىگە ئېرىشىمىز:

$$\rho^2=x^2+y^2, \quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0).$$

مانا بۇ، قۇتۇپ كوئوردىنات بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتنى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇش فورمۇلىسىدۇر.

3 - مىسال. M نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتى $\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ نى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتقا ئايلاندۇرايلى.

يېشىش: $x=5\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{5}{2}$، $y=5\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتى $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ بولىدۇ.

4 - مىسال. M نۇقتىنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتى $(-\sqrt{3}, -1)$ نى قۇتۇپ كوئوردىناتقا ئايلاندۇرايلى.

يېشىش:

$$\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2,$$

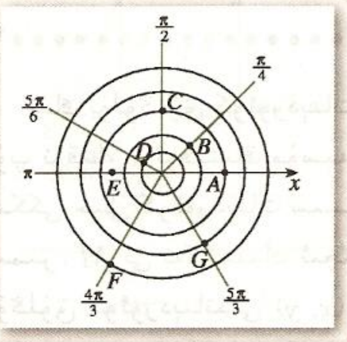
$$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

M نۇقتا 3 - چارەكتە ياتىدىغانلىقتىن، $\theta=\frac{7\pi}{6}$ ❶ بولىدۇ.

❶ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتنى قۇتۇپ كوئوردىناتقا ئايلاندۇرۇشتا، قۇتۇپ كوئوردىناتنىڭ ئىپادىلىنىشى كۆپ خىل بولىدۇ (ئۇلار قۇتۇپ بۇلۇڭى 2π نىڭ پۈتۈن سانلىق ھەسسىسى بىلەن پەرقلىنىدۇ). بىز ئادەتتە $\theta\in[0, 2\pi)$ نى ئالساقلا بولىدۇ.

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتى $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$.

2.1 كۆنۈكمە



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكى A، B، C، D، E، F، G نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتىنى يېزىڭ ($0\leqslant\theta<2\pi$، $\rho>0$).

2. مەركىزي مېتېئورولوگىيىلىك ئۆلچەش ئىستانسىسى 2004 ـ يىل 7 ـ ئاينىڭ 15 ـ كۈنى سائەت 10:30 دا تۆۋەندىكى تەيفېڭ بورىنى خەۋىرىنى ئېلان قىلدى. بۇ يىلقى 9 ـ نومۇرلۇق تروپىك قارا بورىنى «سىركولى» نىڭ مەركىزى بۈگۈن چۈشتىن بۇرۇن سائەت 8 دە نەنخەي دېڭىزىنىڭ گۇاڭدۇڭ ئۆلكىسى شەنۋي شەھىرىنىڭ شەرقىي جەنۇبىدىن تەخمىنەن 440 كىلومېتىر كېلىدىغان شەرقىي شىمال قىسمىدىكى دېڭىز يۈزىگە يۆتكەلدى، بوران مەركىزىنىڭ ئەتراپىدىكى ئەڭ چوڭ شامال كۈچى 9 بالغا يېتىدۇ. مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، بۇ تەيفېڭ بورىنى مەركىزىنىڭ ئورنىنى كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەڭ.

3. قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسىدا، $A\left(3, -\frac{\pi}{3}\right)$، $B\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ ئىككى نۇقتا بېرىلگەن بولسا، A، B ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى تېپىڭ.

4. قۇتۇپ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$، $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$، $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$، $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi\right)$ بولغان نۇقتىلار بېرىلگەن، بۇ نۇقتىلارنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

5. تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(3, \sqrt{3})$، $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$، $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$، $(-2, -2\sqrt{3})$ بولغان نۇقتىلار بېرىلگەن، بۇ نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

III ئاددىي ئەگرى سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تەكشىلىكتىكى ئەگرى سىزىق C نى تەڭلىمە $f(x, y)=0$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمە تۆۋەندىكى مۇناسىۋەتنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

(1) ئەگرى سىزىق C ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نىڭ يېشىمى بولىدۇ؛

(2) تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نىڭ يېشىمىنى كوئوردېنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ئەگرى سىزىق C ئۈستىدە ياتىدۇ.

ئۇنداق بولسا، قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىدا، تەكشىلىكتىكى ئەگرى سىزىقنى تەڭلىمە $f(\rho, \theta)=0$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟

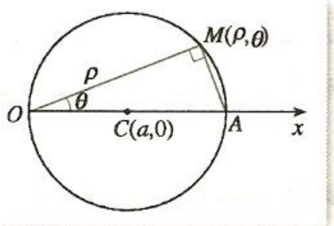
1. چەمبەرنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى

ئىزدىنىش

15.1 ـ رەسىمدىكىدەك، رادىئۇسى a بولغان چەمبەرنىڭ مەركىزىنىڭ كوئوردېناتى $C(a, 0)$ $(a > 0)$ بولسا، چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتى (ρ, θ) قانائەتلەندۈرىدىغان شەرتنى بىر تەڭلىك بىلەن ئىپادىلىيەلەمسىز؟

15.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، چەمبەر قۇتۇپ نۇقتا O دىن ئۆتىدۇ. چەمبەر بىلەن قۇتۇپ ئوقنىڭ يەنە بىر كېسىشىش نۇقتىسىنى A دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $|OA|=2a$ بولىدۇ. $M(\rho, \theta)$ نى چەمبەر ئۈستىدىكى O، A لاردىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $OM \perp AM$ بولىدۇ. $\mathrm{Rt}\triangle AMO$ دا،

$$|OM|=|OA|\cos\angle MOA$$



15.1 ـ رەسىم

يەنى

$$\rho = 2a\cos\theta . \qquad ①$$

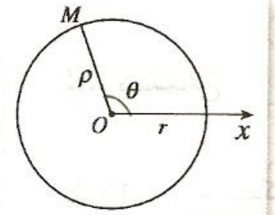
دەلىللەشكە بولىدۇكى، $O\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$، $A(2a, 0)$ نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتى ① تەڭلىمىنى قانائەتلەندۈرىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن، ① تەڭلىك چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتى (ρ, θ) قانائەتلەندۈرىدىغان شەرتتىن ئىبارەت بولىدۇ. يەنە بىر تەرەپتىن، كوئوردېناتى ① تەڭلىككە مۇۋاپىق كېلىدىغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى مۇشۇ چەمبەر ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى دەلىللەشكە بولىدۇ.

ئومۇمەن، قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئەگەر تەكشىلىك ئەگرى سىزىقى C ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتلىرى ئىچىدە كەم دېگەندە بىرى تەڭلىمە $f(\rho, \theta)=0$ نى قانائەتلەندۈرسە ھەم كوئوردېناتى تەڭلىمە $f(\rho, \theta)=0$ گە مۇۋاپىق كېلىدىغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ئەگرى سىزىق C ئۈستىدە ياتسا، ئۇ ھالدا تەڭلىمە $f(\rho, \theta)=0$ ئەگرى سىزىق C نىڭ **قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

شۇڭا، ① تەڭلىك مەركىزى $C(a, 0)(a > 0)$ نۇقتىدا ياتقان، رادىئۇسى a بولغان چەمبەرنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى بولىدۇ.

كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىشتىكى ھالقىلىق مەسىلە ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلار قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتنى تېپىش ۋە ئۇنى كوئوردىناتلار بىلەن ئىپادىلەش، ئاندىن كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەنگەن بۇ گېئومېتىرىيىلىك شەرتنى ئالگېبرالىق ئالماشتۇرۇشتىن پايدىلىنىپ ئاددىيلاشتۇرۇشتىن ئىبارەت. چەمبەرنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى تېپىشقا سېلىشتۇرغاندا، ئۇنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى تېپىش تېخىمۇ ئاسان، بۇنىڭ سەۋەبى شۇكى، قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسىدا، چەمبەر ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ρ ، θ قانائەتلەندۈرىدىغان شەرتنى ئىپادىلەش تېخىمۇ ئاسان بولۇپ، ئالگېبرالىق ئالماشتۇرۇشنىمۇ بىۋاسىتىلا ئېلىپ بېرىشقا بولىدۇ.



16.1 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. O چەمبەرنىڭ رادىئۇسى r ئىكەنلىكى بېرىلگەن. چەمبەرنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى تېخىمۇ ئاددىي قىلىش ئۈچۈن، قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەك؟

يېشىش: ئەگەر چەمبەر مەركىزى O نى قۇتۇپ نۇقتىسى، O دىن چىققان بىر نۇرنى قۇتۇپ ئوقى قىلىپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق (16.1 ـ رەسىم)، ئۇ ھالدا چەمبەر ئۈستىدىكى ھەرقايسى نۇقتىلارنىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئالاھىدىلىكى ئۇلارنىڭ قۇتۇپ دىئامېتىرى رادىئۇس r غا تەڭ بولۇشتىن ئىبارەت بولىدۇ.

$M(\rho,\ \theta)$ نى چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق ئۇ ھالدا $|MO|=r$ بولىدۇ، يەنى

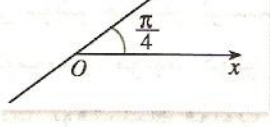
$$\rho=r.$$

روشەنكى، قۇتۇپ نۇقتا بىلەن چەمبەر مەركىزى ئۈستمۇئۈست چۈشكەندە، چەمبەرنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىنىڭ كۆرۈنۈشى ① گە قارىغاندا تېخىمۇ ئاددىي بولىدۇ.

تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىسى $x^2+y^2=r^2$ قا سېلىشتۇرۇپ، قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى $\rho=r$ نىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

2. تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى

ئىزدىنىش

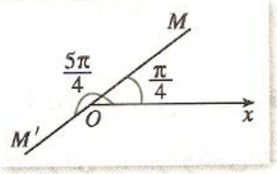


17.1 ـ رەسىم

17.1 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق قۇتۇپ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ. ئەگەر قۇتۇپ ئوقىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان بۇلۇڭ $\frac{\pi}{4}$ بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

18.1 ـ رەسىمدىكىدەك، قۇتۇپ نۇقتا O نى چېگرا نۇقتىسى قىلىپ، l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتىنى OM نۇر، OM' نۇردىن ئىبارەت ئىككى بۆلەككە بۆلىمىز. OM

نۇر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ بۇلۇڭى ئوخشاشلا $\frac{\pi}{4}$ بولغانلىقتىن، OM نۇرنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:



18.1 ـ رەسىم

$$\theta=\frac{\pi}{4}\ (\rho\geqslant 0);$$

OM' نۇر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ قۇتۇپ بۇلۇڭى ئوخشاشلا $\frac{5\pi}{4}$ بولغانلىقتىن، OM' نۇرنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\theta=\frac{5\pi}{4}\ (\rho\geqslant 0).$$

شۇڭا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى $\theta=\frac{\pi}{4}$ ۋە $\theta=\frac{5\pi}{4}$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

ئەگەر $\rho<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $-\rho>0$ بولىدۇ. بىز $M(\rho,\ \theta)$ نۇقتا بىلەن $P(-\rho,\ \theta)$ نۇقتا قۇتۇپ نۇقتىغا نىسبەتەن سىممېترىك دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

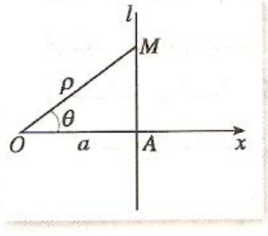
l تۈز سىزىقنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات تەڭلىمىسى $y=x$ بىلەن ئىپادىلىگەنگە سېلىشتۇرغاندا، قۇتۇپ نۇقتىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىقنى قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەش قولايلىق ئەمەس. ئەلۋەتتە، ئەگەر ρ نىڭ بارلىق ھەقىقىي سانلارنى ئېلىشىغا يول قويۇلسا، ئۇ ھالدا قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى

$\theta=\frac{\pi}{4}\ (\rho\in\mathbf{R})$ ياكى $\theta=\frac{5\pi}{4}\ (\rho\in\mathbf{R})$

نىڭ ھەر ئىككىسى l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى بولىدۇ.

2 ـ مىسال. $A(a,\ 0)$ $(a>0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە قۇتۇپ ئوقىغا تىك بولغان l تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: 19.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $M(\rho,\ \theta)$ نى l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى A دىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، O بىلەن M نى تۇتاشتۇرساق، $\triangle MOA$ نىڭ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولغانلىقىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:



19.1 ـ رەسىم

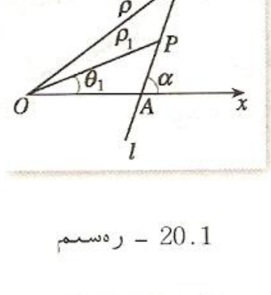
$$|OM|\cos\angle MOA=|OA|,$$

يەنى

$$\rho\cos\theta=a.$$

دەلىللەشكە بولىدۇكى، A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(a,\ 0)$ يۇقىرىدىكى ئىپادىنى قانائەتلەندۈرىدۇ. شۇڭا، بۇ ئىپادە تاپماقچى بولغان تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسى بولىدۇ.

3 ـ مىسال. P نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردېناتى $(\rho_1,\ \theta_1)$ بولۇپ، l تۈز سىزىق P نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەمدە ئۇنىڭ بىلەن قۇتۇپ ئوقى α بۇلۇڭنى ھاسىل قىلىدۇ. l تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردېنات تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



20.1 ـ رەسىم

يېشىش: 20.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $M(\rho,\ \theta)$ نى l تۈز سىزىق ئۈس-

تىندىكى P دىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، O بىلەن M نى تۇتاشتۇرساق، ئۇ ھالدا $|OM| = \rho$ ، $\angle xOM = \theta$ بولىدۇ. P نۇقتىنىڭ قۇتۇپ كوئوردىناتى (ρ_1, θ_1) ئىكەنلىكىگە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى،

$$|OP| = \rho_1,\ \angle xOP = \theta_1.$$

l تۈز سىزىق بىلەن قۇتۇپ ئوقى A نۇقتىدا كېسىشىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، l تۈز سىزىق بىلەن قۇتۇپ ئوقى α بۇلۇڭنى ھاسىل قىلىدىغانلىقى ئۈچۈن، $\angle xAM = \alpha$ بولىدۇ.

$\triangle MOP$ دا،

$$\angle OMP = \alpha - \theta,\ \angle OPM = \pi - (\alpha - \theta_1),$$

سىنۇس تېئورېمىسىغا ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{|OM|}{\sin\angle OPM} = \frac{|OP|}{\sin\angle OMP},$$

يەنى

$$\frac{\rho}{\sin[\pi - (\alpha - \theta_1)]} = \frac{\rho_1}{\sin(\alpha - \theta)},$$

يەنى

$$\rho \sin(\alpha - \theta) = \rho_1 \sin(\alpha - \theta_1). \qquad ②$$

روشەنكى، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (ρ_1, θ_1) تەڭلىمە ② نىڭ يېشىمى بولىدۇ. شۇڭا، تەڭلىمە ② تۈز سىزىق l نىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى بولىدۇ.

مۇلاھىزە

3 ـ مىسالدا، ئەگەر قۇتۇپ نۇقتىسىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات بېشى، قۇتۇپ ئوقىنى x ئوقنىڭ مۇسبەت يېرىمى قىلىپ تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق، ئۇ ھالدا l تۈز سىزىقنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟ l تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى بىلەن ئۇنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى سېلىشتۇرۇپ، ئوخشاش بولمىغان كوئوردىنات سىستېمىلىرىدىكى تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىگە نىسبەتەن قانداق تونۇشقا ئىگە بولغانلىقىڭىزنى ئېيتىپ بېرىڭ.

كۆنۈكمە 3.1

1. تۆۋەندىكى قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىلىرىنىڭ قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ، ئاندىن ئۇلارنىڭ شەكلىنى سىزىڭ.

(1) $\rho = 5$; (2) $\theta = \frac{5\pi}{6}\ (\rho \in \mathbf{R})$; (3) $\rho = 2\sin\theta$

2. قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسىدا، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە مۇۋاپىق كېلىدىغان تۈز سىزىق ياكى چەمبەرنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) قۇتۇپ نۇقتىسىدىن ئۆتكەن ھەم يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\frac{\pi}{3}$ بولغان تۈز سىزىق؛

(2) $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەم قۇتۇپ ئوقىغا تىك بولغان تۈز سىزىق؛

(3) مەركىزى $A\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ نۇقتىدا ياتقان ھەم رادىئۇسى 1 بولغان چەمبەر؛

(4) مەركىزى $\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$ نۇقتىدا ياتقان ھەم رادىئۇسى a بولغان چەمبەر.

3. تۆۋەندىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىلىرىنى قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $x=4$;　(2) $y+2=0$;

(3) $2x-3y-1=0$;　(4) $x^2-y^2=16$.

4. تۆۋەندىكى قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىلىرىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات تەڭلىمىسىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $\rho\sin\theta=2$;　(2) $\rho(2\cos\theta+5\sin\theta)-4=0$;

(3) $\rho=-10\cos\theta$;　(4) $\rho=2\cos\theta-4\sin\theta$.

5. تۈز سىزىقنىڭ قۇتۇپ كوئوردىنات تەڭلىمىسى $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $A\left(2,\ \frac{7\pi}{4}\right)$ نۇقتىدىن مۇشۇ تۈز سىزىقچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ.

6. ئېللىپسنىڭ مەركىزى O، ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم $2a$، $2b$ $(a>b>0)$ بولۇپ، A، B لار ئايرىم ـ ئايرىم ئېللىپس ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا ھەمدە $OA\perp OB$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ نىڭ مۇقىم قىممەت بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ؛

(2) $\triangle AOB$ نىڭ يۈزىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ.

Ⅳ قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىنات سىستېمىسى ۋە شار كوئوردىنات سىستېمىسىنى قىسقىچە تونۇشتۇرۇش

تەكشىلىك (ياكى بوشلۇق) تىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، تەكشىلىك (ياكى بوشلۇق) تىكى نۇقتىنى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ؛ قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، تەكشىلىكتىكى نۇقتىنى قۇتۇپ كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، بوشلۇقتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، بوشلۇقتىكى نۇقتىنى قۇتۇپ كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟

1. قۇتۇپ - تىك كوئوردېنات سىستېمىسى

مۇلاھىزە

21.1 - رەسىمدىكىدەك، چەمبەر شەكىللىك تەنتەربىيە مەيدانىدا، كۆرۈش سۇپىسىدىكى مەلۇم تاماشىبىن ئولتۇرغان جاينىڭ ئورنىنى قانداق بەلگىلەش كېرەك؟

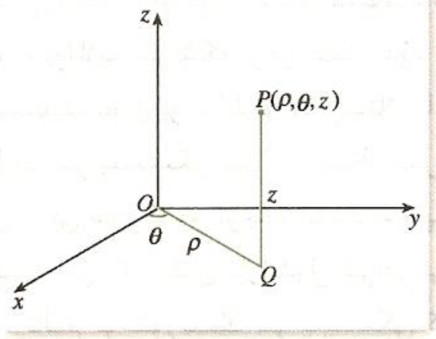
21.1 - رەسىم

21.1 - رەسىمدىكىسى بىر چەمبەر شەكىللىك تەنتەربىيە مەيدانى. بۇ تەنتەربىيە مەيدانى شەرق يۆنىلىشتىن باشلاپ، سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى بويىچە سېكتور شەكىللىك 12 رايونغا تەڭ قىلىپ بۆلۈنگەن ھەم بۇ رايونلار تەرتىپ بويىچە 1 - رايون، 2 - رايون، ...، 12 - رايون دەپ خاتىرىلەنگەن. چەمبەر شەكىللىك تەنتەربىيە مەيدانىنىڭ بىرىنچى رېتى بىلەن مەيدان مەركىزى O نىڭ ئارىلىقىنى $300\,\mathrm{m}$، ئۆزئارا قوشنا ھەر ئىككى رەت ئارىسىدىكى ئارىلىقنى $1\mathrm{m}$، ھەربىر قەۋەت كۆرۈش سۇپىسىنىڭ ئېگىزلىكىنى $0.6\,\mathrm{m}$ دەپ پەرەز قىلايلى. ھازىر 9 - رايون 3 - رەتنىڭ دەل ئوتتۇرىدىكى A ئورۇننى بەلگىلەشكە توغرا كەلسە، بۇ ئورۇننى قانداق تەسۋىرلەش كېرەك؟

تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىغا تەققاسلىغان ھالدا، يەر تەكشىلىكىدە بۇ تەنتەربىيە مەيدانىنىڭ مەركىزى O نى قۇتۇپ نۇقتا، O نى ئۇچ قىلغان ھەمدە شەرق يۆنىلىشتىكى كىرىش ئېغىزىدىن ئۆتكەن Ox نۇرنى قۇتۇپ ئوقى قىلىپ قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق، ئۇ ھالدا A بىلەن تەنتەربىيە مەيدانىنىڭ ئوتتۇرا ئوق سىزىقى Oz نىڭ ئارىلىقى $302\mathrm{m}$ بولىدۇ؛ قۇتۇپ ئوقى Ox نى سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى بويىچە $\frac{17\pi}{12}$ ئايلاندۇرساق، ئۇ ئايلاندۇرۇلغاندىن كېيىن OA نىڭ يەر تەكشىلىكىدىكى پروييېكسىيىسى بولىدۇ؛ A نىڭ يەر يۈزىدىن ئېگىزلىكى $1.8\mathrm{m}$.

شۇڭا، A نىڭ ئېنىق ئورنىنى سانلار گۇرۇپپىسى $(302, \frac{17\pi}{12}, 1.8)$ بىلەن ئىپادىلىيەلەيمىز.

ئومۇمەن، 22.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزۇۋالايلى. ئاندىن P نى بوشلۇقتىكى خالىغان بىر نۇقتا، ئۇنىڭ Oxy تەكشىلىكتىكى پروييېكسىيىسىنى Q دەپ پەرەز قىلىپ، Q نۇقتىنىڭ Oxy تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردېناتىنى (ρ, θ) $(0 \leqslant \theta < 2\pi$ ، $\rho \geqslant 0)$ بىلەن ئىپادىلىسەك، بۇ چاغدا P نۇقتىنىڭ ئورنىنى تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (ρ, θ, z) $(z \in \mathbf{R})$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. شۇنداق قىلىپ، بوشلۇقتىكى نۇقتا بىلەن تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (ρ, θ, z) ئارىسىدا بىر خىل ماسلىق مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇۋالغان بولىدۇ. بىز يۇقىرىقى ماسلىق مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇلغان كوئوردېنات سىستېمىسىنى **قۇتۇپ - تىك كوئوردېنات سىستېمىسى** دەپ ئاتايمىز، تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (ρ, θ, z) نى P نۇقتىنىڭ **قۇتۇپ - تىك كوئوردېناتى** دەپ ئاتاپ، ئۇنى $P(\rho, \theta, z)$ قىلىپ يازىمىز، بۇنىڭدىكى $0 \leqslant \rho$ ، $2\pi > \theta \geqslant 0$، $-\infty < z < +\infty$.



22.1 ـ رەسىم

بوشلۇقتىكى P نۇقتىنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتى (x, y, z) بىلەن قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىناتى (ρ, θ, z) ئارىسىدىكى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسى:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta , \\ y = \rho \sin \theta , \\ z = z. \end{cases}$$

قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىنات سىستېمىسى يېرىم قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى دەپمۇ ئاتىلىدۇ، ئۇ تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى ۋە بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ بىر بۆلىكىدىن تەركىب تاپىدۇ.

مۇلاھىزە

1. ئاساسىنىڭ رادىئۇسى r، ئېگىزلىكى h بولغان بىر سىلىندىر بېرىلگەن. قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، سىلىندىرنىڭ يان سىرتى ۋە ئۇنىڭ ئاساسىدىكى نۇقتىنىڭ ئورنىنى قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىناتتىن پايدىلىنىپ تەسۋىرلەڭ.

2. قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ كۈندىلىك تۇرمۇشتىكى قوللىنىلىشىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

2. شار كوئوردىنات سىستېمىسى

مۇلاھىزە

ئاۋئاتسىيە ـ ئالەم بوشلۇقى ساھەسىدە، كىشىلەر ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ ئېنىق ئورنىنى قانداق بەلگىلەيدۇ؟

23.1 ـ رەسىمدىكىدەك، ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ مەلۇم بىر پەيتتىكى ئورنىنى بەلگىلەش ئۈچۈن، يەر شارىدا مۇقىم ۋە ھەرىكەت ھالىتىدىكى يەر يۈزى تېلېتېخنىكا (يىراقتىن تەكشۈرۈپ پەرق ئېتىش) كۆزىتىش پونكىتىدىن بىرقانچىنى قۇرۇپ، ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ ھەرىكەتكە دائىر سانلىق مەلۇماتلارنى ئۆل-

چەپ تەكشۈرۈشكە ھەم بۇ سانلىق مەلۇماتلارنى ئۆلچەپ تەكشۈرۈش مەركىزىگە يوللاپ بېرىشكە توغرا كېلىدۇ. ئۆلچەپ تەكشۈرۈش مەركىزى يىغىۋېلىنغان بۇ سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن، ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ مەلۇم بىر پەيتتىكى يەر شارىنىڭ سىرتقى يۈزى بىلەن بولغان ئارىلىقى r نى ھەم ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ شۇ پەيتتىكى ئورنىنىڭ مېرىدىئان گرادۇسى θ بىلەن پاراللېل گرادۇسى φ نى ھېسابلاپ چىقىدۇ - دە، ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ شۇ پەيتتىكى كونكرېت ئورنىنى تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) بىلەن ئىپادىلەيدۇ.

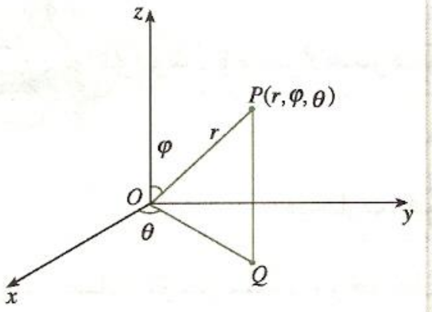
23.1 - رەسىم

ئۇنداق بولسا، كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تۇرغۇزغاندا، ئاندىن r، φ، θ لارنىڭ قىممىتىگە ئاسان ئېرىشكىلى ھەم ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ كونكرېت ئورنىنى تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) غا ئاساسەن تاپقىلى بولىدۇ؟

ئېكۋاتور تەكشىلىكىدە، بىز ئالدى بىلەن يەر شارىنىڭ مەركىزى O نى قۇتۇپ نۇقتا، O نى ئۇچ قىلغان ھەمدە نۆل گرادۇسلۇق مېرىدىئان سىزىقى ❶ بىلەن كېسىشكەن Ox نۇرنى قۇتۇپ ئوقى قىلىپ تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز؛ ئاندىن مۇشۇ ئاساستا، O نى ئۇچ قىلغان ھەمدە شىمالىي قۇتۇپتىن ئۆتكەن Oz نۇر (ئېكۋاتور تەكشىلىكىگە تىك) نى يەنە بىر قۇتۇپ ئوقى قىلىپ ئېلىپ، بۇنى ئالدىدا تۇرغۇزۇۋالغان تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى بىلەن بىرلەشتۈرسەك، بوشلۇقتىكى كوئوردىنات سىستېمىسى ۋۇجۇدقا كېلىدۇ. بۇ كوئوردىنات سىستېمىسىدا r، φ، θ لارنىڭ قىممىتى ئېنىق مەنىگە ئىگە بولغاچقا، بىزنىڭ r، φ، θ لارنىڭ قىممىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشىمىزغا ھەم تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) غا ئاساسەن ئالەم ئۇچقۇرىنىڭ كونكرېت ئورنىنى تېپىشىمىزغا ئاسانلىق تۇغۇلىدۇ.

❶ «نۆل گرادۇسلۇق مېرىدىئان سىزىقى» ئەنگلىيىدىكى گرېنۋىچ رەسەتخانىسىدىن ئۆتكەن مېرىدىئان سىزىقىنى كۆرسىتىدۇ.

ئۇمۇمەن، 24.1 - رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزۇۋېلىپ، P نى بوشلۇقتىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلايلى. ئاندىن O بىلەن P نى تۇتاشتۇرۇپ، $|OP|=r$ ھەم OP بىلەن Oz ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى ئارىسىدىكى بۇلۇڭنى φ دەپ خاتىرىلىۋالىمىز. ئۇنىڭدىن كېيىن P نۇقتىنىڭ Oxy تەكشىلىكتىكى پروېكسىيىسىنى Q دەپ، Ox ئوقنى سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى بويىچە OQ غا ئايلاندۇرۇپ بارغاندا ئايلىنىپ ئۆتكەن ئەڭ كىچىك مۇسبەت بۇلۇڭنى θ دەپ پەرەز قىلىمىز. شۇنىڭ بىلەن، P نۇقتىنىڭ ئورنىنى تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ - دە، بوشلۇقتىكى نۇقتا بىلەن تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) ئارىسىدا بىر خىل ماسلىق مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇۋالغان بولىمىز. بىز ماسلىق مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇۋېلىنغان يۇقىرىقى كوئوردىنات سىستېمىسىنى **شار كوئوردىنات سىستېمىسى (ياكى بوشلۇقتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى)** دەپ ئاتايمىز ھەم تەرتىپلىك سانلار گۇرۇپپىسى (r, φ, θ) نى P نۇقتىنىڭ شار كوئوردىناتى دەپ ئاتاپ، ئۇنى $P(r, \varphi, \theta)$ قىلىپ يازىمىز، بۇنىڭدىكى $r \geqslant 0$، $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$، $0 \leqslant \theta < 2\pi$.



24.1 ـ رەسىم

بوشلۇقتىكى P نۇقتىنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتى (x, y, z) بىلەن شار كوئوردىناتى (r, φ, θ) ئارىسىدىكى ئالماشتۇرۇش فورمۇلىسى:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

شار كوئوردىنات سىستېمىسى جۇغراپىيە ۋە ئاسترونومىيىدە كەڭ قوللىنىلىدۇ. ئۆلچەش ئەمەلىيىتىدە، شار كوئوردىناتتىكى θ بۇلۇڭ كۆزىتىلىدىغان نۇقتا $P(r, \varphi, \theta)$ نىڭ ئازىمۇت بۇلۇڭى، $90^\circ - \varphi$ بولسا ئېگىز ـ پەسلىك بۇلۇڭى دېيىلىدۇ.

مۇلاھىزە

بوشلۇقتىكى شەكىللەرنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىنى تەتقىق قىلغاندا، كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تاللىشىمىز كېرەك؟

بىز سان ئوقى، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى، تەكشىلىكتىكى قۇتۇپ كوئوردىنات سىستېمىسى، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى، قۇتۇپ ـ تىك كوئوردىنات سىستېمىسى ۋە شار كوئوردىنات سىستېمىسى قاتارلىق بىلىملەرنى ئۆگەندۇق. كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، كوئوردىنات سىستېمىسى شەكىل بىلەن ساننى تۇتاشتۇرۇپ تۇرىدىغان كۆۋرۈك، گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەر بىلەن ئالگېبرالىق مەسىلىلەرنى ئۆزئارا ئايلاندۇرۇشنى كوئوردىنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئەمەلگە ئاشۇرغىلى بولىدۇ. ئوخشاش بولمىغان كوئوردىنات سىستېمىلىرى ئوخشاش بولمىغان ئالاھىدىلىكلەرگە ئىگە، ئەمەلىي قوللىنىشلاردا، مەسىلىنىڭ ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاپ، مەسىلىنى شۇ كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ ياردىمىدە ئەپچىل ۋە ئاددىي ھالدا تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ.

مۇلاھىزە

1. كىشىلەرنىڭ يەر يۈزىدىكى بىر نۇقتىنىڭ ئورنىنى قانداق بەلگىلەيدىغانلىقىنى شار كوئوردىنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ.
2. شار كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ كۈندىلىك تۇرمۇشتىكى قوللىنىلىشىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

دېكارت، فېرمات ۋە كوئوردېنات ئۇسۇلى

كوئوردېنات ئۇسۇلىنىڭ ۋۇجۇدقا كېلىشى ئىشلەپچىقىرىش ۋە پەن - تېخنىكىنىڭ تەرەققىياتى بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىك. 16 - ئەسىردىن كېيىن، ئاسترونومىيە، مېخانىكا، دېڭىز قاتنىشى قاتارلىقلارنىڭ تەرەققىي قىلىنىشىغا ئەگىشىپ، گېئومېترىيىگە قارىتا يېڭى تەلەپلەر ئوتتۇرىغا قويۇلدى. مەسىلەن، گېرمانىيىلىك ئاسترونوم كېپلېر (J. Kepler، 1571 ~ 1630) سەييارىلەرنىڭ قۇياش ئەتراپىدا ئېللىپس شەكىللىك ئوربىتىنى بويلاپ ئايلىنىدىغانلىقى، قۇياش بۇ ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇس نۇقتىسىدا ئىكەنلىكىنى بايقىغان؛ ئىتالىيىلىك ئالىم گالىلېي (G. Galilei، 1564 ~ 1642) جىسىمنى ئاتقاندا ئۇ پارابولانى بويلاپ ھەرىكەت قىلىدىغانلىقىنى بايقىغان ... شۇڭا، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى قانداق قىلىپ تېخىمۇ ئېنىق سۈرەتلەپ، ئۇلارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى مىقدارلاشتۇرۇپ ئىپادىلەش ماتېماتىكلارنىڭ جىددىي ھەل قىلىنىشىغا تېگىشلىك مەسىلىگە ئايلاندى.

ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ ئاساسىي ئىدىيىسى تەكشىلىكتە «كوئوردېنات» ئۇقۇمىنى كىرگۈزۈپ، تەكشىلىكتىكى نۇقتا بىلەن كوئوردېنات ئارىسىدا بىرگەبىر ماسلىق مۇناسىۋەت ئورنىتىش ۋە بۇ ئارقىلىق ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش ھەم ئەگرى سىزىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشتىن ئىبارەت. گەرچە نۇقتىنىڭ ئورنىنى كوئوردېنات بىلەن ئىپادىلەشتىن ئىبارەت بۇ ئاساسىي ئىدىيە بۇرۇندىنلا بار (مەسىلەن، جۇغراپىيىدىكى «مېرىدىئان سىزىقى» ۋە «پاراللېل سىزىقى») ھەمدە ئالدىنقىلار بۇ مەسىلە ئۈستىدە تەتقىقات ئېلىپ بارغان بولسىمۇ، لېكىن ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ ھەقىقىي كەشىپ قىلىنىشى فرانسىيىلىك ماتېماتىك دېكارت (R. Descartes، 1596 ~ 1650) بىلەن فېرمات (P. d. Fermat، 1601 ~ 1665) نىڭ تۆھپىسىدۇر.

دېكارت 17 - ئەسىردە ياشىغان فرانسىيىلىك پەيلاسوپ، ماتېماتىك، يېقىنقى زامان ئىلمىي ئۇسۇل نەزەرىيىسىنىڭ بەرپا قىلغۇچىسىدۇر. 1637 - يىلى، ئۇ «گېئومېترىيە» دېگەن مەشھۇر ئەسىرىنى ئېلان قىلىپ، ئانالىتىك گېئومېترىيىنىڭ مەيدانغا كەلگەنلىكىنى نامايان قىلدى. «گېئومېترىيە» دە، دېكارت «ئۆزگەرگۈچى مىقدار» ئۇقۇمىنى ئىشلەتكەن ھەم تەكشىلىكتىكى كوئوردېنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزغان. ئۇ شەكىل سىزىش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلغاندا، كوئوردېنات تەكشىلىكىدىكى «نۇقتا» بىلەن كوئوردېنات سۇپىتىدىكى تەرتىپلىك «سانلار جۈپى» نى ماس كەلتۈرۈپ، ئاندىن تەكشىلىكتىكى «ئەگرى سىزىق» بىلەن ئىككى نامەلۇم مىقدارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان «تەڭلىمە» نى ماس كەلتۈرگەن. ئۇ قىلغان ئەڭ مۇھىم ئىش نۇقتا بىلەن كوئوردېناتنى ماس كەلتۈرۈشتىن ئىبارەت. نۇقتا بىلەن كوئوردېنات ماس كەلتۈرۈلگەندىن كېيىن، ھەرىكەتچان كوئوردېنات دەل ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولىدۇ - دە، تەڭلىمە ھەم بېرىلگەن مىقدار بىلەن نامەلۇم مىقدار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەپ بېرىدۇ، ھەم ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئېنىقلاپ بېرىدۇ. ھالبۇكى، بۇ لارنىڭ ھەممىسى تەكشىلىكتىكى كوئوردېنات سىستېمىسىنىڭ تۇرغۇزۇلۇشىغا تايىنىدۇ.

فېرمات 17 - ئەسىرنىڭ ئالدىنقى يېرىمىدىكى ئەڭ ئۇلۇغ ماتېماتىكلارنىڭ بىرى. ئۇ

مىلادىيەدىن ئىلگىرىكى 3 - ئەسىردە ئۆتكەن قەدىمكى گرېتسىيىلىك گېئومېتىرىيە ئالىمى ئاپوللونىئوس (Apollonius، تەخمىنەن مىلادىيەدىن ئىلگىرىكى 262 - يىلىدىن تەخمىنەن 190 - يىلىغىچە) خىزمىتىنى چىقىش قىلىپ، ئاپوللونىئوسنىڭ يوقىلىپ كەتكەن ئەسىرى «تەكشىلىكتىكى ترايېكتورىيە ھەققىدە» نى ئەسلىگە كەلتۈرۈش ئىشى بىلەن شۇغۇللىنىش جەريانىدا، ئالگېبرا كوئوردېنات سىستېمىسى ئارقىلىق گېئومېتىرىيىگە تەتبىقلانسا، ترايېكتورىيىنى تەتقىق قىلىش ئاسانلىشىدىغانلىقىنى بايقىغان. ئۇ بەرپا قىلغان كوئوردېنات سىستېمىسى دېكارتنىڭ كوئوردېنات سىستېمىسىغا قارىغاندا تېخىمۇ روشەن بولۇپ، ھازىرقى زامان كوئوردېنات سىستېمىسىغا تېخىمۇ يېقىنلىشىدۇ. دېكارتنىڭ كوئوردېنات سىستېمىسى ھازىرقىسىدەك ئېنىق بولمىسىمۇ (مەسىلەن، ئۇ ھەتتا كوئوردېناتنىڭ مەنپىي قىممىتىنىمۇ ئويلاشمىغان، ۋە باشقىلار)، لېكىن ئۇنىڭ ئۇسۇلى تېخىمۇ ئومۇمىي بولۇپ، مۇۋاپىق كېلىش دائىرىسىمۇ كەڭ ئىدى.

فېرمات تەڭلىمىدىن چىقىپ ئۇنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تەتقىق قىلغان، دېكارت بولسا ترايېكتورىيىدىن قول سېلىپ ئۇنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزغان، بۇ دەل ئانالىتىك گېئومېتىرىيىدىكى بىر مەسىلىنىڭ ئوڭ، تەتۈر جەھەتتىن ئىككى خىل ئوتتۇرىغا قويۇلۇشى بولۇپ، ھەرقايسىسىنىڭ ئۆز ئالدىغا ئېتىبار بېرىلىدىغان تەرەپلىرى بار. ئالدىنقىسىدا ئالگېبرادىن گېئومېتىرىيىگە ئۆتۈش، كېيىنكىسىدە بولسا گېئومېتىرىيىدىن ئالگېبراغا ئۆتۈش تەكىتلىنىدۇ. شۇنداق دېيىشكە بولىدۇكى، دېكارت بىلەن فېرمات ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنى بەرپا قىلىشتىن ئىبارەت بۇ پەۋقۇلئاددە شان - شەرەپكە ئورتاق مۇيەسسەر بولدى.

ئانالىتىك گېئومېتىرىيىنىڭ بەرپا قىلىنىشى بىلەن بىر قاتار يېڭى ماتېماتىكا ئۇقۇملىرى ئوتتۇرىغا چىقتى، بولۇپمۇ ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ماتېماتىكىغا كىرگۈزۈلۈشى ماتېماتىكىنى بىر يېڭى تەرەققىيات دەۋرىگە، يەنى ئۆزگەرگۈچى مىقدار ماتېماتىكىسى دەۋرىگە ئېلىپ كىردى. ئېنگېلس بۇنىڭغا مۇنداق باھا بەرگەنىدى: «دېكارتنىڭ ئۆزگەرگۈچى سانىنى ئوتتۇرىغا قويۇشى ماتېماتىكىدا بۇرۇلۇش پەيدا قىلدى. ئۆزگەرگۈچى سان بولغانلىقى ئۈچۈن، ھەرىكەت ماتېماتىكىغا كىردى؛ ئۆزگەرگۈچى سان بولغانلىقى ئۈچۈن، دىئالېكتىكا ماتېماتىكىغا كىردى؛ ئۆزگەرگۈچى سان بولغانلىقى ئۈچۈن، دىففېرېنسىئال بىلەن ئىنتېگرال دەرھاللا زۆرۈر نەرسىگە ئايلاندى.»

1655 - يىلى، ئەنگلىيىلىك ماتېماتىك ۋورىس (J. Wallis، 1616 ~ 1703) ئالدى بىلەن ئاڭلىق ھالدا مەنپىي ئوردىنات ۋە مەنپىي ئابسىسسانى كىرگۈزۈش ئارقىلىق، دېكارت، فېرماتلارنىڭ كوئوردېنات سىستېمىلىرىنى يېڭىلاپ، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ مۇكەممەل تەڭلىمىسىگە ئېرىشتى ھەم كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى بۇ تەڭلىمىلەردىن پايدىلىنىپ بىۋاسىتە كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، كوئوردېنات ئۇسۇلىنىڭ غايەت زور كۈچىنى تولۇق نامايان قىلدى. ئىتالىيىلىك ماتېماتىك كاۋالېيېر (B.Caralieri، 1598 ~ 1647) ئارخىمېد سپىرال سىزىقى ئاستىدىكى يۈزنى ئەڭ دەسلەپ قۇتۇپ كوئوردېناتتىن پايدىلىنىپ تاپتى، ئەنگلىيىلىك فىزىك، ماتېماتىك نيۇتون (I.Newton، 1642 ~ 1727) تۇنجى بولۇپ قۇتۇپ كوئوردېناتنى تەكشىلىكتىكى نۇقتىنىڭ ئورنىنى بەلگىلەشتىكى بىر خىل ئۇسۇل دەپ قارىدى. شۋېتسارىيىلىك ماتېماتىك بېرنوللى (J.Bernoulli، 1654 ~ 1705) 1691 - يىلى يۇقىرىقىدەك قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىغا دائىر ماقالىسىنى ئەڭ بۇرۇن ئېلان قىلدى، شۇڭا كىشىلەر ئادەتتە بېرنوللىنى قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسىنىڭ كەشپ قىلغۇچىسى دەپ ئاتىشىدۇ. شۇنىڭدىن كېيىن، ماتېماتىكلار يەنە بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات

سىستېمىسى، قۇتۇپ - تىك كوئوردىنات سىستېمىسى ۋە شار كوئوردىنات سىستېمىسىنى بەرپا قىلىپ، ئەگرى سىرت ۋە بوشلۇقتىكى ئەگرى سىزىقنى كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ مۇھاكىمە قىلدى.

كوئوردىنات ئۇسۇلى ئىدىيىسى كىشىلەرنىڭ گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەر خىل ئالگېبرالىق ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشىغا تۈرتكە بولدى. بۇ خىل ئۇسۇل ئومۇمىيلىققا ئىگە بولۇپ، ئۇ ماتېماتىكىنىڭ ئىچكى قىسمىدىكى سان بىلەن شەكىل، ئالگېبرا بىلەن گېئومېترىيىدىن ئىبارەت ئىككى چوڭ پەن ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تۇتاشتۇرىدۇ. شۇنىڭدىن ئېتىبارەن، ئالگېبرا بىلەن گېئومېترىيە بىر - بىرىدىن يېڭى - يېڭى ھاياتىي ئوزۇقلارنى قوبۇل قىلىپ، تېز تەرەققىي قىلدى ھەم يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسىدىكى ماشىنىلاشقان ئىسپاتلاشنى كۈچلۈك قورال بىلەن تەمىن ئەتتى.

ماتېماتىكا ئۆگىنىشىنىڭ ئۈزلۈكسىز چوڭقۇرلىشىشىغا ئەگىشىپ، ئوقۇغۇچىلار كوئوردىنات ئۇسۇلىنىڭ تېخىمۇ كەڭ قوللىنىلىشىنى كۆرىدۇ ۋە ئۇنىڭ غايەت زور كۈچىنى ھېس قىلىدۇ. ئۆزىڭىزنىڭ ئۆگىنىش تەجرىبىلىرىڭىزگە باغلاپ، كوئوردىنات ئۇسۇلىنىڭ رولى ۋە ئەھمىيىتىنى سۆزلەپ بېرەلەمسىز؟

2 - لېكسىيە

پارامېتىرلىق تەڭلىمە

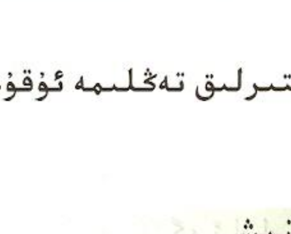
ئىلگىرىكى ئۆگىنىشلەردە بىز ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىشنىڭ بەزى ئۇسۇللىرىنى ئەگىلىگەنىدۇق. بەزى ئەگرى سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپقاندا، ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى x، y لەرنىڭ مۇناسىۋىتىنى بىۋاسىتە ئېنىقلاش تەسكە توختايدۇ. بىراق، مەلۇم بىر پارامېتىرنى x، y لەرنى باغلاپ تۇرىدىغان كۆۋرۈك قىلىۋالساق، ئۇ ھالدا x، y لەر قانائەتلەندۈرىدىغان شەرتنى ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ، يەنى پارامېتىر بىزنىڭ ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $f(x, y)=0$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشىمىزغا ياردەم بېرىدۇ. تۆۋەندە ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىش مەسىلىسى ئۈستىدە مۇھاكىمە ئېلىپ بارىمىز.

I ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

1. پارامېتىرلىق تەڭلىمە ئۇقۇمى

ئىزدىنىش

1.2 - رەسىمدىكىدەك، بىر قۇتقۇزۇش ئايروپىلانى ئاپەتكە ئۇچرىغان رايوننىڭ يەر يۈزىدىن 500m ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقتا 100m/s تېزلىك بىلەن گورىزونتال تۈز سىزىقنى بويلاپ ئۇچقان. ئۇچقۇچى ياردەم بېرىش ئۈچۈن تەييارلانغان ماددىي ئەشيانى ئاپەتكە ئۇچرىغان رايوننىڭ بەلگىلەنگەن جايىغا توغرا تاشلىشى ئۈچۈن (ھاۋانىڭ قارشىلىق كۈچى ھېسابقا ئېلىنمايدۇ)، تاشلاش پەيتىنى قانداق بېكىتىشى كېرەك؟



1.2 - رەسىم

2.2 - رەسىم

2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئايروپىلان A نۇقتىدا ماددىي ئەشيانى ئايروپىلان بۆلمىسىدىن تاشلايدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، ئۇچۇش يولى (تۈز سىزىق) دىن ئۆتكەن ھەمدە يەر تەكشىلىكىگە تىك بولغان تەكشىلىكتە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز ھەم يەر تەكشىلىكى بىلەن مۇشۇ تەكشىلىكنىڭ كېسىشىش سىزىقىنى x ئوق قىلىپ، y ئوقنى A نۇقتىدىن ئۆتىدىغان قىلىپ ئالىمىز.

ماددىي ئەشيانى ئايروپىلان بۆلمىسىدىن تاشلىغان چاغدىكى پەيتنى 0، ماددىي ئەشيانىڭ t پەيتتىكى ئورنىنى $M(x, y)$ نۇقتا دەپ خاتىرىلىسەك، ئۇ ھالدا x ماددىي ئەشيانىڭ گورىزونتال يۆتكىلىش مىقدارىنى، y ماددىي ئەشيانىڭ يەر يۈزىدىن ئېگىزلىكىنى ئىپادىلەيدۇ. گورىزونتال يۆتكىلىش مىقدارى x بىلەن ئېگىزلىك y ئوخشاش بولمىغان ئىككى خىل ھەرىكەتتىن كېلىپ چىقىدىغانلىقى ئۈچۈن، x، y لەر قانائەتلەندۈرىدىغان مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى بىۋاسىتە تۇرغۇزۇش ئاسان ئەمەس.

بۇ مەسىلىگە باشقا بىر تۇرغۇدىن قاراپ باقايلى.

فىزىكا بىلىملىرىگە ئاساسلانغاندا، ماددىي ئەشيانى ئايروپىلان بۆلمىسىدىن تاشلىغاندىن كېيىن، ئۇنىڭ ھەرىكىتى تۆۋەندىكى ئىككى خىل ھەرىكەتنىڭ بىرىكمىسى بولىدۇ:

Ox نىڭ يۆنىلىشىدە 100m/s تېزلىك بىلەن قىلىنىدىغان تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت؛

Oy نىڭ قارشى يۆنىلىشىدە قىلىنىدىغان ئەركىن چۈشكەن جىسىم ھەرىكىتى.

ماددىي ئەشيانى ئايروپىلان بۆلمىسىدىن تاشلىغاندىن كېيىنكى t پەيتتە، ماددىي ئەشيانىڭ گورىزونتال يۆنىلىشتىكى يۆتكىلىش مىقدارى $x=100t$، يەر يۈزىدىن ئېگىزلىكى $y=500-\frac{1}{2}gt^2$ بولىدۇ، يەنى

$$\begin{cases} x=100t, \\ y=500-\frac{1}{2}gt^2, \end{cases} \quad ①$$

بۇنىڭدىكى g ئېغىرلىق كۈچى تېزلىنىشى $(g=9.8m/s^2)$.

t نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى ئىچىدە، t نىڭ بىر قىممىتى بېرىلسە، ① گە ئاساسەن x، y نىڭ قىممىتىنى بىردىنبىر ئېنىقلاشقا بولىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، t ئېنىق بولغاندا، $M(x, y)$ نۇقتىنىڭ ئورنى بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ. مەسىلەن، $t=6\,s$ بولغاندا، $x=600\,m$، $y\approx 324m$، يەنى ماددىي ئەشيانىڭ گورىزونتال يۆتكىلىش مىقدارى 600m، ئېگىزلىكى تەخمىنەن 324m بولىدۇ.

ماددىي ئەشيا يەرگە چۈشكەندە، $y=0$ بولۇشى كېرەك، يەنى

$$500-\frac{1}{2}gt^2=0,$$

بۇنى يەشسەك $t\approx 10.10\,s$ كېلىپ چىقىدۇ. $t=10.10\,s$ نى ① گە قويساق، $x\approx 1010m$ كېلىپ چىقىدۇ. شۇڭا، ئۇچقۇچى ماددىي ئەشيانى بەلگىلەنگەن جايغىچە بولغان گورىزونتال ئارىلىقى تەخمىنەن 1010m بولغاندا تاشلىسا، تاشلانغان ماددىي ئەشيا دەل شۇ بەلگىلەنگەن جايغا چۈشىدۇ.

يۇقىرىقى بايانلاردىن بىلەلەيمىزكى، ① گە ئاساسەن، ماددىي ئەشيانىڭ تاشلانغاندىن كېيىنكى ھەر بىر پەيتتىكى ئورنىنى ھەم ماددىي ئەشيانى تاشلاش پەيتىنىمۇ ئېنىقلاشقا بولىدۇ.

ئومۇمەن، تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، ئەگەر ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى x، y بولۇپ، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسى مەلۇم بىر ئۆزگەرگۈچى

سان t نىڭ فۇنكسىيىسى، يەنى

$$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t)\end{cases} \quad ②$$

بولسا ھەم t نىڭ ھەربىر يول قويۇلىدىغان قىممىتىگە نىسبەتەن، تەڭلىمىلەر سىستېمىسى ② گە ئاساسەن ئېنىقلىنىدىغان $M(x, y)$ نۇقتا ھامان مۇشۇ ئەگرى سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتسا، ئۇ ھالدا تەڭلىمىلەر سىستېمىسى ② بۇ ئەگرى سىزىقنىڭ **پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى** دەپ ئاتىلىدۇ، ئۆزگەرگۈچى سان x، y نى باغلاپ تۇرىدىغان ئۆزگەرگۈچى سان t **پارامېتىرلىق ئۆزگەرگۈچى سان**، قىسقىچە **پارامېتىر** دەپ ئاتىلىدۇ. پارامېتىرلىق تەڭلىمىگە سېلىشتۇرۇپ ئېيتقاندا، نۇقتىنىڭ كوئوردىناتلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت بىۋاسىتە بېرىلگەن تەڭلىمە **ئادەتتىكى تەڭلىمە** دېيىلىدۇ.

پارامېتىر ئۆزگەرگۈچى سان x، y لەرنى تۇتاشتۇرىدىغان كۆۋرۈك بولۇپ، ئۇ فىزىكىلىق مەنىگە ياكى گېئومېتىرىيىلىك مەنىگە ئىگە ئۆزگەرگۈچى سان بولسىمۇ، ياكى روشەن ئەمەلىي مەنىگە ئىگە بولمىغان ئۆزگەرگۈچى سان بولسىمۇ بولۇۋېرىدۇ.

1 ـ مىسال. ئەگرى سىزىق C نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى $\begin{cases}x=3t,\\ y=2t^2+1\end{cases}$ (t پارامېتىر) ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $M_1(0, 1)$, $M_2(5, 4)$ نۇقتىلار بىلەن ئەگرى سىزىق C نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلايلى؛

(2) $M_3(6, a)$ نۇقتىنىڭ ئەگرى سىزىق C ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، a نىڭ قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: (1) M_1 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (0, 1) نى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا قويۇپ يەشسەك، $t=0$ كېلىپ چىقىدۇ، شۇڭا M_1 نۇقتا ئەگرى سىزىق C نىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ.

M_2 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (5, 4) نى تەڭلىمىلەر سىستېمىسىغا قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases}5=3t,\\ 4=2t^2+1,\end{cases}$$

بۇ تەڭلىمىلەر سىستېمىسى يېشىمگە ئىگە ئەمەس، شۇڭا M_2 نۇقتا ئەگرى سىزىق C نىڭ ئۈستىدە ياتمايدۇ.

(2) $M_3(6, a)$ نۇقتا ئەگرى سىزىق C نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن،

$$\begin{cases}6=3t,\\ a=2t^2+1\end{cases}$$

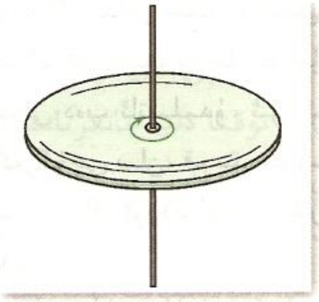
بولىدۇ، بۇنى يەشسەك $t=2$، $a=9$ كېلىپ چىقىدۇ.

شۇڭا $a=9$.

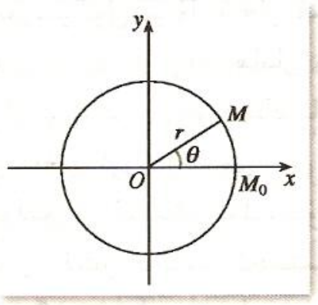
2. چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

چەمبەر بويىلما ھەرىكەت ئىشلەپچىقىرىش ۋە تۇرمۇشتا كۆپ ئۇچرايدۇ. جىسىم مۇقىم ئوقنى چۆرى-

دەپ تەكشى تېزلىك بىلەن ئايلانغاندا، جىسىمدىكى ھەرقايسى نۇقتىلارمۇ چەمبەر بويلىما تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ (3.2 ـ رەسىم). ئۇنداق بولسا، ھەرىكەتتىكى نۇقتىنىڭ ئورنىنى قانداق سۈرەتلەش كېرەك؟



3.2 ـ رەسىم



4.2 ـ رەسىم

4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، O چەمبەرنىڭ رادىئۇسىنى r دەپ ئالايلى ھەم M نۇقتا دەسلەپكى ئورنى M_0 ($t=0$ بولغاندىكى ئورنى) دىن چىقىپ، سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى بويىچە O چەمبەر ئۈستىدە چەمبەر بويلىما تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ، M نۇقتىنىڭ O نۇقتىنى چۆرىدەپ ئايلانغاندىكى بۇلۇڭلۇق تېزلىكى ω بولىدۇ دەپ پەرەز قىلايلى. ئاندىن چەمبەر مەركىزى O نى كوئوردىنات بېشى، OM_0 ياتقان تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق، روشەنكى، M نۇقتىنىڭ ئورنى t پەيت تەرىپىدىن بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ، شۇڭا t نى پارامېتىر قىلىپ ئېلىشقا بولىدۇ.

ئەگەر M نۇقتىنىڭ t پەيتتىكى ئايلىنىپ ئۆتكەن بۇلۇڭى θ بولۇپ، كوئوردىناتى $M(x, y)$ بولسا، ئۇ ھالدا $\theta = \omega t$ بولىدۇ. $|OM|=r$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\cos\omega t=\frac{x}{r},\ \ \sin\omega t=\frac{y}{r},$$

يەنى

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t, \\ y = r\sin\omega t. \end{cases}$$ (t پارامېتىر)

مانا بۇ، مەركىزى كوئوردىنات بېشى O دا ياتقان ھەم رادىئۇسى r بولغان چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدۇر. بۇنىڭدىكى پارامېتىر t روشەن فىزىكىلىق مەنىگە ئىگە (ماددىي نۇقتا چەمبەر بويلىما تەكشى ھەرىكەت قىلغاندىكى پەيت).

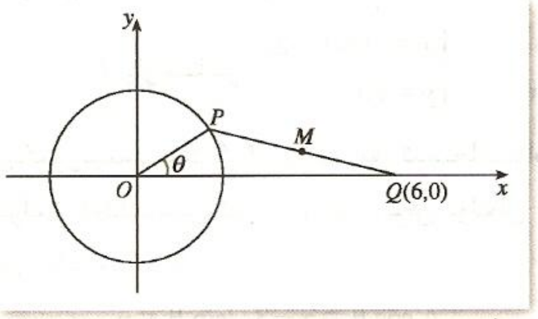
$\theta = \omega t$ بولىدىغانلىقىنى ئويلاشساق، θ نىمۇ پارامېتىر قىلىپ ئېلىشقا بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. شۇنىڭ بىلەن:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$ (θ پارامېتىر)

بۇمۇ مەركىزى كوئوردىنات بېشى O دا ياتقان ھەم رادىئۇسى r بولغان چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى بولىدۇ. بۇنىڭدىكى پارامېتىر θ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى OM_0 نۇقتا O نى چۆرىدەپ سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ تەتۈر يۆنىلىشى بويىچە ئايلىنىپ OM نىڭ ئورنىغا كەلگەندە، OM_0 ئايلىنىپ ئۆتكەن بۇلۇڭ گرادۇسىدىن ئىبارەت.

تاللاپ ئېلىنىدىغان پارامېتىرلارنىڭ ئوخشاش بولماسلىقى تۈپەيلىدىن، چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىلىرىنىڭ كۆرۈنۈشىمۇ ئوخشاش بولمايدۇ. ئومۇمەن، ئوخشاش بىر ئەگرى سىزىققا نىسبەتەن، ئوخشاش بولمىغان ئۆزگەرگۈچى سانلارنى پارامېتىر قىلىپ تاللاشقا بولىدۇ، شۇڭا كېلىپ چىققان پارامېتىرلىق تەڭلىمىلەرنىڭ كۆرۈنۈشىمۇ ئوخشاش بولمايدۇ. ھالبۇكى، كۆرۈنۈشى ئوخشاش بولمىغان پارامېتىرلىق تەڭلىمىلەر ئىپادىلىگەن ئەگرى سىزىق ئوخشاش بولۇشى مۇمكىن. ئۇنىڭدىن باشقا، ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزغاندا، پارامېتىرنى ۋە پارامېتىرنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى ئەسكەرتىش كېرەك.

2 ـ مىسال. 5.2 ـ رەسىمدىكىدەك، O چەمبەرنىڭ رادىئۇسى 2 بولۇپ، P نۇقتا چەمبەر ئۈستىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا، $Q(6,0)$ نۇقتا x ئوق ئۈستىدىكى مۇقىم نۇقتا، M بولسا PQ نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. P نۇقتا O نى چۆرىدەپ چەمبەر بويلىما تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



5.2 ـ رەسىم

تەھلىل: $\angle xOP=\theta$ نى پارامېتىر قىلىپ ئالساق، ئۇ ھالدا O چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta \text{ پارامېتىر})$$

θ ئۆزگەرگەندە، ھەرىكەتچان نۇقتا P مۇقىم چەمبەر O ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدۇ ـ دە، PQ كېسىكمۇ ئۇنىڭغا ئەگىشىپ ئۆزگىرىپ، M نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىدۇ. شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىنى θ بۇلۇڭ بەلگىلەيدۇ دەپ قاراشقا بولىدۇ. دېمەك، بۇ يەردە θ نى پارامېتىر قىلىپ تاللىساق مۇۋاپىق بولىدۇ.

يېشىش: M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلىپ، $\angle xOP=\theta$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ بولىدۇ. ئوتتۇرا نۇقتىنىڭ كوئوردىنات فورمۇلىسىغا ئاساسەن:

$$x=\frac{2\cos\theta+6}{2}=\cos\theta+3, \quad y=\frac{2\sin\theta}{2}=\sin\theta .$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases} x=\cos\theta+3, \\ y=\sin\theta. \end{cases} \quad (\theta \text{ پارامېتىر})$$

مۇلاھىزە

بۇ يەردىكى مۇقىم نۇقتا Q چەمبەر O نىڭ سىرتىدا ياتىدۇ، سىز بۇ ترايېكتورىيىنىڭ قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلالامسىز؟ ئەگەر مۇقىم نۇقتا Q چەمبەر O نىڭ ئۈستىدە ياتسا، ئۇنىڭ ترايېكتورىيىسى قانداق بولىدۇ؟ ئەگەر مۇقىم نۇقتا Q چەمبەر O نىڭ ئىچىدە ياتسىچۇ؟

3. پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن ئادەتتىكى تەڭلىمىنى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇش

يۇقىرىقى مىسالدا، پارامېتىرلىق تەڭلىمە

$$\begin{cases} x=\cos\theta+3, \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ پارامېتىر})$$

گە ئاساسەن M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ ئەگرى سىزىق تىپىغا بىۋاسىتە ھۆكۈم قىلىش ئاسان ئەمەس، بىراق، ئەگەر پارامېتىرلىق تەڭلىمىنى ئۆزىمىزگە تونۇش بولغان ئادەتتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇۋالساق، يەنى پارامېتىرلىق تەڭلىمىگە ئاساسەن:

$$\cos\theta=x-3,\quad \sin\theta=y$$

نى كەلتۈرۈپ چىقارساق، ئۇ ھالدا:

$$(x-3)^2+y^2=1.$$

شۇنىڭ بىلەن، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى مەركىزى $(3, 0)$ نۇقتىدا ياتقان ھەم رادىئۇسى 1 بولغان چەمبەر بولىدىغانلىقىنى ئاسانلا ئېرىشەلەيمىز.

ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى ئادەتتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇۋالساق، ئەگرى سىزىقنىڭ تىپىنى پەرقلەندۈرۈشىمىزگە ئاسانلىق تۇغۇلىدۇ.

ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى بىلەن ئادەتتىكى تەڭلىمىسى ئەگرى سىزىق تەڭلىمىسىنىڭ ئوخشاش بولمىغان كۆرۈنۈشلىرىدىن ئىبارەت. ئادەتتە، پارامېتىرنى يوقىتىش ئارقىلىق پارامېتىرلىق تەڭلىمىدىن ئادەتتىكى تەڭلىمىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. ئەگەر ئۆزگەرگۈچى سان x، y لەرنىڭ بىرى پارامېتىر t نىڭ مۇناسىۋىتىنى، مەسىلەن، $x=f(t)$ ئىكەنلىكىنى بىلسەك، بۇنى ئادەتتىكى تەڭلىمىگە قويۇش ئارقىلىق يەنە بىر ئۆزگەرگۈچى سان بىلەن پارامېتىرنىڭ مۇناسىۋىتى $y=g(t)$ نى تاپالايمىز - دە، بۇ چاغدا

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases}$$

ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى بولىدۇ.

پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن ئادەتتىكى تەڭلىمىنى بىر - بىرىگە ئايلاندۇرۇشتا، x، y لەرنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى چوقۇم بىردەك بولۇشى كېرەك.

3 - مىسال. تۆۋەندىكى پارامېتىرلىق تەڭلىمىلەرنى ئادەتتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇپ، ھەم ئۇلار-

نىڭ ھەربىرى قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى چۈشەندۈرەيلى:

(1) $\begin{cases} x=\sqrt{t}+1, \\ y=1-2\sqrt{t}; \end{cases}$ (پارامېتىر t)　　(2) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta, \\ y=1+\sin 2\theta. \end{cases}$ (پارامېتىر θ)

يېشىش: (1) $x=\sqrt{t}+1\geqslant 1$ گە ئاساسەن:

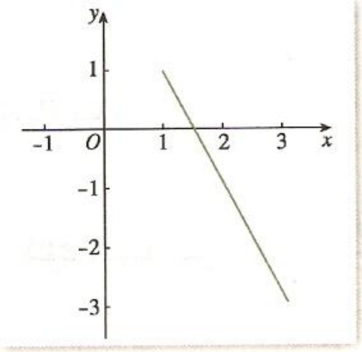
$$\sqrt{t}=x-1,$$

بۇنى $y=1-2\sqrt{t}$ غا قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$y=-2x+3.$$

يەنە $x=\sqrt{t}+1\geqslant 1$ بولغانلىقتىن، پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولغان ئادەتتىكى تەڭلىمە تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$y=-2x+3\ (x\geqslant 1).$$

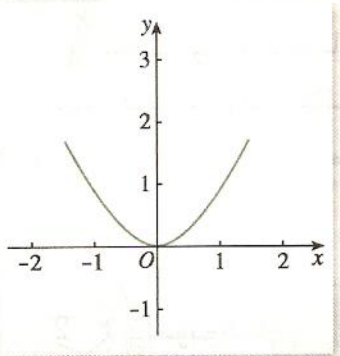


6.2 ـ رەسىم

بۇ، (1, 1) نۇقتىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان بىر نۇردىن ئىبارەت (ئۇچ نۇقتىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) (6.2 ـ رەسىم).

(2) $x=\sin\theta+\cos\theta$ نى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئۇنىڭدىن $y=1+\sin 2\theta$ نى ئالساق:

$$x^2=y,$$



7.2 ـ رەسىم

يەنە $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ بولغانلىقتىن، $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ بولىدۇ.

شۇڭا، پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولغان ئادەتتىكى تەڭلىمە تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2=y,\ x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

بۇ، پارابولانىڭ بىر قىسمىدىن ئىبارەت (7.2 ـ رەسىم).

4 ـ مىسال. ئېللىپس $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تاپايلى:

(1) $x=3\cos\varphi$، φ بولسا پارامېتىر دەپ پەرەز قىلايلى؛

(2) $y=2t$، t بولسا پارامېتىر دەپ پەرەز قىلايلى.

يېشىش: (1) $x=3\cos\varphi$ نى ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىگە قويساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\frac{9\cos^2\varphi}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

شۇنىڭ بىلەن

$$y^2=4(1-\cos^2\varphi)=4\sin^2\varphi,$$

يەنى

$$y=\pm 2\sin\varphi.$$

پارامېتىر φ نىڭ ئىختىيارلىقىغا ئاساسەن، $y=2\sin\varphi$ دەپ ئېلىشقا بولىدۇ. شۇڭا، ئېللىپس

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi.\end{cases}$$ (φ پارامېتىر)

(2) $y=2t$ نى ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىگە قويساق،

$$\frac{x^2}{9}+\frac{4t^2}{4}=1,$$

شۇنىڭ بىلەن

$$x^2=9(1-t^2),\ x=\pm3\sqrt{1-t^2}\ .$$

شۇڭا، ئېللىپس $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=3\sqrt{1-t^2},\\ y=2t,\end{cases}$$ (t پارامېتىر) ۋە $$\begin{cases}x=-3\sqrt{1-t^2},\\ y=2t.\end{cases}$$ (t پارامېتىر)

مۇلاھىزە

نېمە ئۈچۈن 4 ـ مىسالنىڭ (2) تارمىقىدا ئىككى پارامېتىرلىق تەڭلىمنى بىرلەشتۈرگەندە ئاندىن ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى كېلىپ چىقىدۇ؟

1 . 2 ـ كۆنۈكمە

1. بىر قۇتقۇزۇش ئايروپىلانى گورىزونتال تۈز سىزىقنى بويلاپ 100m/s تېزلىك بىلەن ئۇچۇپ، ئاپەت رايونىدىكى بەلگىلەنگەن نىشانغىچە بولغان گورىزونتال ئارىلىقى 1000m بولغاندا قۇتقۇزۇش ماددىي ئەشياسىنى تاشلىغان (ھاۋانىڭ قارشىلىق كۈچى ھېسابقا ئېلىنمايدۇ، ئېغىرلىق كۈچى تېزلىنىشى $g=9.8m/s^2$ بولسا، بۇ چاغدا ئايروپىلاننىڭ ئۇچۇش ئېگىزلىكى تەخمىنەن قانچىلىك (1m غىچە ئېنىقلىقتا)؟

2. ھەرىكەتچان نۇقتا M تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ، ئۇنىڭ x ئوق ۋە y ئوق يۆنىلىشىدىكى تەشكىل قىلغۇچى تېزلىكى ئايرىم ـ ئايرىم 3m/s ۋە 4m/s بولۇپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنىڭ ئۇزۇنلۇق بىرلىكى 1m، M نۇقتىنىڭ دەسلەپكى ئورنى M_0 (2, 1) نۇقتىدا بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. M بولسا مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ ABC غا سىرتتىن تېگىشكەن چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2$ نىڭ مۇقىم قىممەت بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

4. تۆۋەندىكى پارامېتىرلىق تەڭلىمىلەرنى ئادەتتىكى تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇڭ ھەم ئۇلارنىڭ ھەربىرى قانداق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-1-4t; \end{cases}$ (پارامېتىر t)　　(2) $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\cos2\theta+1; \end{cases}$ (پارامېتىر θ)

(3) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t}, \\ y=t-\dfrac{1}{t}; \end{cases}$ (پارامېتىر t)　　(4) $\begin{cases} x=5\cos\varphi, \\ y=3\sin\varphi; \end{cases}$ (پارامېتىر φ)

5. بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، ئەگرى سىزىقنىڭ ئادەتتىكى تەڭلىمىسىنى پارامېتىرلىق تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇڭ:

(1) $y^2-x-y-1=0$ ، $y=t-1$ ، t بولسا پارامېتىر دەپ پەرەز قىلىڭ؛

(2) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ ، $x=a\cos^4\varphi$ ، φ بولسا پارامېتىر دەپ پەرەز قىلىڭ.

Ⅱ كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

1. ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

ئالدىنقى پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 4 ـ مىسالدىكى ئۇسۇلغا تەقلىد قىلىپ، بىز ئېللىپس $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ نىڭ تۆۋەندىكىدەك بىر پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىگە ئېرىشەلەيمىز:

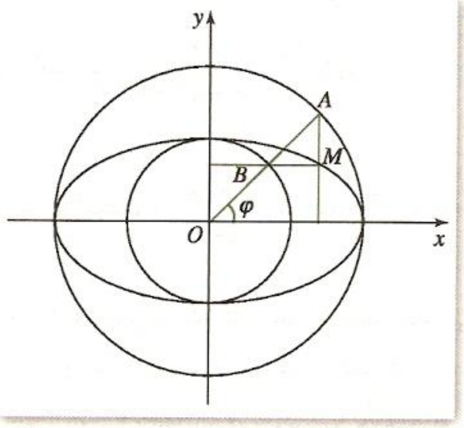
$$\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases} \quad (\text{پارامېتىر } \varphi) \qquad ①$$

بۇ، مەركىزى كوئوردىنات بېشى O دا، فوكۇسى x ئوقتا ياتقان ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدۇر.

مۇلاھىزە

چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ مەنىسىگە تەققاسلىساق، ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ① دىكى پارامېتىر φ نىڭ مەنىسى نېمە بولىدۇ؟

8.2 ـ رەسىمدىكىدەك، كوئوردىنات بېشى O نى مەركەز، a ، b $(a>b>0)$ لارنى رادىئۇس قىلىپ ئايرىم ـ ئايرىم ئىككى مەركەزداش چەمبەر سىزايلى. A نى چوڭ چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، O بىلەن A نى تۇتاشتۇرساق، ئۇ كىچىك چەمبەر بىلەن B نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ئاندىن A ، B نۇقتىلار ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم x ، y ئوقلارغا تىك يۈرگۈزسەك، ئىككى تىك سىزىق M نۇقتىدا كېسىشىدۇ.



8.2 - رەسىم

Ox نى باش تەرەپ، OA نى ئاخىرقى تەرەپ قىلغان بۇلۇڭنى φ دەپ، M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا A نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x، B نۇقتىنىڭ ئوردىناتى y بولىدۇ. A، B نۇقتىلارنىڭ ھەر ئىككىسى φ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپىدە ياتىدىغانلىقتىن، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$x=|OA|\cos\varphi=a\cos\varphi,$$
$$y=|OB|\sin\varphi=b\sin\varphi.$$

OA رادىئۇس O نۇقتىنى چۆرىدەپ بىر قېتىم ئايلانسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى كېلىپ چىقىدۇ، ئۇنىڭ پارامېترلىق تەڭلىمىسى:

$$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi.\end{cases} \quad (\varphi \text{ پارامېتىر})$$

ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ φ ئۆزگەرگەندىكى ھالىتىنى تەكشۈرۈشكە بولىدۇ.

بۇ، مەركىزى كوئوردىنات بېشى O دا، فوكۇسى x ئوقتا ياتقان ئېللىپستىن ئىبارەت.

ئېللىپسنىڭ پارامېترلىق تەڭلىمىسى ① دە، φ پارامېترنىڭ دائىرىسىنى ئادەتتە $\varphi\in[0, 2\pi]$ قىلىپ بەلگىلىۋالىمىز.

مۇلاھىزە

ئېللىپسنىڭ پارامېترلىق تەڭلىمىسى ① دىكى φ پارامېترنىڭ مەنىسى بىلەن چەمبەرنىڭ پارامېترلىق تەڭلىمىسى

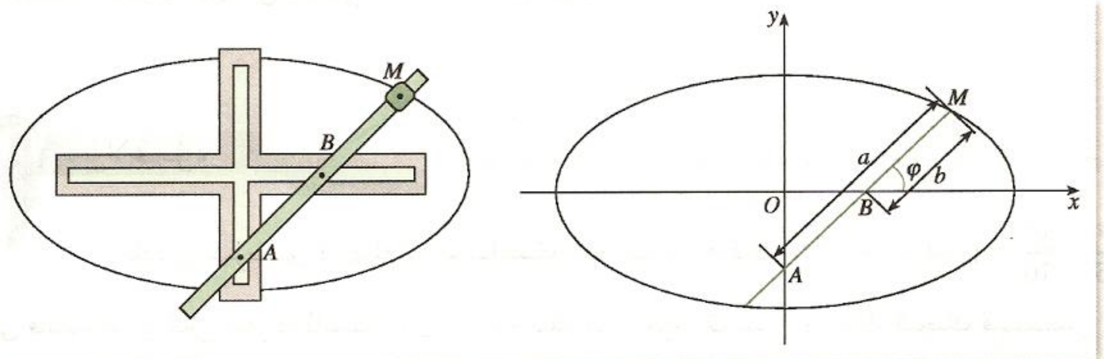
$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases} \quad (\theta \text{ پارامېتر})$$

دىكى پارامېتر θ نىڭ مەنىسى ئوخشاشمۇ؟

8.2 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، φ پارامېتىر M نۇقتىغا ماس ھالدىكى چوڭ چەمبەرنىڭ رادىئۇسى OA (ياكى كىچىك چەمبەرنىڭ رادىئۇسى OB) نىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭى (M نۇقتىنىڭ مەركەز ـ دىن قېچىش بۇلۇڭى دېيىلىدۇ) بولۇپ، ئۇ OM نىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭى ئەمەس، θ پارامېتىر بولسا رادى ـ ئۇس OM نىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭىدىن ئىبارەت.

ئىزدىنىش

ئېللىپسوگراپ ئېللىپس سىزىشتا ئىشلىتىلىدىغان بىر خىل ئەسۋاب بولۇپ، ئۇنىڭ قۇرۇلمىسى 9.2 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلدى. كرېست شەكىللىك بىر مېتال تاختىدا ئۆزئارا تىك بولغان ئىككى ئېرىقچە بار، تۈز سىزغۇچقا ئىككى سىيرىلىش پارچىسى A، B ئورنىتىلغان بولۇپ، ئۇلار ئايرىم ـ ئايرىم تىك ئېرىقچە ۋە توغرا ئېرىقچىدا سىيرىلىدۇ، تۈز سىزغۇچنىڭ M نۇقتىسىدىكى كىيدۈرمە نەيچىگە بىر قېرىنداش مۇقىملاش ـ تۇرۇلغان، تۈز سىزغۇچنى بىر قېتىم ئايلاندۇرساق، قېرىنداش ئۇچى بىر ئېللىپسنى سىزىپ چىقىدۇ. سىز ئۇنىڭ قۇرۇلمىسىنىڭ پرىنسىپىنى چۈشەندۈرەلەمسىز؟ (كۆرسەتمە: تۈز سىزغۇچ AB بىلەن توغرا ئېرىقچە ـ دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنى پارامېتىر قىلىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىش كېرەك.)



9.2 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. ئېللىپس $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ نىڭ ئۈستىدىن بىر M نۇقتىنى تاپايلى، نەتىجىدە M نۇقتى ـ دىن تۈز سىزىق $x+2y-10=0$ گىچە بولغان ئارىلىق ئەڭ كىچىك بولسۇن، ئاندىن بۇ ئەڭ كىچىك ئارى ـ لىقنى تاپايلى.

يېشىش: ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi, \\ y=2\sin\varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{ پارامېتىر})$$

بولغانلىقتىن، M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى ($3\cos\varphi$, $2\sin\varphi$) دەپ پەرەز قىلىشقا بولىدۇ.

نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئاساسەن، M نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە بول ـ غان ئارىلىق تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

1 ـ مەسىلىنى ئادەتتىكى تەڭلىمىدىن بىۋاستە پايدىلىنىپ يېشىش ھەم ئىككى ئۇسۇلنى سېلىشتۇرۇپ، پارامېتىرلىق تەڭلىمىنىڭ رولىنى ھېس قىلىڭ.

$$d=\frac{|3\cos\varphi+4\sin\varphi-10|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|5\left(\cos\varphi\cdot\frac{3}{5}+\sin\varphi\cdot\frac{4}{5}\right)-10\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|5\cos(\varphi-\varphi_0)-10|,$$

بۇنىڭدىكى φ_0 بولسا $\sin\varphi_0=\frac{4}{5}$ ، $\cos\varphi_0=\frac{3}{5}$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ.

ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\varphi-\varphi_0=0$ بولغاندا، d ئەڭ كىچىك قىممەت $\sqrt{5}$ نى ئالىدۇ. بۇ چاغدا:

$$3\cos\varphi=3\cos\varphi_0=\frac{9}{5},\ 2\sin\varphi=2\sin\varphi_0=\frac{8}{5}.$$

شۇڭا، M نۇقتا $\left(\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$ ئورۇندا بولغاندا، M نۇقتا بىلەن تۈز سىزىق $x+2y-10=0$ نىڭ ئارىلىقى ئەڭ كىچىك قىممەت $\sqrt{5}$ نى ئالىدۇ.

مۇلاھىزە

ئاددىي سىزىقلىق لايىھىلەش مەسىلىسىگە تەققاسلاپ، ھەقىقىي سان x، y لەر $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ نى قانائەتلەندۈرگەن شەرت ئاستىدا، $z=x-2y$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تاپالامسىز؟ بۇنىڭغا ئاساسەن، مۇشۇنىڭغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان قانداق مەسىلىلەرنى ئوتتۇرىغا قويۇشقا بولىدۇ؟

2. ھىپېربولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ئۈستىدە ئىزدەنگەندىكى ئۇسۇلغا تەقلىد قىلىپ، ھىپېربولا

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0) \qquad ②$$

نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرەيلى.

10.2 ـ رەسىمدىكىدەك، كوئوردىنات بېشى O نى مەركەز، a ، b $(a>0,\ b>0)$ لارنى رادىئۇس قىلىپ ئايرىم ـ ئايرىم مەركەزداش چەمبەر C_1 ، C_2 نى سىزىمىز. ئاندىن A نۇقتىنى C_1 چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، OA تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزىمىز. ئۇنىڭدىن كېيىن، A نۇقتا ئارقىلىق C_1 چەمبەرنىڭ ئۇرۇنمىسى AA' نى ئۆتكۈزسەك، ئۇ x ئوق بىلەن A' نۇقتىدا كېسىشىدۇ، C_2 چەمبەر بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى B ئارقىلىق C_2 چەمبەرنىڭ ئۇرۇنمىسى BB' نى ئۆتكۈزسەك، ئۇ OA تۈز سىزىق بىلەن B' نۇقتىدا كېسىشىدۇ. A' ، B' نۇقتىلار ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم y ئوق، x

ئوقلارنىڭ پاراللېل سىزىقى $A'M$ ۋە $B'M$ نى ئۆتكۈزسەك، ئۇلار ئۆزئارا M نۇقتىدا كېسىشىدۇ.

Ox نى باش تەرەپ، OA نى ئاخىرقى تەرەپ قىلغان بۇلۇڭنى φ دەپ، M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا A' نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(x, 0)$، B' نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (b, y) بولىدۇ.

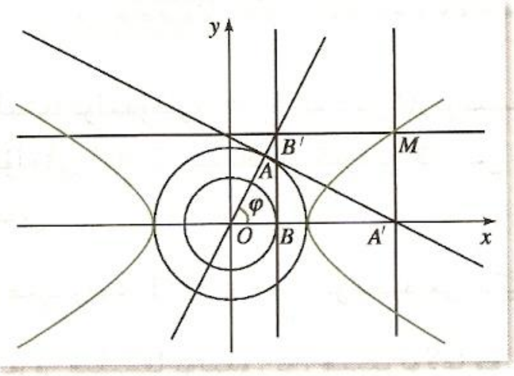
A نۇقتا C_1 چەمبەر ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، چەمبەرنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىگە ئاساسەن A نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ بولىدىغانلىقىغا ئېرىشىمىز، شۇڭا:

$$\overrightarrow{OA}=(a\cos\varphi, a\sin\varphi), \overrightarrow{AA'}=(x-a\cos\varphi, -a\sin\varphi).$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AA'}$ بولغانلىقتىن، $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$ بولىدۇ، شۇنىڭ بىلەن:

$$a\cos\varphi(x-a\cos\varphi)-(a\sin\varphi)^2=0,$$

بۇنى يەشسەك $x=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ كېلىپ چىقىدۇ.



10.2 ـ رەسىم

$\dfrac{1}{\cos\varphi}=\sec\varphi$ قىلىپ بېزىۋالساق، ئۇ ھالدا $x=a\sec\varphi$ بولىدۇ.

B' نۇقتا φ بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، تىرىگونومېتىرىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$\tan\varphi=\frac{y}{b},$$

يەنى

$$y=b\tan\varphi.$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى:

$$\begin{cases}x=a\sec\varphi,\\ y=b\tan\varphi.\end{cases}\quad (\varphi \text{ پارامېتىر})\qquad ③$$

ئۈچۈر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ φ ئۆزگەرگەندىكى ھالىتىنى تەكشۈرۈشكە بولىدۇ.

چۈنكى $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1$، يەنى

$$\sec^2\varphi - \tan^2\varphi = 1,$$

شۇڭا ③ تىن φ پارامېتىرنى يوقاتساق، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ ئادەتتىكى تەڭلىمىسى ② بولىدىغانلىقىغا ئېرىشىمىز، بۇ، مەركىزى كوئوردىنات بېشىدا، فوكۇسى x ئوقتا ياتقان ھىپېربولادىن ئىبارەت. شۇنىڭ ئۈچۈن ③ تەڭلىمە ھىپېربولا ② نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى بولىدۇ.

ھىپېربولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ③ تە، پارامېتىر φ نىڭ دائىرىسىنى ئادەتتە $\varphi \in [0, 2\pi)$ ھەمدە $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ، $\varphi \neq \frac{3\pi}{2}$ قىلىپ بەلگىلىۋالىمىز.

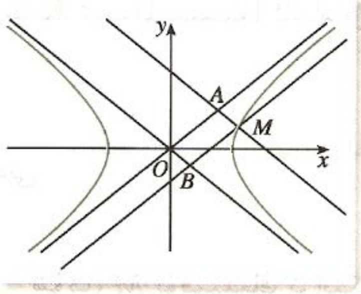
مۇلاھىزە

ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسگە تەققاسلاپ، ھىپېربولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىن قانداق يەكۈنلەرگە ئېرىشكىلى بولىدۇ؟

10.2 ـ رەسىمدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، φ پارامېتىر M نۇقتىغا ماس ھالدىكى چەمبەرنىڭ رادىئۇسى OA نىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭى (M نۇقتىنىڭ مەركەزدىن قېچىش بۇلۇڭى دېيىلىدۇ) بولۇپ، ئۇ OM نىڭ ئايلىنىش بۇلۇڭى ئەمەس.

ئېللىپستىكىگە ئوخشاش، ھىپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى $(a\sec\varphi, b\tan\varphi)$ دەپ پەرەز قىلىشقا بولىدۇ، بۇ، ھىپېربولاغا مۇناسىۋەتلىك بولغان مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشنىڭ مۇھىم ئۇسۇلىدۇر.

2 ـ مىسال. 11.2 ـ رەسىمدىكىدەك، M نۇقتىنى ھىپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$ نىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، O نۇقتىنى كوئوردىنات بېشى دەپ پەرەز قىلايلى. ئەگەر M نۇقتا ئارقىلىق ھىپېربولانىڭ ئىككى تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ پاراللېل سىزىقلىرىنى ئۆتكۈزگەندە ئۇلار ئىككى تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىق بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم A ، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشسە، پاراللېل تۆت تەرەپلىك $MAOB$ نىڭ يۈزىنى تاپايلى، بۇنىڭدىن قانداق يەكۈننى بايقاشقا بولىدۇ؟



11.2 ـ رەسىم

يېشىش: ھىپېربولانىڭ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

بۇ يەردە M نۇقتىنى ھىپېربولانىڭ ئوڭ تارمىقى ئۈستىدىكى بىر نۇقتا، ئۇنىڭ كوئوردىناتىنى $(a\sec\varphi, b\tan\varphi)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا MA تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

2 ـ مىسالنى ھىپپېربولانىڭ ئادەتتىكى تەڭلىمىسىدىن بىۋا. ستە پايدىلىنىپ يېشىپ بېقىڭ ھەم پارامېتىرلىق تەڭلىمىنىڭ رولىنى ھېس قىلىڭ.

$$y-b\tan\varphi=-\frac{b}{a}(x-a\sec\varphi). \quad ④$$

④ نى $y=\frac{b}{a}x$ كە قويۇپ يەشسەك، A نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x_A=\frac{a}{2}(\sec\varphi+\tan\varphi).$$

ئوخشاش يول بىلەن، B نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى:

$$x_B=\frac{a}{2}(\sec\varphi-\tan\varphi).$$

$\angle AOx=\alpha$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ بولىدۇ.

شۇڭا، $\square MAOB$ نىڭ يۈزى:

$$S_{\square MAOB}=|OA|\cdot|OB|\sin 2\alpha=\frac{x_A}{\cos\alpha}\cdot\frac{x_B}{\cos\alpha}\cdot\sin 2\alpha$$

$$=\frac{a^2(\sec^2\varphi-\tan^2\varphi)}{4\cos^2\alpha}\cdot\sin 2\alpha$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\tan\alpha=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{2}.$$

بۇنىڭدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، پاراللېل تۆت تەرەپلىك $MAOB$ نىڭ يۈزى ھامان مۇقىم قىممەت بولۇپ، ئۇ M نۇقتىنىڭ ھىپپېربولا ئۈستىدىكى ئورنى بىلەن مۇناسىۋەتسىز.

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسى

ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى كومپيۇتېر يۇمشاق دېتالىدىن پايدىلىنىپ كۆرسەتمىلىك ۋە ئوبرازلىق ھالدا چۈشىنىۋېلىشقا بولىدۇ ھەم بۇنىڭدىن پارامېتىرنىڭ كونتروللۇقىدىكى ئەگرى سىزىقنىڭ شەكىللىنىش جەريانىنىمۇ كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ. تۆۋەندە بىز «گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسى (几何画板)» نى مىسال قىلىپ، ئېللىپس، ھىپپېربولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسى ۋە پارامېتىرنىڭ كونتروللۇقىدىكى ئېللىپس، ھىپپېربولانىڭ شەكىللىنىش جەريانى ئۈستىدە ئىزدىنىمىز.

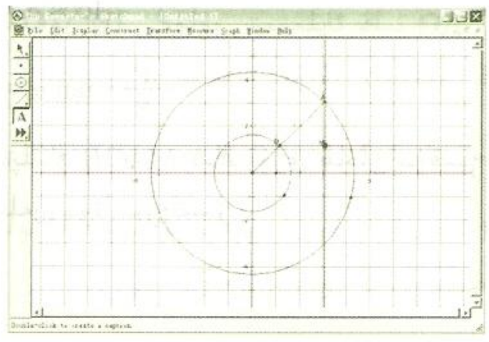
1. ئېللىپسنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسى ۋە ئېللىپسنىڭ شەكىللىنىش جەريانى ئۈستىدە ئىزدىنىش.

(1) گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسىنى ئېچىپ، «كوئوردېنات سىستېمىسىغا ئېنىقلى-

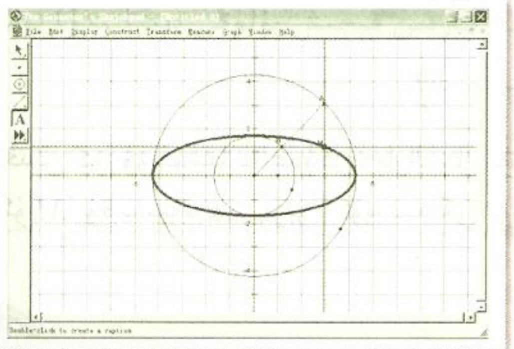
ما بېرىش/جەدۋەل ـ گرافىك (图表/定义坐标系)» نى ئىجرا قىلىمىز، كوئوردىنات بېشىنى مەركەز قىلىپ، چوڭ ـ كىچىكلىكى ئوخشاش بولمىغان ئىككى مەركەزداش چەمبەرنى چەمبەر سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ سىزىمىز؛

(2) چوڭ چەمبەر ئۈستىدىن نۇقتا سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ A نۇقتىنى ئېلىپ، چوڭ چەمبەرنىڭ رادىئۇسى OA نى سىزىق سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ سىزىمىز ھەم OA بىلەن كىچىك چەمبەرنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى B نى بەلگىلىۋالىمىز؛ A نۇقتا بىلەن x ئوقنى تەڭلا تاللاپ، «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش (构造/垂线)» نى ئىجرا قىلىمىز؛ B نۇقتا بىلەن y ئوقنى تەڭلا تاللاپ، «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ سىزىپ چىقىلغان ئىككى تىك سىزىقنى تەڭلا تاللاپ، «كېسىشىش نۇقتىسى/ھاسىل قىلىش (构造/交点)» نى ئىجرا قىلىمىز، نەتىجىدە كېسىشىش نۇقتىسى M كېلىپ چىقىدۇ (1 ـ رەسىم)؛

(3) A، M نۇقتىلارنى تەڭلا تاللاپ، «ترايېكتورىيە/ھاسىل قىلىش (构造/轨迹)» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاندىن M نۇقتىنى تاللاپ، «ئىز قوغلاش نۇقتىسى/كۆرسىتىش (显示/追踪点)» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاخىرىدا A نۇقتىنى تاللاپ، «كارتون/كۆرسىتىش (显示/动画)» نى ئىجرا قىلىمىز (2 ـ رەسىم).



1 ـ رەسىم



2 ـ رەسىم

شۇنداق قىلىپ، بىز A نۇقتا چوڭ چەمبەر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، M نۇقتىنىڭ يۆتكىلىشىدىن ئېللىپس ھاسىل بولىدىغانلىقىنى كۆرەلەيمىز. شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، پارامېتىر سۈپىتىدىكى بۇلۇڭ φ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئادەتتە OM بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشمەيدىغانلىقتىن، پارامېتىر φ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى ئوپئوچۇق ئايان بولىدۇ.

2. ھىپېربولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى ۋە ھىپېربولانىڭ شەكىللىنىش جەريانى ئۈستىدە ئىزدىنىش.

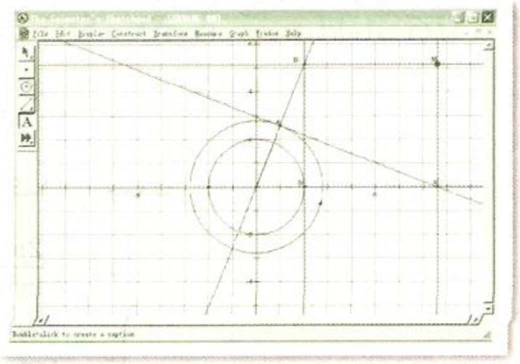
(1) گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسىنى ئېچىپ، «كوئوردىنات سىستېمىسىغا ئېنىقلىما بېرىش/جەدۋەل ـ گرافىك» نى ئىجرا قىلىمىز، ئاندىن كوئوردىنات بېشىنى مەركەز قىلىپ، چوڭ ـ كىچىكلىكى ئوخشاش بولمىغان ئىككى مەركەزداش چەمبەرنى چەمبەر سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ سىزىمىز؛

(2) چوڭ چەمبەر ئۈستىدىن نۇقتا سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ A نۇقتىنى ئېلىپ، تۈز سىزىق OA نى سىزىق سىزىش قورالىدىن پايدىلىنىپ سىزىمىز؛ OA تۈز سىزىق بىلەن A نۇقتىنى تەڭلا تاللاپ، «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز ھەم سىزىپ چىقىلغان

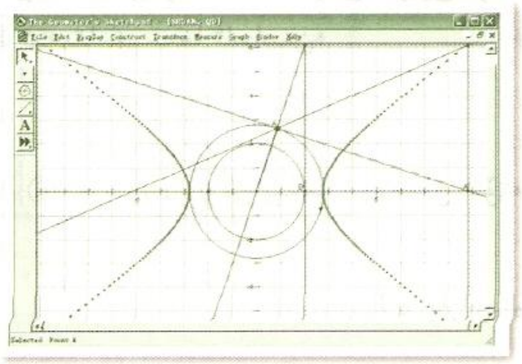
تىك سىزىق بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى A' نى بەلگىلىۋالىمىز؛ ئاندىن كىچىك چەمبەر بىلەن x ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى B نى بەلگىلەپ، B نۇقتا بىلەن x ئوقىنى تەڭلا تاللايمىز ھەم «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاخىرىدا OA تۈز سىزىق بىلەن ھېلىلا سىزىلغان تىك سىزىقنى تەڭلا تاللاپ، «كېسىشىش نۇقتىسى/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز، نەتىجىدە كېسىشىش نۇقتىسى B' كېلىپ چىقىدۇ؛

(3) A' نۇقتا بىلەن x ئوقىنى تەڭلا تاللاپ، «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاندىن B' نۇقتا بىلەن y ئوقىنى تەڭلا تاللاپ، «تىك سىزىق/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاخىرىدا، ھېلىلا سىزىلغان ئىككى تىك سىزىقنى تەڭلا تاللاپ، «كېسىشىش نۇقتىسى/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز، نەتىجىدە كېسىشىش نۇقتىسى M كېلىپ چىقىدۇ (3 ـ رەسىم)؛

(4) A ، M نۇقتىلارنى تەڭلا تاللاپ، «ترايېكتورىيە/ھاسىل قىلىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاندىن M نۇقتىنى تاللاپ، «ئىز قوغلاش نۇقتىسى/كۆرسىتىش» نى ئىجرا قىلىمىز؛ ئاخىرىدا A نۇقتىنى تاللاپ، «كارتون/كۆرسىتىش» نى ئىجرا قىلىمىز (4 ـ رەسىم).



3 ـ رەسىم



4 ـ رەسىم

شۇنداق قىلىپ، A نۇقتا چوڭ چەمبەر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، M نۇقتىنىڭ يۆتكىلىشىدىن ھېپېربولا ھاسىل بولىدۇ. ئېللىپستىكىسىگە ئوخشاش، پارامېتىر سۈپىتىدىكى بۇلۇڭ φ نىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئادەتتە OM بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشمەيدىغانلىقىنى، M نۇقتا كارتون ھەرىكىتى قىلغاندا پارامېتىر φ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى تېخىمۇ ئېنىق كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇ.

3. پارابولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

ئالدىدا، پەيت t نى پارامېتىر قىلغان پارابولانىڭ تۆۋەندىكى پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىگە ئېرىشكەنىدۇق:

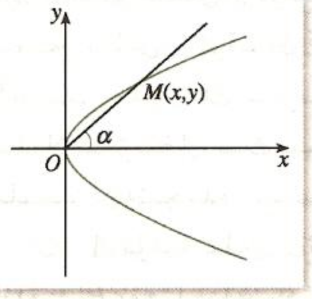
$$\begin{cases} x=100t, \\ y=500-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases} \quad \left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\dfrac{1000}{g}}\right.\ \text{پارامېتىر ھەمدە}\ \left. t\right)$$

ئادەتتىكى پارابولالارغا نىسبەتەن، ئۇلارنىڭ ماس پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەك؟

12.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پارابولانىڭ ئادەتتىكى تەڭلىمىسىنى

$$y^2=2px \quad ⑤$$

دەپ پەرەز قىلايلى، بۇنىڭدىكى p فوكۇستىن يۆنەلدۈرگۈچكىچە بولغان ئارىلىقنى ئىپادىلەيدۇ.



12.2 ـ رەسىم

$M(x, y)$ نۇقتىنى پارابولانىڭ ئۈستىدىكى چوققا نۇقتىدىن باشقا خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، OM نۇرنى ئاخىرقى تەرەپ قىلغان بۇلۇڭنى α دەپ يازايلى.

روشەنكى، α بۇلۇڭ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ئىچىدە ئۆزگەرگەندە، M نۇقتا پارابولا ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىدۇ ھەم α نىڭ ھەربىر قىممىتىگە نىسبەتەن، پارابولانىڭ ئۈستىدىكى بىردىنبىر M نۇقتا ئۇنىڭغا ماس كېلىدۇ. شۇڭا، α نى پارامېتىر قىلىپ ئېلىپ، پارابولانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ئۈستىدە ئىزدەنسەك بولىدۇ.

M نۇقتا α بۇلۇڭنىڭ ئاخىرقى تەرىپى ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ترىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha. \quad ⑥$$

⑤، ⑥ لەردىن x، y نى يېشىپ چىقساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2p}{\tan^2\alpha}, \\ y=\dfrac{2p}{\tan\alpha}. \end{cases}$$ (α پارامېتىر)

مانا بۇ، پارابولا ⑤ (چوققا نۇقتىنى ئۆز ئىچىگە ئالمايدۇ) نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىن ئىبارەت.

ئەگەر $t=\dfrac{1}{\tan\alpha}$، $t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt. \end{cases} \quad ⑦$$ (t پارامېتىر)

$t=0$ بولغاندا، پارامېتىرلىق تەڭلىمە ⑦ ئىپادىلىگەن نۇقتا دەل پارابولانىڭ چوققىسى (0, 0) بولىدۇ. شۇڭا، $t\in(-\infty,+\infty)$ بولغاندا، پارامېتىرلىق تەڭلىمە ⑦ پۈتۈن پارابولانى ئىپادىلەيدۇ. پارامېتىر t بولسا پارابولانىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا (چوققىدىن باشقا) بىلەن كوئوردىنات بېشىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقنىڭ يانتۇلۇق دەرىجىسىنىڭ ئەكس سانىنى ئىپادىلەيدۇ.

مۇلاھىزە

پارابولا $x^2=2py$ $(p>0)$ نىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تۈرغۈزۈشتا، پارامېتىرنى پارابولانىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن قانداق تاللاش كېرەك؟

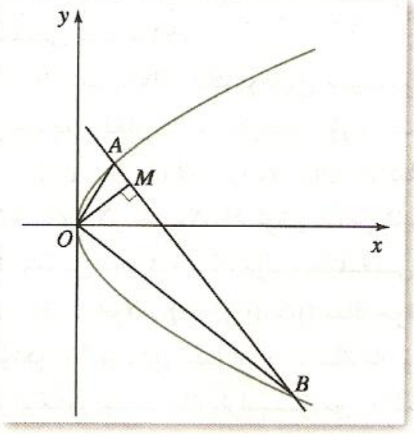
3 ـ مىسال. 13.2 ـ رەسىمدىكىدەك، O نۇقتا تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىناتنىڭ كوئوردىنات بېشى، A، B لار پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ ئۈستىدىكى چوققا نۇقتىدىن سىرت ئىككى ھەرىكەتچان نۇقتا ھەمدە $OA\perp OB$، $OM\perp AB$ (تىك ئاساسى M) بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، M، A، B نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتىنى ئايرىم ـ ئايرىم (x, y)، $(2pt_1^2,2pt_1)$، $(2pt_2^2,2pt_2)$ $(t_1\cdot t_2\neq 0$ ھەمدە $t_1\neq t_2)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\overrightarrow{OM}=(x, y),\ \ \overrightarrow{OA}=(2pt_1^2,2pt_1),$$

$$\overrightarrow{OB}=(2pt_2^2,2pt_2),$$

$$\overrightarrow{AB}=(2p(t_2^2-t_1^2),\ 2p(t_2-t_1)).$$



13.2 ـ رەسىم

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ بولغانلىقتىن، $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ بولىدۇ، يەنى

$$(2pt_1t_2)^2+(2p)^2t_1t_2=0,$$

شۇڭا

$$t_1t_2=-1 \qquad ⑧$$

$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}$ بولغانلىقتىن، $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ بولىدۇ، يەنى

$$2px(t_2^2-t_1^2)+2py(t_2-t_1)=0,$$

شۇڭا

$$x(t_1+t_2)+y=0,$$

يەنى

$$t_1+t_2=-\frac{y}{x}\ (x\neq 0). \qquad ⑨$$

$\overrightarrow{AM}=(x-2pt_1^2,\ y-2pt_1)$، $\overrightarrow{MB}=(2pt_2^2-x,\ 2pt_2-y)$ ھەمدە A، M، B ئۈچ نۇقتا سىزىقداش بولغانلىقتىن،

$$(x-2pt_1^2)(2pt_2-y)=(y-2pt_1)(2pt_2^2-x),$$

بۇنى ئاددىيلاشتۇرساق:

$$y(t_1+t_2)-2pt_1t_2-x=0. \qquad ⑩$$

⑧، ⑨ لارنى ⑩ غا قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$y\left(-\frac{y}{x}\right)+2p-x=0,$$

يەنى

$$x^2+y^2-2px=0\ (x\neq 0),$$

مانا بۇ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ تەڭلىمىسىدۇر.

ئىزدىنىش

3 ـ مىسالدا، A، B نۇقتىلار قايسى ئورۇندا بولغاندا، $\triangle AOB$ نىڭ يۈزى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟ ئەڭ كىچىك قىممىتى قانچە؟

2.2 ـ كۆنۈكمە

1. بىر يەر شارى سۈنئىي ھەمراھىنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسى ئېللىپس بولۇپ، ئۇنىڭ ئۇزۇن ئـو- قىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 15565km ، قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 15443km بولسا، ئېللىپسنىڭ مەركىزىنى كوئوردىنات بېشى قىلىپ ئېلىپ، سۈنئىي ھەمراھنىڭ ئوربىتىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر M نۇقتا (قىسقا ئوقىنىڭ ئۇچىدىن باشقا) بىلەن قىسقا ئوقىنىڭ ئىككى ئۇچى B_1، B_2 نى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىقلار x ئوق بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم P، Q ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى ھەم O نۇقتا ئېللىپسنىڭ مەركىزى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $|OP|\cdot|OQ|$ نىڭ مۇقىم قىممەت بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. ئىسپاتلاڭ: تەڭ ئوقلۇق ھېپېربولانىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىدىن ئىككى تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىققىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ كۆپەيتمىسى تۇراقلىق سان بولىدۇ.

4. A، B، C لار پارابولا $y^2=2px$ نىڭ ئۈستىدىكى ئۈچ نۇقتا ھەمدە BC بىلەن x ئوق ئۆزئارا تىك، تۈز سىزىق AB، AC لار پارابولانىڭ ئوقى بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم D، E ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. پارابولانىڭ چوققىسى DE كېسىكنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ چوققىسى O ئارقىلىق ئۆزئارا تىك بولغان خالىغان ئىككى كېسىك OA ۋە OB ئۆتكۈزۈلگەن. تۈز سىزىق OA نىڭ يانتۇلۇقى k نى پارامېتىر قىلىپ ئېلىپ، AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

Ⅲ تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى

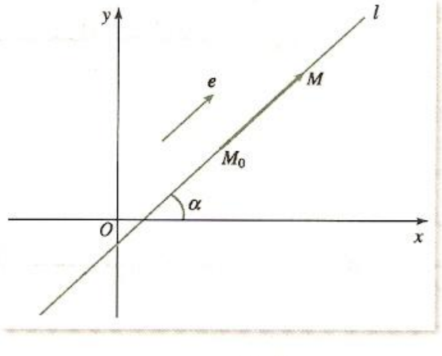
بىزگە مەلۇمكى، $M_0(x_0, y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەم يانتۇلۇق بۇلۇڭى α $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$ بولغان l تۈز سىزىقنىڭ ئادەتتىكى تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$y-y_0=\tan\alpha\,(x-x_0). \quad ①$$

l تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەك؟

14.2 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق ئۈستىدىن خالىغان بىر $M(x, y)$ نۇقتىنى ئالساق، ئۇ ھالدا:

$$\overrightarrow{M_0M}=(x, y)-(x_0, y_0)=(x-x_0, y-y_0).$$



14.2 ـ رەسىم

e نى l تۈز سىزىقنىڭ بىرلىك يۆنىلىش ۋېكتورى (بىرلىك ئۇزۇنلۇقى كوئوردېنات ئوقىنىڭ بىرلىك ئۇزۇنلۇقى بىلەن ئوخشاش بولغان يۆنىلىش ۋېكتور) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا

$$e=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ (\alpha\in[0,\pi)).$$

$\overrightarrow{M_0M}\ //\ e$ بولغانلىقتىن، $\overrightarrow{M_0M}=te$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان $t\in\mathbf{R}$ مەۋجۇت بولىدۇ، يەنى

$$(x-x_0,\ y-y_0)=t(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$

$$\therefore\ x-x_0=t\cos\alpha,\ y-y_0=t\sin\alpha$$

$$\therefore\ x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\sin\alpha\ .$$

شۇڭا، $M_0(x_0,\ y_0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەم يانتۇلۇق بۇلۇڭى α بولغان l تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}\ (\text{پارامېتىر } t)\qquad ②$$

مۇلاھىزە

$\overrightarrow{M_0M}=te$ غا ئاساسەن، l تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ② دىكى پارامېتىر t نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

$e=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ بولغانلىقتىن، $|e|=1$ بولىدۇ. $\overrightarrow{M_0M}=te$ غا ئاساسەن، $|\overrightarrow{M_0M}|=|t|$ غا ئېرىشىمىز. شۇڭا، تۈز سىزىق ئۈستىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا M دىن مۇقىم نۇقتا M_0 گىچە بولغان ئارىلىق ② ئىپادىدىكى پارامېتىر t نىڭ مۇتلەق قىممىتىگە تەڭ بولىدۇ.

$0<\alpha<\pi$ بولغاندا، $\sin\alpha>0$ بولىدۇ، شۇڭا l تۈز سىزىقنىڭ بىرلىك يۆنىلىش ۋېكتورى e نىڭ يۆنىلىشى ھامان يۇقىرىغا يۆنەلگەن بولىدۇ. بۇ چاغدا، ئەگەر $t>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{M_0M}$ نىڭ يۆنىلىشى يۇقىرىغا يۆنەلگەن بولىدۇ؛ ئەگەر $t<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{M_0M}$ نىڭ يۆنىلىشى تۆۋەنگە يۆنەلگەن بولىدۇ؛ ئەگەر $t=0$ بولسا، ئۇ ھالدا M نۇقتا بىلەن M_0 نۇقتا ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ.

1 ـ مىسال. l تۈز سىزىق: $x+y-1=0$ بىلەن پارابولا $y=x^2$ نىڭ A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن. AB كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ۋە $M(-1,\ 2)$ نۇقتىدىن A، B ئىككى نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ يىغىندىسىنى تاپايلى.

يېشىش: l تۈز سىزىق مۇقىم نۇقتا M دىن ئۆتىدىغانلىقى ھەمدە l نىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\frac{3\pi}{4}$ بولغانلىقى ئۈچۈن، ئۇنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=-1+t\cos\frac{3}{4}\pi,\\ y=2+t\sin\frac{3}{4}\pi,\end{cases}\ (\text{پارامېتىر } t)$$

يەنى

$$\begin{cases} x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$$ (t پارامېتىر)

بۇنى پارابولانىڭ تەڭلىمىسىگە قويساق:

$$t^2+\sqrt{2}\,t-2=0,$$

بۇنى يەشسەك $t_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$، $t_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$ كېلىپ چىقىدۇ.

پارامېتىر t نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىگە ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{10},$$

$$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=2.$$

ئىزدىنىش

تۈز سىزىق ② بىلەن ئەگرى سىزىق $y=f(x)$ ئۆزئارا M_1، M_2 نۇقتىلاردا كېسىشىدۇ، ماس پارامېترلار ئايرىم - ئايرىم t_1، t_2.

(1) ئەگرى سىزىقنىڭ خوردىسى M_1M_2 نىڭ ئۇزۇنلۇقى قانچىلىك؟

(2) M_1M_2 كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M غا ماس كېلىدىغان پارامېتىر t نىڭ قىممىتى قانچە؟

(3) سىز يەنە قانداق مەسىلىلەرنى ئوتتۇرىغا قويالايسىز ۋە ھەل قىلالايسىز؟

2 - مىسال. $M(2, 1)$ نۇقتا ئارقىلىق l تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، ئۇ ئېللىپس $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ئەگەر M نۇقتا دەل AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: $M(2, 1)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىقنىڭ پارامېترلىق تەڭلىمىسىنى

$$\begin{cases} x=2+t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$$ (t پارامېتىر)

دەپ پەرەز قىلىپ، ئۇنى ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىگە قويۇپ رەتلىسەك، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$(3\sin^2\alpha+1)t^2+4(\cos\alpha+2\sin\alpha)t-8=0.$$

t نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىدىن $|MA|=|t_1|$، $|MB|=|t_2|$ بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز. يەنە M

نۇقتا ئېللىپسنىڭ ئىچىدە ياتىدىغانلىقتىن، بۇ تەڭلىمە چوقۇم ئىككى ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە بولىدۇ، شۇڭا

$$t_1+t_2=-\frac{4(\cos\alpha+2\sin\alpha)}{3\sin^2\alpha+1}.$$

M نۇقتا AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولغانلىقتىن، $\frac{t_1+t_2}{2}=0$ بولىدۇ، يەنى

$$\cos\alpha+2\sin\alpha=0,$$

شۇنىڭ بىلەن l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$k=\tan\alpha=-\frac{1}{2}.$$

شۇڭا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى:

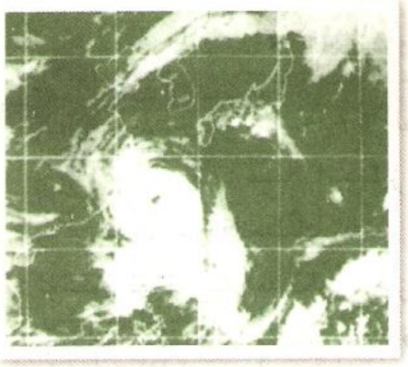
$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

يەنى

$$x+2y-4=0.$$

مۇلاھىزە

2 ـ مىسالنى يېشىش ئۇسۇلى ئادەتتىكى كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىغا ماس كېلەمدۇ؟ ئەگەر «ئوتتۇرا نۇقتا» نى «تەڭ ئۈچكە بۆلگۈچى نۇقتا» غا ئۆزگەرتسەك، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى قانداق تېپىش كېرەك؟



3 ـ مىسال. ھازىر تەيفېڭ بورىنىنىڭ مەركىزى P دېڭىز ساھىلىغا جايلاشقان مەلۇم شەھەر O نىڭ شەرق يۆنىلىشىدىكى 300km كېلىدىغان جايدا پەيدا بولدى ھەم غەربتىن شىمالغا 45° ئاغقان يۆنىلىشتە 40km/h تېزلىك بىلەن يۆتكەلدى. ئەگەر تەيفېڭ بورىنى مەركىزىگىچە ئارىلىقى 250km ئىچىدە بولغان جايلارنىڭ ھەممىسى تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربىسىگە ئۇچراش دائىرىسىگە كىرسە، ئۇ ھالدا قانچىلىك ۋاقىتتىن كېيىن بۇ شەھەر تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربىسىگە ئۇچراشقا باشلايدۇ؟

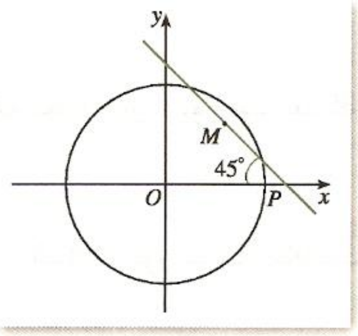
يېشىش: O نى كوئوردېنات بېشى، OP ياتقان تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزساق (15.2 ـ رەسىم)، ئۇ ھالدا P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى (300, 0) بولىدۇ.

O نى مەركەز، 250km نى رادىئۇس قىلىپ O چەمبەرنى سىزساق، تەيفېڭ بورىنى مەركىزىنىڭ يۆتكەلگەندىن كېيىنكى ئورنى M چەمبەر O نىڭ ئىچىدە ياكى چەمبەر O نىڭ ئۈستىدە بولغاندا، O شەھەر تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربىسىگە ئۇچرايدۇ.

O چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2+y^2=250^2.$$

t ۋاقىتتىن كېيىن تەيفېڭ بورىنى مەركىزى M نىڭ كوئوردېناتى (x, y) بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، تەيفېڭ بورىنى مەركىزى M نىڭ يۆتكىلىشىدىن ھاسىل بولغان l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ:



15.2 ـ رەسىم

$$\begin{cases} x = 300+40t\cdot\cos135^\circ, \\ y = 40t\cdot\sin135^\circ, \end{cases} \quad (t \text{ پارامېتىر، } t\geqslant 0)$$

يەنى

$$\begin{cases} x = 300-20\sqrt{2}t, \\ y = 20\sqrt{2}t. \end{cases} \quad (t \text{ پارامېتىر، } t\geqslant 0)$$

$M(300-20\sqrt{2}\,t, 20\sqrt{2}\,t)$ نۇقتا O چەمبەر ئىچىدە ياكى O چەمبەر ئۈستىدە بولغاندا، تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$(300-20\sqrt{2}\,t)^2+(20\sqrt{2}\,t)^2\leqslant 250^2,$$

يەنى

$$16t^2-120\sqrt{2}\,t+275\leqslant 0,$$

بۇنى يەشسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leqslant t\leqslant\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4},$$

ھېسابلىغۇچتا ھېسابلىساق، t نىڭ دائىرىسى تەخمىنەن تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىغا ئېرىشىمىز:

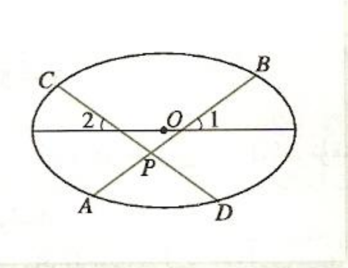
$$2.0\leqslant t\leqslant 8.6.$$

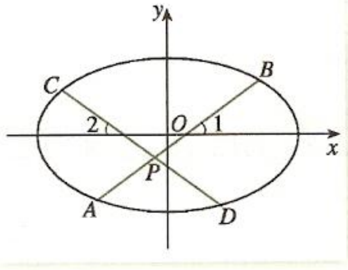
شۇڭا، تەخمىنەن 2h تىن كېيىن، بۇ شەھەر تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربىسىگە ئۇچراشقا باشلايدۇ.

مۇلاھىزە

3 ـ مىسالدا، دېڭىز ساھىلىغا جايلاشقان شەھەر O نىڭ تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربىسىگە ئۇچرىشى تەخمىنەن قانچىلىك ۋاقىت داۋاملىشىدۇ؟ ئەگەر تەيفېڭ بورىنىنىڭ زەربە بېرىش دائىرىسىنىڭ رادىئۇسىمۇ ئۆزگەرسە (مەسىلەن، ھازىرقى رادىئۇسى 250km بولۇپ، ئۇ 10km/h تېزلىك بىلەن ئۆزلۈكسىز چوڭايسا)، ئۇ ھالدا بۇ مەسىلىنى قانداق ھەل قىلىش كېرەك؟

4 ـ مىسال. 16.2 ـ رەسىم (1) دىكىدەك، AB، CD لار مەركىزى O نۇقتىدا ياتقان ئېللىپسنىڭ ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى خوردىسى بولۇپ، ئۇلارنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى P. ئەگەر AB، CD ئىككى خوردا بىلەن ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن ئوقىنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئايرىم ـ ئايرىم $\angle 1$، $\angle 2$ ھەمدە $\angle 1=\angle 2$ بولسا، $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$ نى ئىسپاتلايلى.





16.2 ـ رەسىم

ئىسپات: 16.2 ـ رەسىم (2) دىكىدەك تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئايرىم ـ ئايرىم $2a$، $2b$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ③$$

$\angle 1=\theta$ ھەم P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x_0, y_0) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا AB تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta.\end{cases} \quad (t \text{ پارامېتىر}) \qquad ④$$

④ نى ③ كە قويۇپ رەتلىسەك، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2+2(b^2x_0\cos\theta+a^2y_0\sin\theta)t+(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)=0. \qquad ⑤$$

$b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta\neq 0$ بولغانلىقتىن ھەم AB تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپسنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بار ئىكەنلىكى بېرىلگەنلىكتىن، ⑤ تەڭلىمە ئىككى يىلتىزغا ئىگە بولىدۇ، بۇ ئىككى يىلتىزنى ئايرىم ـ ئايرىم t_1، t_2 دەپ پەرەز قىلساق، تۆۋەندىكىگە ئاسانلا ئېرىشىمىز:

$$|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=\left|\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\right|. \qquad ⑥$$

ئوخشاش يول بىلەن، CD تۈز سىزىققا نىسبەتەن، θ نىڭ ئورنىغا $\pi-\theta$ نى ئالماشتۇرساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$|PC|\cdot|PD|=\left|\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2(\pi-\theta)+a^2\sin^2(\pi-\theta)}\right|$$

$$=\left|\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\right|. \qquad ⑦$$

⑥، ⑦ لەرگە ئاساسەن، $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$.

ئەگەر بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە $ax^2+bx+c=0$ نىڭ ئىككى يىلتىزى x_1، x_2 بولسا، ئۇ ھالدا $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ بولىدۇ.

ئىزدىنىش

ئەگەر ئېللىپسنى ھىپېربولاغا ئۆزگەرتسەك، يەنىلا يۇقىرىقىدەك يەكۇن كېلىپ چىقامدۇ؟

2 . 3 ـ كۆنۈكمە

1 . l تۈز سىزىق $M_0(1, 5)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ ھەم ئۇنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $\frac{\pi}{3}$ دەپ پەرەز قىلىنغان بولسا:

(1) l تۈز سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ؛

(2) تۈز سىزىق l بىلەن $x-y-2\sqrt{3}=0$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن M_0 نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ؛

(3) l تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر $x^2+y^2=16$ نىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسىدىن M_0 نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلار ـ نىڭ يىغىندىسى ۋە كۆپەيتمىسىنى تېپىڭ.

2 . $P(2, 0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇقى $\frac{4}{3}$ بولغان تۈز سىزىق بىلەن پارابولا $y^2=2x$ نىڭ A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن. AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنى M دەپ پەرەز قىلىپ، M نۇقتىنىڭ كوئور ـ دېناتىنى تېپىڭ.

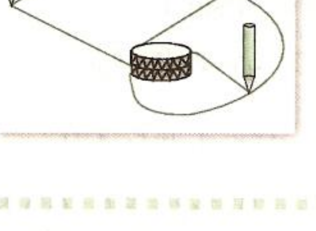
3 . $M(2, 1)$ نۇقتا ئارقىلىق ئۆتكۈزۈلگەن تۈز سىزىق ھىپېربولا $x^2-y^2=1$ بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ئەگەر M نۇقتا AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، AB تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4 . پارابولا $y^2=2px\,(p>0)$ نىڭ سىرتىدىكى بىر $A(-2,-4)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە يانتۇلۇق بۇلۇڭى $45°$ بولغان l تۈز سىزىق بۇ پارابولا بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم M_1، M_2 نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ئەگەر $|AM_1|$، $|M_1M_2|$، $|AM_2|$ لەر تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزسە، p نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

Ⅳ تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق ۋە سىكلوئىدا

1. تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق

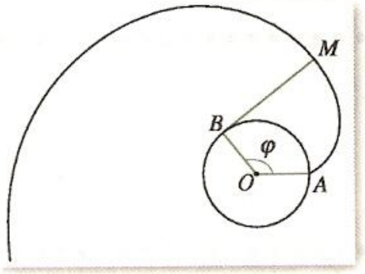
ئىزدىنىش



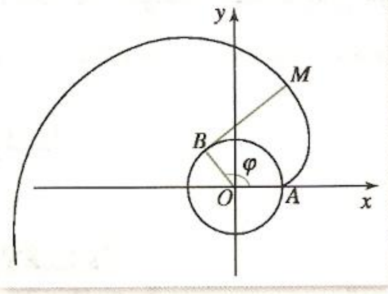
ئېلاستىكلىقى بولمىغان بىر ئىنچىكە يىپنى بىر دىسكىغا يۆگەپ، يىپنىڭ سىرتقى ئۇچىغا بىر قېرىنداشنى باغلايمىز، ئاندىن يىپنى چىڭ تارتىپ، ئۇنى چەمبەر بىلەن ئۆزئارا ئۇرۇنغان ھالەتتە تەدرىجىي يايساق، قېرىنداش ئۇچى بىر ئەگرى سىزىقنى سىزىپ چىقىدۇ. ئۇنداق بولسا، بۇ ئەگرى سىزىقنىڭ شەكلى قانداق بولىدۇ؟ ئۇنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىپ چىقىشقا بولامدۇ؟

بىز ئالدى بىلەن ھەرىكەتچان نۇقتا (قېرىنداش ئۇچى) قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرت ـ نى تەھلىل قىلايلى. 2 . 17 ـ رەسىمدىكىدەك، يىپنىڭ سىرتقى ئۇچى (قېرىنداش ئۇچى) نىڭ دەسلەپكى

ئورنىنى A نۇقتىدا دەپ پەرەز قىلساق، سىرتقى ئۇچ يېيىلىپ M نۇقتىغا كەلگەندە، يىپنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭ φ (بىرلىكى رادىئان) نىڭ قارشىسىدىكى ياي بۆلىكى $\widehat{AB}$ يېيىلغاندىن كېيىن BM ئورۇنىغا ئۆزگىرىدۇ، شۇڭا BM ئورۇنىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\widehat{AB}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ بولىدۇ، مانا بۇ، ھەرىكەتچان نۇقتا (قېرىنداش ئۇچى) قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتتۇر. بىز قېرىنداش ئۇچى سىزىپ چىققان ئەگرى سىزىقنى چەمبەرنىڭ **تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقى**، ئۇنىڭغا ماس ھالدىكى مۇقىم چەمبەرنى تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقنىڭ **ئاساس چەمبىرى** دەپ ئاتايمىز.



17.2 ـ رەسىم



18.2 ـ رەسىم

ھەرىكەتچان نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، ئاساس چەمبەرنىڭ مەركىزى O نى كوئوردىنات بېشى، OA تۈز سىزىقنى x ئوق قىلىپ تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز. (18.2 ـ رەسىم). ئاندىن ئاساس چەمبەرنىڭ رادىئۇسىنى r، يىپنىڭ سىرتقى ئۇچى M نىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، روشەنكى، M نۇقتا φ بۇلۇڭ تەرىپىدىن بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ.

> ھەرىكەتچان نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، چەمبەرنىڭ تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقنى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ سىزىڭ.

φ نى پارامېتىر قىلىپ ئالساق، ئۇ ھالدا B نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ بولىدۇ ـ دە، شۇنىڭ بىلەن:

$$\overrightarrow{BM}=(x-r\cos\varphi,\ y-r\sin\varphi),\quad |\overrightarrow{BM}|=r\varphi.$$

ۋېكتور $\overrightarrow{OB}$ نىڭكى بىلەن يۆنىلىشى ۋېكتور $e_1=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ ئوخشاش بولغان بىرلىك ۋېكتور بولغانلىقى ئۈچۈن، ۋېكتور $e_2=(\sin\varphi, -\cos\varphi)$ مۇ يۆنىلىشى ۋېكتور $\overrightarrow{BM}$ نىڭكى بىلەن ئوخشاش بولغان بىرلىك ۋېكتور بولىدۇ. شۇڭا، $\overrightarrow{BM}=(r\varphi)e_2$، يەنى

$$(x-r\cos\varphi,\ y-r\sin\varphi)=(r\varphi)(\sin\varphi, -\cos\varphi),$$

بۇنى يەشسەك تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).\end{cases}\quad (\varphi \text{ پارامېتىر})$$

مانا بۇ، چەمبەرنىڭ تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدۇر.

ماشىناسازلىق سانائىتىدە، ھەرىكەتلەندۈرگۈچ كۈچنى چىشلىق چاق بىلەن ئۆزىتىش كەڭ دائىرىدە ئىشلىتىلىدۇ. چىشلىرى تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق شەكلىدە بولغان چىشلىق چاقنىڭ ئۆپىرىشى ئاز، كۈچ ئۆزىتىشى مۇقىم ھەم

ئۇنى ياساش ۋە قۇراشتۇرۇش ئاسان بولغاچقا، كۆپ ساندىكى چىشلىق چاقلاردا مۇشۇ خىل چىش شەكلى ئىشلىتىلىدۇ. بۇ خىل چىشلىق چاقنى لايىھىلەش ۋە ئىشلەپچىقىرىشتا، چەمبەرنىڭ تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىشقا توغرا كېلىدۇ.

مۇلاھىزە

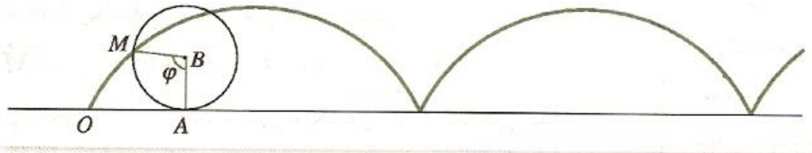
چەمبەرنىڭ تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ئۈستىدە ئىزدىنىش جەريانىدا «ۋېكتور $(\sin\varphi, -\cos\varphi)=e_2$ نىڭ يۆنىلىشى ۋېكتور $\overrightarrow{BM}$ نىڭكى بىلەن ئوخشاش» دېگەن بۇ يەكۈندىن پايدىلاندۇق، سىز بۇ يەكۈننىڭ نېمە ئۈچۈن كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

2. سىكلوئىدا

مۇلاھىزە

ئەگەر ۋېلسىپىتنىڭ چاقىغا بىر ئاق رەڭلىك بەلگە پۈركۈپ قويساق، ئۇ هالدا ۋېلسىپىت تۈپتۈز يولدا ماڭغاندا، ئاق رەڭلىك بەلگە قانداق ئەگرى سىزىقنى تەسۋىرلەپ چىقىدۇ؟

يۇقىرىقى مەسىلىنى ماتېماتىكىلىق مەسىلىگە ئابستراكسىيىلىسەك مۇنداق بولىدۇ: بىر چەمبەر بىر مۇقىم تۈز سىزىقنى بويلاپ سىيرىلماي دومىلىغاندا، چەمبەر ئايلانمىسى ئۈستىدىكى بىر مۇقىم نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى قانداق بولىدۇ؟



19.2 – رەسىم

ئوخشاشلا، بىز ئالدى بىلەن چەمبەر ئايلانمىسى ئۈستىدىكى بۇ مۇقىم نۇقتا چەمبەرنىڭ دومىلىشى جەريانىدا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتنى تەھلىل قىلايلى.

19.2 – رەسىمدىكىدەك، چەمبەر مەركىزىنى B، چەمبەر ئايلانمىسى ئۈستىدىكى مۇقىم نۇقتىنى M، ئۇنىڭ دەسلەپكى ئورنىنى O دەپ پەرەز قىلايلى. چەمبەر تۈز سىزىق ئۈستىدە دومىلىغاندا، M نۇقتا چەمبەر مەركىزىنى چۆرىدەپ ئايلانما هەرىكەت قىلىدۇ، φ (رادىئان) بۇلۇڭ ئايلانغاندىن كېيىن، چەمبەر بىلەن تۈز سىزىق A نۇقتىدا ئۇرۇنىدۇ – دە، OA كېسىكىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\widehat{MA}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقىغا تەڭ، يەنى $OA=r\varphi$ بولىدۇ.

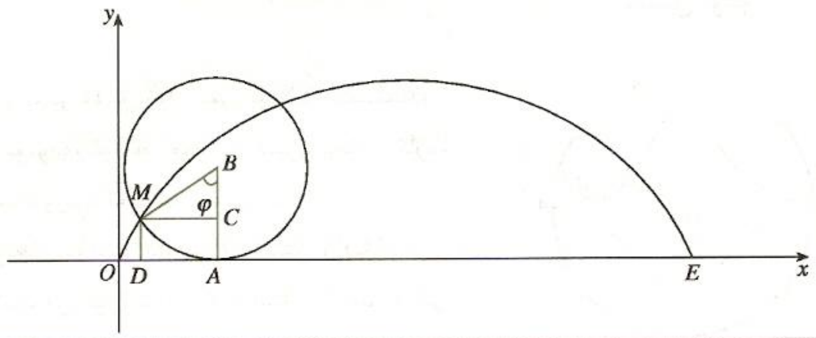
هەرىكەتچان نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تەكشى سىكلوئىدا سىزىڭ.

مانا بۇ، چەمبەر ئايلانمىسى ئۇستىدىكى مۇقىم نۇقتا M چەمبەر B نىڭ تۈز سىزىقنى بويلاپ دومىلىشى جەريانىدا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتتۇر. بىز M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تەكشى **سىكلوئىدا**، قىسقىچە **سىكلوئىدا** دەپ ئاتايمىز، ئۇ يەنە **ئايلانما سىزىق** دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

ئەمدى سىكلوئىدانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تاپىمىز.

M نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، مۇقىم تۈز سىزىقنى x ئوق، مۇقىم نۇقتا M نىڭ چەمبەر دومىلىغان چاغدا مۇقىم تۈز سىزىق ئۇستىگە چۈشكەن بىر ئورنىنى كوئوردېنات بېشى قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزايلى (20.2 ـ رەسىم) ھەم چەمبەرنىڭ رادىئۇسىنى r دەپ پەرەز قىلايلى.

سىكلوئىدانىڭ ئۆزى بىلەن مۇقىم تۈز سىزىقنىڭ ئۆز-ئارا قوشنا ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى ئارىلىقىدىكى بۆلىكى بىر ئەگمە دەپ ئاتىلىدۇ. مەسىلەن، 20.2 ـ رەسىمدىكى O بىلەن E نىڭ ئارىسىدىكى بۆلەك بىر ئەگمىدىن ئىبارەت.



20.2 ـ رەسىم

مۇقىم نۇقتا M نىڭ دەسلەپكى ئورنى كوئوردېنات بېشىدا ياتىدۇ، چەمبەر φ بۇلۇڭ دومىلىغاندىن كېيىن x ئوق بىلەن A نۇقتىدا ئۇرۇنىدۇ، چەمبەر مەركىزى بولسا B نۇقتىدا ياتىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، M نۇقتا ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم AB ۋە x ئوقنىڭ تىك سىزىقنى ئۆتكۈزىمىز (تىك ئاساسى ئايرىم ـ ئايرىم C، D). ئاندىن M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلىپ، φ نى پارامېتىر قىلىپ ئالساق، M نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېتىرىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$x=OD=OA-DA=OA-MC=r\varphi-r\sin\varphi,$$

$$y=DM=AC=AB-CB=r-r\cos\varphi .$$

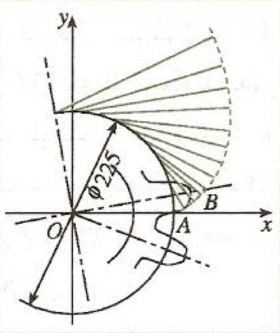
شۇڭا، سىكلوئىدانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\begin{cases}x=r(\varphi-\sin\varphi),\\ y=r(1-\cos\varphi).\end{cases} \quad (\varphi \text{ پارامېتىر}) \qquad ①$$

مۇلاھىزە

سىكلوئىدانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ① دە، پارامېتىر φ نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى قانداق بولىدۇ؟ بىر ئەگمىنىڭ كەڭلىكى ۋە ئېگىزلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچە بولىدۇ؟

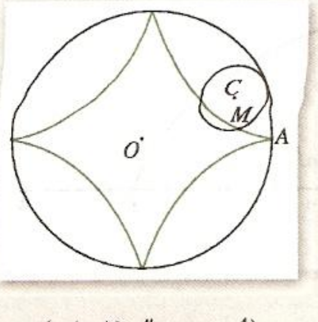
4.2 كۆنۈكمە



(1 - مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكىدەك، چىشلىرى تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق شەكلىدە بولغان ئۆلچەملىك چىشلىق چاقنىڭ چىش ئىزنا سىزىقىنىڭ ئاساس چەمبىرىنىڭ دىئامېتىرى 225mm بولسا، چىش ئىزنا سىزىقى AB ياتقان تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىقنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ دەپ پەرەز قىلىپ، تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق $\begin{cases} x = \cos\varphi + \varphi\sin\varphi, \\ y = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi \end{cases}$ نىڭ ئۈستىدىكى ماس نۇقتا A ، B لارنى تېپىڭ ھەم A ، B نۇقتىلارنىڭ ئارىلىقىنى تېپىڭ.



(4 - مىسال ئۈچۈن)

3. رادىئۇسى a بولغان بىر چاق تۈز سىزىقلىق رېلىسنى بويلاپ دومىلىدى، چاقنىڭ گوگۇسىنىدە بىر M نۇقتا بار بولۇپ، ئۇنىڭ چاق مەركىزى بىلەن ئارىلىقى b $(b<a)$ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

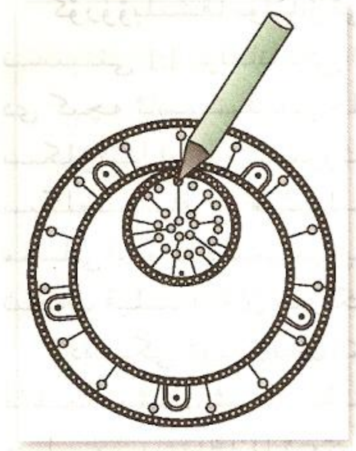
4. رەسىمدىكىدەك، رادىئۇسى $4r$ بولغان مۇقىم چەمبەر O بىلەن رادىئۇسى r بولغان ھەرىكەتچان چەمبەر C ئۆزئارا ئىچتىن ئۇرۇنىدۇ، C چەمبەر O چەمبەرنى بويلاپ سىيرىلماي دومىلىغان بولسا، C چەمبەر ئۈستىدىكى مۇقىم نۇقتا M (دەسلەپكى ئورنى A نۇقتىدا) نىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسى ئۈستىدە ئىزدىنىڭ.

ئوقۇش ماتېرىيالى

سىكلوئىدا ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

ماتېماتىكا تارىخىدا، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى بايقالغاندىن كېيىن، ئالىملار ئەڭ كۆپ نەزەر سالغان ئەگرى سىزىق سىكلوئىدا بولدى. گالىلېي سىكلوئىداغا ئەڭ بۇرۇن دىققەت قىلغان ئالىملارنىڭ بىرى بولۇپ، ئۇ سىكلوئىدانىڭ بىر ئەگمىسى بىلەن ئۇنىڭ ئاساس سىزىقىدىن قورشالغان يۈزنى مەشغۇلات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاشنى سىناپ كۆرگەن؛ كېيىن، دېكارت، فېرمات، پاسكال، بېرنوللى قاتارلىقلارمۇ سىكلوئىدانى تەتقىق قىلغان ھەم سىكلوئىدانىڭ بەزىبىر خۇسۇسىيەتلىرى ۋە قوللىنىشلىرىنى بارلىققا كەلتۈرگەن.

سىكلوئىدانىڭ تۈرى كۆپ، شەكلى گۈزەل، قوللىنىلىشى كەڭ. بىز تۆۋەندە چىرايلىق ھەم كۆپ ئەسقاتىدىغان بىرنەچچە سىكلوئىدانى تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.



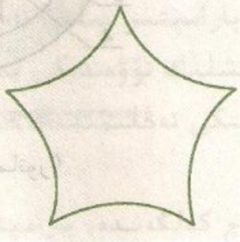
1 ـ رەسىم

ماگىزىنلاردا ئەگرى سىزىق سىزىشتا ئىشلىتىلىدىغان بىر خىل قورال بار بولۇپ، ئۇ ئايلانمىسىغا چىشلار ئويۇلغان چەمبەر شەكىللىك بىر كىچىك تاختا ۋە ئىچكى ـ تاشقى ئايلانمىلىرىغا چىشلار ئويۇلغان ھالقا شەكىللىك بىر چوڭ تاختىدىن تەركىب تاپىدۇ (1 ـ رەسىم). ئىشلەتكەندە، كىچىك تاختىنى چوڭ تاختىنىڭ ئىچكى قىسمىغا چىشلىرى ئۆزئارا كىرىشىدىغان قىلىپ ئورنىتىپ، ئاندىن قېرىنداش ئۇچىنى كىچىك تاختىدىكى بىر تۆشۈكچىگە مۇقىملاشتۇرىمىز، كىچىك تاختا چوڭ تاختىنىڭ ئىچكى ئايلانمىسىنى بويلاپ دومىلىغاندا، قېرىنداش ئۇچى بىر ئەگرى سىزىقنى سىزىپ چىقىدۇ. بۇ ئەگرى سىزىق قانداق شەكىلدە بولىدۇ؟

كىچىك تاختىنىڭ چوڭ تاختىنىڭ ئىچكى ئايلانمىسىنى بويلاپ دومىلىشىنى ماتېماتىكىلىق تىل بىلەن ئىپادىلىسەك، بۇ، بىر كىچىك چەمبەرنىڭ بىر چوڭ چەمبەرنىڭ ئىچكى قىسمىدا چەمبەر ئايلانمىسىنى بويلاپ سىيرىلماي دومىلىغانلىقى بولىدۇ. دومىلىغاندا، كىچىك چەمبەرنىڭ ئايلانمىسى ئۈستىدىكى مەلۇم بىر مۇقىم نۇقتا تەسۋىرلىگەن ئەگرى سىزىق **ئىچكى سىكلوئىدا** دېيىلىدۇ.

1 ـ رەسىمدىكى كىچىك تاختىنى چوڭ تاختىنىڭ تاشقى ئايلانمىسى بىلەن چىشلەشتۈرۈپ دومىلىتىشقىمۇ بولىدۇ، بۇ، بىر كىچىك چەمبەرنىڭ بىر چوڭ چەمبەرنىڭ تاشقى قىسمىدا چەمبەر ئايلانمىسىنى بويلاپ سىيرىلماي دومىلىغانلىقى بولىدۇ. دومىلىغاندا، كىچىك چەمبەرنىڭ ئايلانمىسى ئۈستىدىكى مەلۇم بىر مۇقىم نۇقتا تەسۋىرلىگەن ئەگرى سىزىق **تاشقى سىكلوئىدا** دېيىلىدۇ.

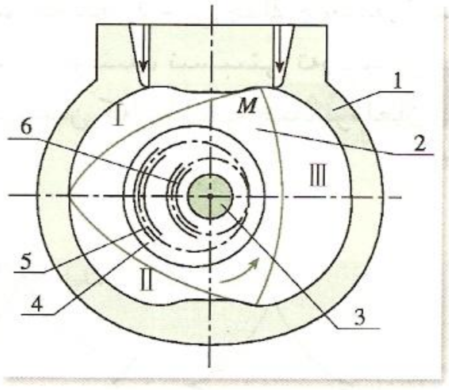
ئىچكى، تاشقى سىكلوئىدالارنىڭ شەكلى مۇقىم چەمبەر (يەنى چوڭ چەمبەر) بىلەن دومىلىغۇچى چەمبەر (يەنى كىچىك چەمبەر) نىڭ رادىئۇسلىرىنىڭ نىسبىتى تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ. تۆۋەندە ئوخشاش بولمىغان رادىئۇس نىسبەتلىرىدىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان بىرنەچچە خىل ئىچكى، تاشقى سىكلوئىدا كۆرسىتىلدى.

شەكىل				
سىكلوئىدانىڭ تۈرى	ئىچكى سىكلوئىدا	ئىچكى سىكلوئىدا	تاشقى سىكلوئىدا	تاشقى سىكلوئىدا
مۇقىم چەمبەر بىلەن دومىلىغۇچى چەمبەرنىڭ رادىئۇسلىرىنىڭ نىسبىتى	4 : 1	5 : 1	7 : 3	1 : 1

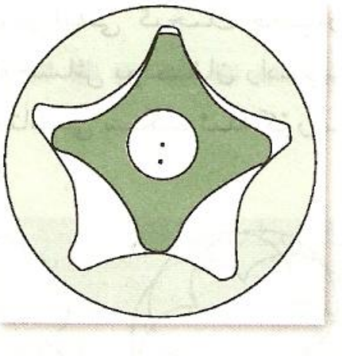
كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، مۇقىم چەمبەر بىلەن دومىلىغۇچى چەمبەرنىڭ رادىئۇسلىرىنىڭ نىسبىتى 4:1 بولغاندىكى ئىچكى سىكلوئىدانىڭ تۆت ئۇچلۇق بۇرجىكى بار بولۇپ، ئۇ خۇددى كېچە ئاسمىنىدىكى چاقناپ تۇرغان يۇلتۇزغا ئوخشايدۇ. شۇڭا، بىز ئۇنى يۇلتۇزسىمان سىكلوئىدا (ياكى ئاستروئىدا) دەپ ئاتايمىز. ئالدىدىكى ئۆگىنىشلەردە، بىز يۇلتۇزسىمان سىكلوئىدانىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقارغانىدۇق (2.4 - كۆنۈكمىنىڭ 4 - مىسالى)، بۇ تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ، ئاممىۋى ئاپتوبۇسنىڭ ئىشىكى ئېچىلىپ - يېپىلغاندا تېجەپ قېلىنىدىغان ھەرىكەتلىنىش يۈزى (دائىرىسى) نى ھېسابلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

ئادەتتىكى ئۆيلەرنىڭ ئىشىكى بىر قاناتلىق، دەرۋازا قوش قاناتلىق بولىدۇ، ئاپتوبۇستا بولسا قاتلىما ئىشىك ئىشلىتىلىدۇ. بۇ خىل ئىشىكنىڭ روشەن ئارتۇقچىلىقى شۇكى، ئىشىك ئېچىلىپ - يېپىلغاندا ئېھتىياجلىق بولىدىغان ھەرىكەتلىنىش دائىرىسى بىرقەدەر كىچىك بولىدىغانلىقتىن، ئادەم چىقىش يۇقىرى پەللىگە يەتكەن چاغلاردا تېخىمۇ كۆپ يولۇچىنى توشۇغىلى بولىدۇ. بىز يۇلتۇزسىمان سىكلوئىدا ۋە مۇناسىۋەتلىك ماتېماتىكا بىلىملىرىدىن پايدىلىنىپ، ئاپتوبۇسنىڭ قاتلىما ئىشىككە ئېھتىياجلىق بولىدىغان ھەرىكەتلىنىش يۈزى كەڭلىكى ئوخشاش بولغان ئادەتتىكى ئىشىكلەرنىڭ $\frac{5}{16}$ ىگە تەڭ بولىدىغانلىقىنى ھېسابلاپ چىقالايمىز.

بىز بىلىدىغان تەكشى سىكلوئىدا، ئىچكى سىكلوئىدا ۋە تاشقى سىكلوئىدالاردىن سىرت، يەنە ھەر خىل سىكلوئىدالار بار بولۇپ، ئۇلار شەكىل لايىھىلەش، سىكلوئىدا شەكىللىك چىشلىق چاق، چىش سانى پەرقىنى ئازايتىش تېپىدىكى يۇلتۇزسىمان تېزلىك كېمەيتكۈچ، سىكلوئىداسىمان روتورلۇق ماي پومپىسى، ئايلانما پورشېنلىق ماتورنىڭ سىلىندىر ئەگرى سىزىقى ۋە كۆپ تەرەپلىكنى كېسىش قاتارلىق جەھەتلەردە ئىشلىتىلىدۇ. ئەگەر قىزىقسىڭىز، مۇناسىۋەتلىك ماتېرىياللارنى ئوقۇپ، سىكلوئىدا ھەققىدىكى بىلىملەرنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئىگىلىسىڭىز بولىدۇ.



(ئايلانما پورشېنلىق ماتور)



(سىكلوئىداسىمان روتورلۇق ماي پومپىسى)

ئۆگىنىشنى خۇلاسىلەش دوكلاتى

بۇ مەخسۇس تېمىدا، بىز ئوخشاش بولمىغان بىرنەچچە خىل كوئوردېنات سىستېمىسىنى ۋە نۇقتىنىڭ ئورنىنى مۇشۇ كوئوردېنات سىستېمىلىرىدىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەشنى ئۆگىنىپ، ئوخشاش بولمىغان كوئوردېنات سىستېمىلىرىدا بەزى ئاددىي ئەگرى سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىپ چىقتۇق ھەم بۇ ئارقىلىق كوئوردېنات ئۇسۇلى ئىدىيىسىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ چۈشىنىۋالدۇق. بۇ مەزمۇنلار ئۈستىدە ئويلىنىشقا تېگىشلىك تۆۋەندىكى بىرقانچە مەسىلە بار:

1. ئوخشاش بولمىغان كوئوردېنات سىستېمىلىرىنىڭ نۇقتىنىڭ ئورنى ۋە ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى سۈرەتلەشتە ئۆزىگە خاس قانداق ئالاھىدىلىكى بار؟

2. ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى ئاددىيلاشتۇرۇش ئۈچۈن، كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزغاندا نېمىلەرگە دىققەت قىلىش كېرەك؟

3. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا ئۇزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشى ئېلىپ بېرىشنىڭ ماھىيىتى نېمە؟ ئۇزارتىش ـ قىسقارتىش ئالماشتۇرۇشىنىڭ تەسىرىدە، تەكشىلىكتىكى شەكىللەر قانداق ئۆزگىرىدۇ؟

4. قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى بىلەن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىنىڭ قانداق ئوخشاشمايدىغان تەرەپلىرى بار؟ ھەرىكەتچان نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېترىيىلىك شەرتكە ئاساسەن، قۇتۇپ كوئوردېنات سىستېمىسى ياكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىنى قانداق تاللاش كېرەكلىكىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

پارامېتىرلىق تەڭلىمە دېگىنىمىز ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى پارامېتىرلىق ئۆزگەرگۈچى مىقدارنى ۋاستە قىلىش ئارقىلىق ئىپادىلىنىدىغان تەڭلىمە بولۇپ، ئۇ ئەگرى سىزىقنىڭ ئوخشاش بىر كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى بىر خىل ئىپادىلىنىش شەكلىدىن ئىبارەت. بەزىدە، ھەرىكەتچان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى گېئومېترىيىلىك مەنىگە ياكى فىزىكىلىق مەنىگە ئىگە پارامېتىر بىلەن تەسۋىرلىسەك قولايلىقراق بولىدۇ. بۇ مەزمۇنلار ئۈستىدە ئويلىنىشقا تېگىشلىك تۆۋەندىكى بىرقانچە مەسىلە بار:

5. پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن ئادەتتىكى تەڭلىمىنىڭ قانداق ئوخشىشىدىغان ۋە ئوخشاشمايدىغان جايلىرى بار؟

6. بىر ترايېكتورىيە مەسىلىسىگە دۇچ كەلگەندە، پارامېتىرنى قانداق تاللاش كېرەك؟ ترايېكتورىيىنىڭ ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن پارامېتىرنى قانداق تاللاش كېرەكلىكىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

7. پارامېتىرلىق تەڭلىمە بىلەن ئادەتتىكى تەڭلىمىنى بىر ـ بىرىگە ئايلاندۇرۇش جەريانىدا نېمىلەرگە دىققەت قىلىش كېرەك؟

8. تۆز سىزىق، چەمبەر ۋە كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ پارامېتىرلىق تەڭلىمىسىدىكى پارامېتىرنىڭ مەنىسىنى بىلۋالدىڭىزمۇ؟ مەسىلىنى پارامېتىرنىڭ مەنىسىدىن پايدىلىنىپ قانداق ھەل قىلىش كېرەكلىكىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

9. تەكشى سىكلوئىدا، تەدرىجىي يېيىلغۇچى سىزىق قاتارلىق ئەگرى سىزىقلارنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش ناھايىتى قىزىقارلىق بولىدۇ، بۇنى ئۆزىڭىز قول سېلىپ سىناپ كۆرۈڭ.

تۆۋەندىكى مەزمۇنلارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان بىر ئۆگىنىشنى خۇلاسىلەش دوكلاتى يېزىڭ:

1. بۇ لېكسىيىدىكى بىلىملەرنى خۇلاسىلەش: بۇ لېكسىيىدىكى بىلىملەر قۇرۇلمىسىنىڭ رامكىلىق سخېمىسى، مۇھىم ماتېماتىكىلىق ئىدىيە ۋە ئۇسۇللار، بۇ مەخسۇس تېمىدىكى مەز-مۇنلار بىلەن تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ئۆگىنىشىدىكى باشقا مەزمۇنلارنىڭ باغلىنىشى.

2. مەسىلىنى كوئوردېنات ئۇسۇلى ئىدىيىسىدىن پايدىلىنىپ قانداق ھەل قىلىش كېرەك-لىكىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈش.

3. ماتېرىيال كۆرۈش، تەكشۈرۈپ تەتقىق قىلىش، سوراپ بىلىۋېلىش، مۇستەقىل پىكىر يۈرگۈزۈش ئارقىلىق، پارامېتىرلىق تەڭلىمە ۋە سىكلوئىدانىڭ قوللىنىلىشى ئۈستىدە ئىزدى-نىپ ۋە مۇھاكىمە ئېلىپ بېرىپ، ئۆگەنگەن بىلىملەرنى كېڭەيتىش.

4. بۇ لېكسىيىدىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىنكى تەسىرات.

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇمىيۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈربويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىسۈن، شۈ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۇ شىڭۋېي، ۋاڭ زىكۈن، لياڭ خېڭ، جىن چۇڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش ليۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشېڭ، لى جىلىن، ياڭ خۇەنمىڭ، گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپېي قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور ليۇ شاۋشۆنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ، تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىپ تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم - تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنىستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۈكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل - پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەر ۋە مەسئۇل مۇھەررىرلەردىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن شۈ يوڭ، جاڭ ۋېنجۈن، جاڭ جىنسۇڭ قاتارلىقلار بار.

بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلەرنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممەيلەن قول تۇتۇشۇپ، ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇشى خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى. ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758318

E－mail: jcfk @ pep.com.cn　　wangr @ pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى　　　　دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات - ئېچىش مەركىزى