2005 ـ يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا

تاللىما دەرسلىك 2 — 1

شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

者: 米吉提·卡地儿
热米拉·阿布都热西提
审: 热夏提·帕尔萨
辑: 吾尔卡西·阿布都热依木
对: 热依拉·阿布来提

تەرجىمانى: مىجىت قادىر
رەمىلە ئابدۇرېشىت
مۇھەررىرى: رىشات پەرسا
مەسئۇل مۇھەررىرى: ئۆركەش ئابدۇرېھىم
مەسئۇل كوررېكتورى: راھىلە ئابلەت

普通高中课程标准实验教科书
数 学
选修 2-1
A 版
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
(维吾尔文)
*
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى تەرجىمە ۋە نەشر قىلدى
http://www.xjjycbs.com
شىنجاڭ شىنخۇا كىتابخانىسى تارقاتتى
شىنجاڭ بېغتۇەن باسما زاۋۇتى باستى
شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى كومپيۇتېر مەركىزى تىزدى
*
فورماتى: 1240×890، 1/16؛ باسما تاۋىقى: 9
2009 – يىل 6 – ئاي 1 – نەشرى
2010 – يىل 6 – ئاي 2 – بېسىلىشى
تىراژى: 1 — 11400
ISBN 978 — 7 — 5370 — 7295 — 3
باھاسى: 8.22 يۈەن

نەشر ھوقۇقى بىزدە، باشقىلارنىڭ كۆپەيتىپ بېسىشىغا بولمايدۇ.
بېسىش – تۈپلەش سۈپىتىدە مەسىلە كۆرۈلسە ئالماشتۇرۇپ بېرىلىدۇ.
ئادرېس: ئۈرۈمچى شەھىرى غالىبىيەت يولى 187 – نومۇر
پوچتا نومۇرى: 830049؛ تېلېفون نومۇرى: 2863761, 2870654 (0991)

مۇندەرىجە

1 - باب. كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلار ...1

1 - 1. ھۆكۈملۈك ۋە ھۆكۈملۈكلەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ...2

1 - 2. يېتەرلىك شەرت ۋە زۆرۈر شەرت 11

1 - 3. ئاددىي لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار 16

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە «ھەممە»، «ياكى»، «ئەمەس» ۋە «كېسە-شىش» «بىرىكىش»، «تولدۇرۇش» 22

1 - 4. ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز ۋە مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز 24

خۇلاسە 31

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى 32

2 - باب. كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى ۋە ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسى 35

2 - 1. ئەگرى سىزىق ۋە ئۇنىڭ تەڭلىمىسى 36

2 - 2. ئېللىپس 42

ئىزدىنىش ۋە بايقاش كېسىش ئەگرى سىزىقى نېمە ئۈچۈن ئېللىپس بولىدۇ؟ 47

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى «گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسى(几何画板)»دىن پايدىلىنىپ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى — ئېللىپس ئۈستىدە ئىزدىنىش 57

2 - 3. ھىپېربولا 59

ئىزدىنىش ۋە بايقاش نېمە ئۈچۈن $y=\pm\frac{b}{a}x$ ھىپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
نىڭ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقى بولىدۇ؟ 71

2 ـ 4. پارابولا 72

ئىزدىنىش ۋە بايقاش ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە
$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى نېمە ئۈچۈن پارا-
بولا بولىدۇ؟ 83

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە I كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ئوپتى-
كىلىق خۇسۇسىيىتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى 84

II كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ مەركەزدىن قېچىش
دەرىجىسى ۋە بىرلىككە كەلگەن تەڭلىمىسى 86

خۇلاسە 88

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى 91

3 ـ باب. بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ستېرېئومېترىيە ... 95

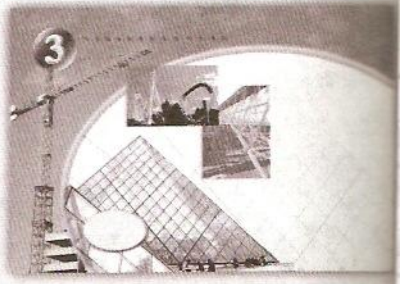
3 ـ 1. بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئەمەللىرى 96

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە ۋېكتور ئۇقۇمىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە قول-
لىنىلىشى 114

3 ـ 2. ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى 117

خۇلاسە 131

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى 133



1 ـ باب

كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلار

1ـ1 ھۆكۈملۈك ۋە ھۆكۈملۈكلەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت

1ـ2 يېتەرلىك شەرت ۋە زۆرۈر شەرت

1ـ3 ئاددىي لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار

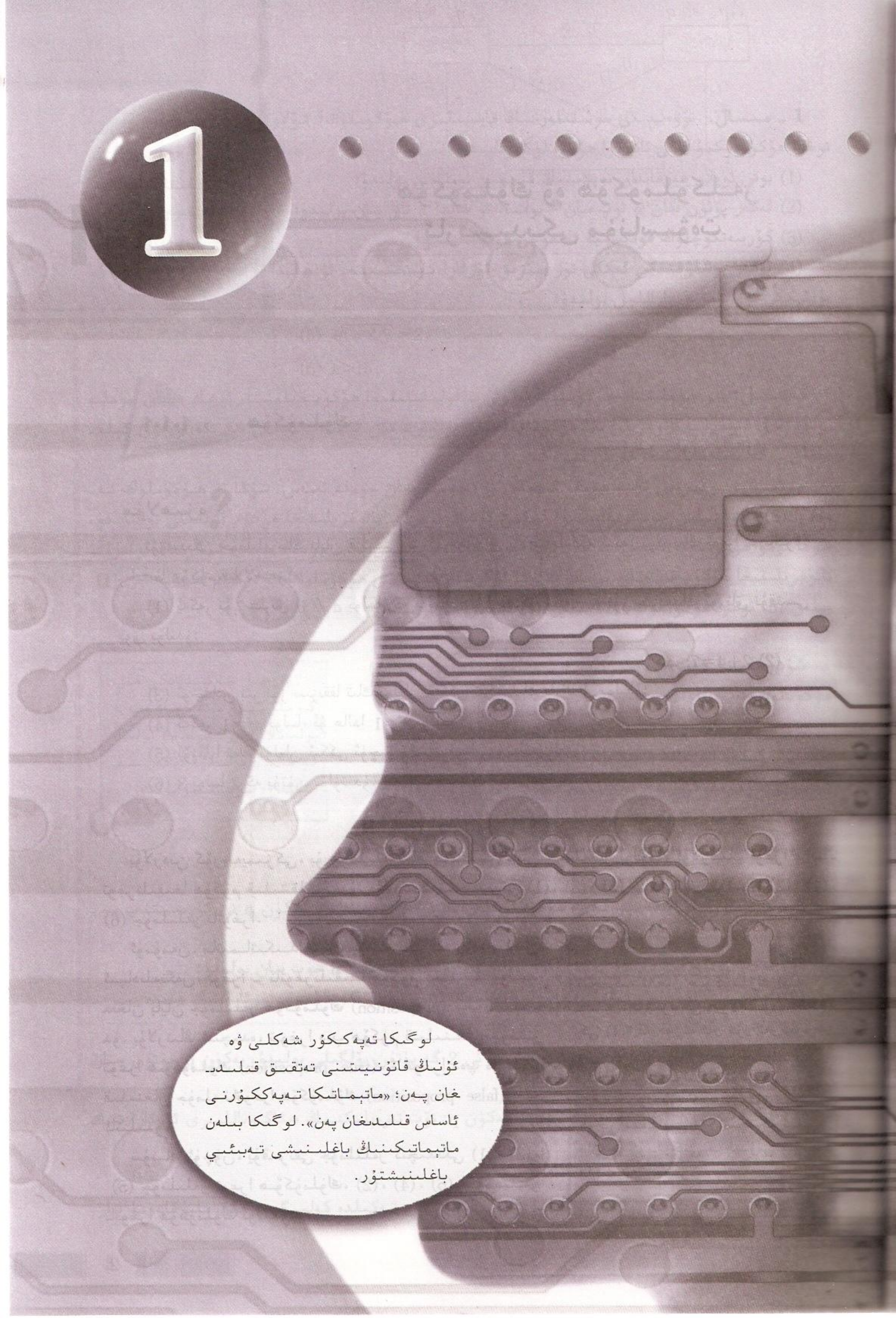
1ـ4 ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز ۋە مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز

بىزنىڭ كۈندىلىك ئالاقىمىز، ئۆگىنىش ۋە خىزمىتىمىزدە لوگىكىلىق ئاتالغۇلار كەم بولسا بولمايدىغان قورالدۇر. لوگىكىلىق ئاتالغۇلارنى توغرا قوللىنىش ھازىرقى جەمئىيەت پۇقرالىرى ھازىرلاشقا تېگىشلىك ئاساسىي ساپادۇر.

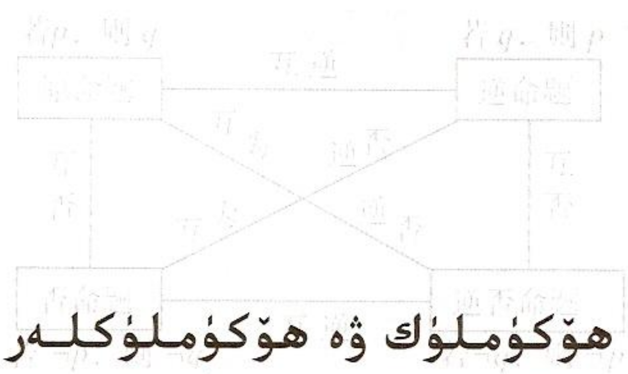
ماتېماتىكا لوگىكىلىقى كۈچلۈك پەن بولۇپ، ماتېماتىكىلىق ئۇقۇم ۋە يەكۈنلەرنى بايان قىلىش، خۇلاسە چىقىرىش ۋە ئىسپاتلاشلاردا لوگىكىلىق ئاتالغۇلار قوللىنىلىدۇ. كۆپ قوللىنىلىدىغان بەزىبىر لوگىكىلىق ئاتالغۇلارنى ئۆگىنىۋالساق، ماتېماتىكىلىق ئۇقۇملارنى توغرا چۈشىنىشىمىز، ماتېماتىكىلىق يەكۈنلەرنى ئەقىلگە مۇۋاپىق ئىسپاتلىشىمىز ۋە ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى توغرا بايان قىلىشىمىزغا ياردىمى تېگىدۇ.

بۇ بابتا، ھۆكۈملۈك ۋە تۆت خىل ھۆكۈملۈك ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت، يېتەرلىك شەرت ۋە زۆرۈر شەرت، ئاددىي لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار، ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز ۋە مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز قاتارلىق ئاساسىي بىلىملەرنى ئۆگىنىمىز. كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلارنى ئۆگىنىش ۋە ئىشلىتىش، كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلارنى ئىشلىتىش ئۇسۇلىنى ئىگىلەش ۋە لوگىكىلىق خاتالىقلارنى تۈزىتىش ئارقىلىق، ماتېماتىكىلىق مەزمۇنلارنى كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلاردىن پايدىلىنىپ بايان قىلىشنىڭ توغرىلىقىنى ھەم ئىخچاملىقىنى ھېس قىلالايمىز.

1



لوگىكا تەپەككۇر شەكلى ۋە ئۇنىڭ قانۇنىيىتىنى تەتقىق قىلىدىغان پەن؛ «ماتېماتىكا تەپەككۇرنى ئاساس قىلىدىغان پەن». لوگىكا بىلەن ماتېماتىكىنىڭ باغلىنىشى تەبىئىي باغلىنىشتۇر.



هۆكۈملۈك ۋە هۆكۈملۈكلەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت

1-1

1-1-1 هۆكۈملۈك

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى جۈملىلەرنىڭ بايان قىلىنىش شەكلى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا هۆكۈم قىلالامسىز؟

(1) ئەگەر تۈز سىزىق $a // b$ بولسا، ئۇ هالدا a تۈز سىزىق بىلەن b تۈز سىزىقنىڭ ئورتاق نۇقتىسى يوق بولىدۇ؛

(2) $2+4=7$;

(3) ئوخشاش بىر تۈز سىزىققا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ؛

(4) ئەگەر $x^2=1$ بولسا، ئۇ هالدا $x=1$ بولىدۇ؛

(5) ئۆزئارا تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزلىرى تەڭ بولىدۇ؛

(6) 3 بولسا 2 گە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ.

بۇلاردىن كۆرەلەيمىزكى، بۇ جۈملىلەرنىڭ ھەممىسى بايان جۈملىلەر بولۇپ، ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا هۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. بۇلارنىڭ ئىچىدىكى (1)، (3)، (5) جۈملىلەر توغرا، (2)، (4)، (6) جۈملىلەر ناتوغرا.

ئومۇمەن، ماتېماتىكىدا سۆز، بەلگە ياكى ئىپادە بىلەن ئىپادىلەنگەن، توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا هۆكۈم قىلىشقا بولىدىغان بايان جۈملىلەر **هۆكۈملۈك** (proposition) دەپ ئاتىلىدۇ. بۇلارنىڭ ئىچىدە، توغرا دەپ هۆكۈم قىلىنغان جۈملە **توغرا هۆكۈملۈك** (true proposition)، ناتوغرا دەپ هۆكۈم قىلىنغان جۈملە **ناتوغرا هۆكۈملۈك** (false proposition) دەپ ئاتىلىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن، يۇقىرىقى جۈملىلەر ئىچىدىكى (1)، (3)، (5) جۈملىلەر توغرا هۆكۈملۈك، (2)، (4)، (6) جۈملىلەر ناتوغرا هۆكۈملۈك بولىدۇ.

> ئۆزگەرگۈچى مىقدارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان هۆكۈملۈك (مەسىلەن، يۇقىرىقى «مۇلاھىزە» دىكى (4)) لەردە، ئەگەر ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى **R** بولسا، ئۇنى يازماسلىقمۇ بولىدۇ. كېيىن، ئۆزگەرگۈچى مىقدارنى ئۆز ئىچىگە ئالغان هۆكۈملۈكنى مەخسۇس مۇھاكىمە قىلىمىز.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى جۈملىلەرنىڭ قايسىلىرى ھۆكۈملۈك؟ ئۇلار توغرا ھۆكۈملۈكمۇ ياكى ناتوغرا ھۆكۈملۈكمۇ؟

(1) بوش توپلام ھەرقانداق توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى بولىدۇ؛

(2) ئەگەر پۈتۈن سان a تۈپ سان❶ بولسا، ئۇ ھالدا a تاق سان بولىدۇ؛

(3) كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە ئاشقۇچى فۇنكسىيىمۇ؟

(4) ئەگەر بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىق ئۆزئارا كېسىشمىسە، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ؛

(5) $\sqrt{(-2)^2}=2$;

(6) $x>15$.

❶ 1دىن چوڭ ھەمدە 1 بىلەن ئۆزىدىن باشقا مۇسبەت كۆپەيتكۈچىسى بولمىغان پۈتۈن سان.

تەھلىل: بىر جۈملىنىڭ ھۆكۈملۈك بولۇش ـ بولماسلىقىغا ھۆكۈم قىلىشتا، ئۇنىڭ «بايان جۈملە بولۇش» ۋە «توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولۇش» تىن ئىبارەت ئىككى شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدىغان ـ كەلمەيدىغانلىقىغا قاراش كېرەك.

يېشىش: يۇقىرىقى ئالتە جۈملە ئىچىدە، (3) جۈملە بايان جۈملە ئەمەس، شۇڭا ئۇ ھۆكۈملۈك ئەمەس؛ (6) جۈملە بايان جۈملە بولسىمۇ، لېكىن ئۇنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولمايدۇ، شۇڭا ئۇمۇ ھۆكۈملۈك ئەمەس؛ قالغان تۆت جۈملىنىڭ ھەممىسى بايان جۈملە ھەمدە ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ، شۇڭا ئۇلارنىڭ ھەممىسى ھۆكۈملۈك، ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى (1) بىلەن (5) توغرا ھۆكۈملۈك، (2) بىلەن (4) ناتوغرا ھۆكۈملۈك.

شۇنى ئاسانلا كۆرۈۋالالايمىزكى، 1 ـ مىسالدىكى (2) ۋە (4) ھۆكۈملۈك

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بېرىلگەن. بۇ بابتا، بىز پەقەت مۇشۇ خىل شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكلەرنىلا مۇھاكىمە قىلىمىز.

ئادەتتە، بۇ خىل شەكىلدە بېرىلگەن ھۆكۈملۈكلەردىكى p نى ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى، q نى ھۆكۈملۈكنىڭ يەكۈنى دەيمىز.

بۇ خىل شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكنى يەنە «پەقەت p بولسىلا، q بولىدۇ»، «p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىللەردە يېزىشقىمۇ بولىدۇ.

2 ـ مىسال. تۆۋەندە بېرىلگەن ھۆكۈملۈكلەردىكى شەرت p بىلەن يەكۈن q نى كۆرسىتىپ بېرىڭلار:

(1) ئەگەر پۈتۈن سان a نى 2 گە پۈتۈن بۆلگىلى بولسا، ئۇ ھالدا a جۈپ سان بولىدۇ؛

(2) ئەگەر بىر تۆت تەرەپلىك رومبا بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ھەمدە بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ.

يېشىش: (1) دىكى شەرت p: پۈتۈن سان a نى 2 گە پۈتۈن بۆلگىلى بولىدۇ، يەكۈن q: پۈتۈن سان a جۈپ سان بولىدۇ.

(2) دىكى شەرت p: تۆت تەرەپلىك رومبا، يەكۈن q: تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ھەمدە بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ.

ماتېماتىكىدا «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە كەلمىگەن ھۆكۈملۈكلەرمۇ بار،

مەسىلەن، «ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ»، بۇنداق ھۆكۈم-لۈكنىڭ بايان قىلىنىشىنى مۇۋاپىق ئۆزگەرتىپ، «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە يېزىشقا بولىدۇ:

ئەگەر ئىككى تەكشىلىك ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك پارال-لېل بولىدۇ.

بۇنداق يازغاندا، ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈنى ناھايىتى ئېنىق بولىدۇ.

3 - مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە يازايلى ھەم ئۇلارنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ؛

(2) مەنپىي ساننىڭ كۇبى مەنپىي سان بولىدۇ؛

(3) قارىمۇقارشى چوققىلىق بۇلۇڭلار تەڭ بولىدۇ.

يېشىش: (1) ئەگەر ئىككى تۈز سىزىق ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ. بۇ ناتوغرا ھۆكۈملۈك.

(2) ئەگەر بىر سان مەنپىي سان بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ساننىڭ كۇبى مەنپىي سان بولىدۇ. بۇ توغرا ھۆكۈملۈك.

(3) ئەگەر ئىككى بۇلۇڭ قارىمۇقارشى چوققىلىق بۇلۇڭلار بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى بۇلۇڭ تەڭ بو-لىدۇ. بۇ توغرا ھۆكۈملۈك.

مەشىق

1. ھۆكۈملۈككە دائىر مىساللارنى كەلتۈرۈڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) 6 گە پۈتۈن بۆلۈنىدىغان پۈتۈن سان چوقۇم 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(2) ئەگەر بىر تۆت تەرەپلىكنىڭ تۆت تەرىپى تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۆت تەرەپلىك كۋادرات بولىدۇ؛

(3) ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بىر پارابولا بولىدۇ؛

(4) ئىككى ئىچكى بۇلۇڭى $45°$ قا تەڭ بولغان ئۈچبۇلۇڭ تەڭ يانلىق تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى يېنىدىكى مېدىئانىلار تەڭ بولىدۇ؛

(2) جۈپ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى y ئوقىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ؛

(3) ئوخشاش بىر تەكشىلىككە تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ.

2-1-1 تۆت خىل ھۆكۈملۈك

مۇلاھىزە

تۆۋەندە بېرىلگەن تۆت ھۆكۈملۈك ئىچىدىكى (1) ھۆكۈملۈك بىلەن (2)، (3)، (4) ھۆكۈملۈكلەرنىڭ شەرتى ۋە يەكۈنى ئارىسىدا ئايرىم ـ ئايرىم قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) ئەگەر $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(3) ئەگەر $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولمىسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولمايدۇ؛

(4) ئەگەر $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولمىسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولمايدۇ.

بۇلاردىن شۇنى كۆرۈۋالالايمىزكى، (1) ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى (2) ھۆكۈملۈكنىڭ يەكۈنى ھەمدە (1) ھۆكۈملۈكنىڭ يەكۈنى (2) ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بولىدۇ، يەنى ئۇلارنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈنى ئۆز ـ ئارا ئالماشقان.

ئومۇمەن، ئەگەر ئىككى ھۆكۈملۈك ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى ۋە يەكۈنى ئايرىم ـ ئايرىم يەنە بىر ھۆكۈملۈكنىڭ يەكۈنى ۋە شەرتى بولسا، ئۇ ھالدا بۇنداق ئىككى ھۆكۈملۈكنى **ئۆزئارا تەتۈر ھۆكۈملۈكلەر** دەيمىز. بۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈك **ئەسلىي ھۆكۈملۈك** (original proposition)، يەنە بىر ھۆكۈملۈك ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ **تەتۈر ھۆكۈملۈكى** (inverse proposition) دەپ ئاتىلىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى

«ئەگەر q بولسا، ئۇ ھالدا p بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بولىدۇ.

شۇنداق قىلىپ، بېرىلگەن بىر ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈننى ئۆزئارا ئالماشتۇرۇش ئارقىلىق بىر يېڭى ھۆكۈملۈككە ئىگە بولالايمىز، ئۇ بېرىلگەن ھۆكۈملۈكنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى بولىدۇ.

مەسىلەن، «بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولسا، ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈننى ئۆزئارا ئالماشتۇرساق، ئۇنىڭ «ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولسا، بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولىدۇ» دېگەن تەتۈر ھۆكۈملۈكىگە ئىگە بولىمىز.

ئىزدىنىش

1. ئۆزئارا تەتۈر ھۆكۈملۈكلەرگە دائىر مىساللارنى كەلتۈرۈڭ ھەم ئەسلىي ھۆكۈملۈك بىلەن تەتۈر ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

2. ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى چوقۇم توغرا ھۆكۈملۈك بولامدۇ؟

ھۆكۈملۈك (1) بىلەن (3) ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈنى دەل يەنە بىر ھۆكۈملۈك شەرتىنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ۋە يەكۈنىنىڭ ئىنكار قىلىنىشى بولىدۇ، بىز بۇنداق ئىككى ھۆكۈملۈكنى **ئۆزئارا ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر** دەيمىز. ئەگەر ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈكنى **ئەسلىي ھۆكۈملۈك** دېسەك، ئۇ ھالدا يەنە بىرى ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ **ئىنكار ھۆكۈملۈكى** (negative proposition) دەپ ئاتىلىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى

«ئەگەر $\neg p$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg q$ بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بولىدۇ.

> يېزىشقا قولايلىق بولۇش ئۈچۈن، ئادەتتە p شەرتىنىڭ ئىنكار قىلىنىشى بىلەن q يەكۈنىنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى ئايرىم - ئايرىم «$\neg p$» ۋە «$\neg q$» قىلىپ يازىمىز ھەم «p ئەمەس» ۋە «q ئەمەس» دەپ ئوقۇيمىز.

مەسىلەن، ئەگەر «بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولسا، ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دېسەك، ئۇ ھالدا «بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولمىسا، ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولمايدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈك ئۇنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى بولىدۇ.

يەنە مەسىلەن، «ئەگەر پۈتۈن سان a نى 2 گە پۈتۈن بۆلگىلى بولمىسا، ئۇ ھالدا a تاق سان بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دېسەك، ئۇ ھالدا «ئەگەر پۈتۈن سان a نى 2 گە پۈتۈن بۆلگىلى بولسا، ئۇ ھالدا a جۈپ سان بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈك ئۇنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

1. ئۆزئارا ئىنكار ھۆكۈملۈكلەرگە دائىر مىساللارنى كەلتۈرۈڭ ھەم ئەسلىي ھۆكۈملۈك بىلەن ئىنكار ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.
2. ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى چوقۇم توغرا ھۆكۈملۈك بولامدۇ؟

ھۆكۈملۈك (1) بىلەن (4) ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈنى دەل يەنە بىر ھۆكۈملۈك يەكۈنىنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ۋە شەرتىنىڭ ئىنكار قىلىنىشى بولىدۇ، بىز بۇنداق ئىككى ھۆكۈملۈكنى **ئۆزئارا تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر** دەيمىز. ئەگەر ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر ھۆكۈملۈكنى **ئەسلىي ھۆكۈملۈك** دېسەك، ئۇ ھالدا يەنە بىرى ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ **تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى** (inverse and negative proposition) دەپ ئاتىلىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى

«ئەگەر $\neg q$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg p$ بولىدۇ»

دېگەن شەكىلدە بولىدۇ.

مەسىلەن، «ئەگەر بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولسا، ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دېسەك، ئۇ ھالدا «ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولمىسا، بىر خىل ئورۇنلۇق بۇلۇڭلار تەڭ بولمايدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈك ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى بولىدۇ.

1 ـ باب

ئىزدىنىش

1. ئۆزئارا تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكلەرگە دائىر مىساللارنى كەلتۈرۈڭ ھەم ئەسلىي ھۆكۈملۈك بىلەن تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

2. ئەگەر ئەسلىي ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى چوقۇم توغرا ھۆكۈملۈك بولامدۇ؟

ئەمدى يۇقىرىقى تۆت خىل ئەھۋالنى ئومۇملاشتۇرۇپ ئۆتىمىز.

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن (1) ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا «ئەگەر q بولسا، ئۇ ھالدا p بولىدۇ» دېگەن (2) ھۆكۈملۈك ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى بولىدۇ؛

«ئەگەر $\neg p$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg q$ بولىدۇ» دېگەن (3) ھۆكۈملۈك ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى بولىدۇ؛

«ئەگەر $\neg q$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg p$ بولىدۇ» دېگەن (4) ھۆكۈملۈك ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى بولىدۇ.

مەشىق

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈگىنى يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) ئەگەر بىر پۈتۈن سانىنىڭ ئاخىرقى خانىسىدىكى رەقەم 0 بولسا، ئۇ ھالدا بۇ پۈتۈن سان 5 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(2) ئەگەر بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى بۇلۇڭى تەڭ بولىدۇ؛

(3) تاق فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ.

3-1-1 تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ ئۆزئارا مۇناسىۋىتى

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى تۆت ھۆكۈملۈكنى كۆزىتىڭ:

(1) ئەگەر $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولىدۇ؛

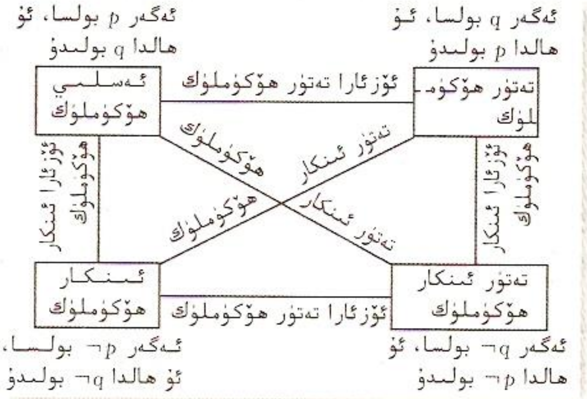
(3) ئەگەر $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولمىسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولمايدۇ؛

(4) ئەگەر $f(x)$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولمىسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ سىنۇس فۇنكسىيە بولمايدۇ.

ھۆكۈملۈك (1) بىلەن ھۆكۈملۈك (2)، (3)، (4) ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت بىزگە مەلۇم. ئۇلار ئىچىدىكى خالىغان ئىككى ھۆكۈملۈكنىڭ ئۆزئارا مۇناسىۋىتىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

شۇنى بايقىيالايمىزكى، ھۆكۈملۈك (2) بىلەن (3) ئۆزئارا تەتۈر ئىنكار ھۆكـۈملۈكلـەر، ھۆكۈملـۈك (2) بىلەن (4) ئۆزئارا ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر، ھۆكۈملۈك (3) بىلەن (4) ئۆزئارا تەتۈر ھۆكۈملۈكلەردۇر.

ئومۇمەن، ئەسلىي ھۆكۈملۈك، تەتۈر ھۆكۈملۈك، ئىنكار ھۆكۈملۈك ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكتىن ئىبارەت بۇ تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ ئۆزئارا مۇناسىۋىتى 1.1.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك بولىدۇ.



1.1.1 ـ رەسىم

يۇقىرىدا تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ ئۆزئارا مۇناسىۋىتىنى تەكشۈرۈپ كۆردۇق. ئۇنداق بولسا، ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشىدىمۇ بەلگىلىك مۇناسىۋەت بارمۇ؟

«مۇلاھىزە»دىكى تۆت ھۆكۈملۈكنى مىسال قىلىپ ئېلىپ، (1) ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دەپ پەرەز قىلساق، ئاسانلا ھۆكۈم قىلالايمىزكى، ئەسلىي ھۆكۈملۈك (1) توغرا ھۆكۈملۈك، ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى (2) ناتوغرا ھۆكۈملۈك، ئۇنىڭ ئىنكار ھۆكۈملۈكى (3) مۇ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولۇپ، ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى (4) بولسا توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

ئىزدىنىش

1. «ئەگەر $x^2-3x+2=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $x=2$ بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دەپ ئېلىپ، ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى يېزىڭ ھەم بۇ ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ.

2. باشقا ھۆكۈملۈكلەرنى تەھلىل قىلىپ بېقىڭ، قېنى، ئۇنىڭدىن تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشىدا قانداق قانۇنىيەت بارلىقىنى بايقىيالامسىز؟

ئومۇمەن، تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشىدا پەقەت ۋە پەقەت تۆۋەندىكىدەك تۆت خىل ئەھۋال بار:

ئەسلىي ھۆكۈملۈك	تەتۈر ھۆكۈملۈك	ئىنكار ھۆكۈملۈك	تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈك
توغرا	توغرا	توغرا	توغرا
توغرا	ناتوغرا	ناتوغرا	توغرا
ناتوغرا	توغرا	توغرا	ناتوغرا
ناتوغرا	ناتوغرا	ناتوغرا	ناتوغرا

تەتۈر ھۆكۈملۈك بىلەن ئىنكار ھۆكۈملۈكمۇ ئۆزئارا تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر بولغانلىقتىن، تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

(1) ئىككى ھۆكۈملۈك ئۆزئارا تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر بولسا، ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشى ئوخشاش بولىدۇ؛

(2) ئىككى ھۆكۈملۈك ئۆزئارا تەتۈر ھۆكۈملۈكلەر ياكى ئۆزئارا ئىنكار ھۆكۈملۈكلەر بولسا، ئۇلار-نىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشى مۇناسىۋەتسىز بولىدۇ.

ئەسلى ھۆكۈملۈك بىلەن ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنىڭ توغرا ـ ناتوغرا بولۇشى ئوخشاش بولىدىغانلىقتىن، مەلۇم بىر ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىنى بىۋاسىتە ئىسپاتلاش قىيىن بولغاندا، ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئارقىلىق ئەسلى ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىنى ۋاستىلىك ھالدا ئىسپاتلىساق بولىدۇ.

4 ـ مىسال. ئەگەر $x^2+y^2=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $x=y=0$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: «ئەگەر $x^2+y^2=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $x=y=0$ بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلى ھۆ-كۈملۈك دەپ قارايمىز. ئەسلى ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاشتا، ئۇنىڭ «ئە-گەر x، y لەرنىڭ كەم دېگەندە بىرى 0 بولمىسا، ئۇ ھالدا $x^2+y^2\neq 0$ بولىدۇ» دېگەن تەتۈر ئىنكار ھۆ-كۈملۈكىنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئارقىلىق ئەسلى ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاش مەقسىتىگە يەتسەك بولىدۇ.

ئىسپات: x، y لەرنىڭ كەم دېگەندە بىرى 0 ئەمەس، مەسىلەن، $x\neq 0$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $x^2>0$ بولىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن

$$x^2+y^2>0,$$

يەنى $x^2+y^2\neq 0$.

شۇڭا، ئەسلى ھۆكۈملۈكنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ، بۇنىڭ بىلەن ئەسلى ھۆكۈملۈكمۇ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

مەشىق

ئەگەر $a^2-b^2+2a-4b-3\neq 0$ بولسا، ئۇ ھالدا $a-b\neq 1$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

1.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى جۈملىلەرنىڭ ھۆكۈملۈك بولۇش ـ بولماسلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $12>5$;

(2) ئەگەر a مۇسبەت ئىرراتسىئونال سان بولسا، ئۇ ھالدا $\sqrt{a}$ مۇ ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ؛

(3) $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(4) سىنۇس فۇنكسىيە دەۋرىي فۇنكسىيىمۇ؟

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) ئەگەر a، b لار جۈپ سان بولسا، ئۇ ھالدا $a+b$ جۈپ سان بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $m>0$ بولسا، ئۇ ھالدا تەڭلىمە $x^2+x-m=0$ ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى يېزىپ، ئاندىن ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) كېسىكنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى ئۈستىدىكى بىر نۇقتىدىن بۇ كېسىكنىڭ ئىككى ئۇچىغىچە بولغان ئارىلىقلار تەڭ بولىدۇ؛

(2) تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ دىئاگوناللىرى تەڭ.

4. ئەگەر بىر ئۇچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى تەڭ بولمىسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەرەپنىڭ قارشىسىدىكى بۇلۇڭلارمۇ تەڭ بولمايدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

ئىسپاتلاڭ: چەمبەرنىڭ ئۆز ئارا كېسىشكەن ئىككى خوردىسى (دىئامېتىر ئەمەس) بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلمەيدۇ.

2-1 يېتەرلىك شەرت ۋە زۆرۈر شەرت

1-2-1 يېتەرلىك شەرت ۋە زۆرۈر شەرت

يۇقىرىدا «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكلەرنى مۇھاكىمە قىلىپ ئۆتتۇق. ئۇلارنىڭ بەزىلىرى توغرا ھۆكۈملۈك، بەزىلىرى ناتوغرا ھۆكۈملۈك. مەسىلەن، تۆۋەندە ئىككى ھۆكۈملۈك بېرىلگەن:

(1) ئەگەر $x>a^2+b^2$ بولسا، ئۇ ھالدا $x>2ab$ بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $ab=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $a=0$ بولىدۇ.

بۇلارنىڭ ئىچىدىكى (1) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، (2) ھۆكۈملۈك بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك.

ئومۇمەن، «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ھۆكۈملۈك بولۇشى، خۇلاسە چىقىرىش ئارقىلىق p دىن q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتىدۇ. بۇ چاغدا p دىن q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ دەيمىز ۋە

$$p \Rightarrow q$$

قىلىپ يازىمىز ھەم p نى q نىڭ **يېتەرلىك شەرتى** (sufficient condition)، q نى p نىڭ **زۆرۈر شەرتى** (necessary condition) دەپ ئاتايمىز.

يۇقىرىقى (1) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، يەنى

$$x>a^2+b^2 \Rightarrow x>2ab,$$

شۇنىڭ ئۈچۈن «$x>a^2+b^2$» بولۇش «$x>2ab$» بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى، «$x>2ab$» بولۇش «$x>a^2+b^2$» بولۇشنىڭ زۆرۈر شەرتى بولىدۇ.

> (1) ھۆكۈملۈكنىڭ «ئەگەر $x \leqslant a^2+b^2$ بولسا، ئۇ ھالدا $x \leqslant 2ab$ بولىدۇ» دېگەن تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىمۇ توغرا ھۆكۈملۈك، باشقىچە ئېيتقاندا، $x>a^2+b^2$ كۈچكە ئىگە بولۇشى ئۈچۈن، $x>2ab$ كۈچكە ئىگە بولۇشى كېرەك. شۇڭا، «$x>2ab$» بولۇش «$x>a^2+b^2$» نىڭ كۈچكە ئىگە بولۇشىنىڭ زۆرۈر شەرتىدۇر.

1 ـ مىسال. تۆۋەندە بېرىلگەن «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكلەردە، قايسى ھۆكۈملۈكتىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك شەرتى بولىدۇ؟

(1) ئەگەر $x=1$ بولسا، ئۇ ھالدا $x^2-4x+3=0$ بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $f(x)=x$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x)$ فۇنكسىيە $(-\infty, +\infty)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(3) ئەگەر x ئىرراتسىئونال سان بولسا، ئۇ ھالدا x^2 ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ.

يېشىش: (1)، (2) ھۆكۈملۈكلەر توغرا ھۆكۈملۈك، (3) ھۆكۈملۈك بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك. شۇ-نىڭ ئۈچۈن، (1)، (2) ھۆكۈملۈكلەردىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك شەرتى بولىدۇ.

«ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغان ئەھۋالدا، p دىن q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولمايدۇ، بىز ئۇنى $p \not\Rightarrow q$ (ياكى $q \not\Leftarrow p$) قىلىپ يازىمىز. بۇ چاغدا، p نى q نىڭ يېتەرلىك شەرتى ئەمەس، q نى p نىڭ زۆرۈر شەرتى ئەمەس دەيمىز.

مەسىلەن، 1 ـ مىسالدىكى (3) ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن،

x^2 ئىرراتسىئونال سان $\not\Rightarrow$ x ئىرراتسىئونال سان

شۇنىڭ ئۈچۈن «x ئىرراتسىئونال سان» دېگەن شەرت «x^2 ئىرراتسىئونال سان» بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى ئەمەس، «x^2 ئىرراتسىئونال سان» دېگەن شەرت «x ئىرراتسىئونال سان» بولۇشنىڭ زۆرۈر شەرتى ئەمەس.

2 ـ مىسال. تۆۋەندە بېرىلگەن «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈك-لەردە، قايسى ھۆكۈملۈكتىكى q شەرت p نىڭ زۆرۈر شەرتى بولىدۇ؟

(1) ئەگەر $x=y$ بولسا، ئۇ ھالدا $x^2=y^2$ بولىدۇ؛

(2) ئەگەر ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزلىرى تەڭ بولىدۇ؛

(3) ئەگەر $a>b$ بولسا، ئۇ ھالدا $ac>bc$ بولىدۇ.

يېشىش: (1)، (2) ھۆكۈملۈكلەر توغرا ھۆكۈملۈك، (3) ھۆكۈملۈك بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك. شۇ-نىڭ ئۈچۈن، (1)، (2) ھۆكۈملۈكلەردىكى q شەرت p نىڭ زۆرۈر شەرتى بولىدۇ.

مەشىق

1. بوش ئورۇنلارغا «$\Rightarrow$» ياكى «$\not\Rightarrow$» نى تولدۇرۇڭ:

(1) $x^2=y^2$ ______ $x=y$;

(2) ئىچكى ئالماش بۇلۇڭلار تەڭ ______ ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل؛

(3) پۈتۈن سان a بولسا 6 گە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ ______ a نىڭ بىرلەر خانىسىدىكى رەقەم جۈپ سان؛

(4) $ac=bc$ ______ $a=b$.

2. تۆۋەندە بېرىلگەن «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكلەردە، قايسى ھۆ-كۈملۈكتىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك شەرتى بولىدۇ؟

(1) ئەگەر ئىككى تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقلىرى تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $x>5$ بولسا، ئۇ ھالدا $x>10$ بولىدۇ.

3. تۆۋەندە بېرىلگەن «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكلەردە، قايسى ھۆ-كۈملۈكتىكى q شەرت p نىڭ زۆرۈر شەرتى بولىدۇ؟

(1) ئەگەر $a+5$ ئىرراتسىئونال سان بولسا، ئۇ ھالدا a ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ؛

(2) ئەگەر $(x-a)(x-b)=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $x=a$ بولىدۇ.

4. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $x=2$ بولۇش $x^2-4x+4=0$ بولۇشنىڭ زۆرۈر شەرتى؛

(2) چەمبەر مەركىزىدىن تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنىڭ رادىئۇسقا تەڭ بولۇشى بۇ تۈز سىزىقنىڭ چەم-بەرنىڭ ئۇرۇنمىسى بولۇشىنىڭ زۆرۈر شەرتى؛

(3) $\sin\alpha=\sin\beta$ بولۇش $\alpha=\beta$ بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى؛

(4) $ab \neq 0$ بولۇش $a \neq 0$ بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى.

2-2-1 يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرت

مۇلاھىزە ؟

بېرىلگىنى: p: پۈتۈن سان a بولسا 6 نىڭ ھەسسىلىكى؛

q: پۈتۈن سان a بولسا 2 بىلەن 3 نىڭ ھەسسىلىكى.

ئۇنداقتا، p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟ q شەرت p نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

يۇقىرىقى مەسىلىدە، $p \Rightarrow q$، شۇنىڭ ئۈچۈن، p شەرت q نىڭ يېتەرلىك شەرتى، q شەرت p نىڭ زۆرۈر شەرتى بولىدۇ.

يەنە بىر تەرەپتىن، $q \Rightarrow p$، شۇنىڭ ئۈچۈن، p يەنە q نىڭ زۆرۈر شەرتى، q يەنە p نىڭ يېتەرلىك شەرتى بولىدۇ.

ئومۇمەن، ئەگەر ھەم $p \Rightarrow q$، ھەم $q \Rightarrow p$ بولسا، ئۇنى

$$p \Leftrightarrow q$$

قىلىپ يېزىپ، p نى q نىڭ **يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى** (sufficient and necessary condition) دەيمىز. روشەنكى، ئەگەر p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بولسا، ئۇ ھالدا q مۇ p نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بولىدۇ.

ئومۇملاشتۇرۇپ ئېيتقاندا، **ئەگەر $p \Leftrightarrow q$ بولسا، ئۇ ھالدا p بىلەن q ئۆزئارا يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتلەر بولىدۇ.**

«p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى» دېگەن سۆزنى يەنە «p شەرت q بىلەن تەڭ كۈچلۈك»، «پەقەت ۋە پەقەت p بولغاندا، q بولىدۇ» دەپ ئېيتىشقىمۇ بولىدۇ.

3 ـ مىسال. تۆۋەندە بېرىلگەن قايسى مىسالدىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بولىدۇ؟

(1) p: $b=0$، q: $f(x)=ax^2+bx+c$ فۇنكسىيە جۈپ فۇنكسىيە؛

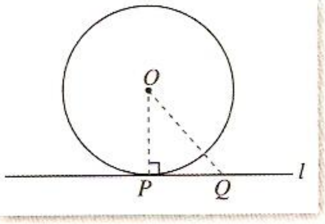
(2) p: $x>0, y>0$, q: $xy>0$;

(3) p: $a>b$, q: $a+c>b+c$.

يېشىش: (1) بىلەن (3) دە، $p \Leftrightarrow q$، شۇنىڭ ئۈچۈن، (1) بىلەن (3) دىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بولىدۇ. (2) دە، $q \nRightarrow p$، شۇنىڭ ئۈچۈن، (2) دىكى p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى ئەمەس.

4 ـ مىسال. بېرىلگىنى: $\odot O$ نىڭ رادىئۇسى r، چەمبەر مەركىزى O دىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق d.

ئىسپات تەلپى: $d=r$ بولۇشى l تۈز سىزىق بىلەن $\odot O$ نىڭ ئۆزئارا ئۇرۇنۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى.



1.2.1 ـ رەسىم

تەھلىل: p: $d=r$، q: l تۈز سىزىق بىلەن $\odot O$ ئۆزئارا ئۇرۇنىدۇ دەپ پەرەز قىلايلى. p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بولىدۇ-

دىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت شەرتنىڭ يېتەرلىكلىكى ($p \Rightarrow q$) بىلەن زۆرۈرلۈكى ($q \Rightarrow p$) نى ئىسپاتلىساقلا كۇپايە قىلىدۇ.

ئىسپات: 1.2.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك، $l \perp OP$ نى ئۈتكۈزسەك (تىك ئاساسى P)، ئۇ هالدا $OP=d$ بولىدۇ.

(1) يېتەرلىكلىكى ($p \Rightarrow q$): ئەگەر $d=r$ بولسا، ئۇ هالدا P نۇقتا $\odot O$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. l تۈز سىزىق ئۈستىدىن خالىغان بىر Q نۇقتا (P نۇقتىدىن باشقا)نى ئېلىپ، O بىلەن Q نى تۇتاشتۇرىمىز. $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$ دا، $OQ>OP=r$. شۇنىڭ ئۈچۈن، l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى P نۇقتىدىن باشقا نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى $\odot O$ نىڭ سىرتىدا ياتىدۇ، يەنى l تۈز سىزىق بىلەن $\odot O$ پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتا P غا ئىگە بولىدۇ. شۇڭا، l تۈز سىزىق بىلەن $\odot O$ ئۆزئارا ئۇرىنىدۇ.

(2) زۆرۈرلۈكى ($q \Rightarrow p$): ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن $\odot O$ ئۆزئارا ئۇرۇنسا، ئۇرۇنۇش نۇقتىسىنى P دەپ ئالساق، ئۇ هالدا $OP \perp l$ بولىدۇ. شۇڭا، $d=OP=r$.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى «ئەگەر p بولسا، ئۇ هالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە بېرىلگەن ھۆكۈملەر توغرا ھۆكۈملۈكمۇ؟ ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى توغرا ھۆكۈملۈكمۇ؟ p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

(1) ئەگەر α تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتىكى بىر تۈز سىزىق بىلەن پاراللېل بولسا، ئۇ هالدا a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ؛

(2) ئەگەر سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=n+c$ (c تۇراقلىق سان) بولسا، ئۇ هالدا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ ئومۇمىي ئايرىمىسى 1 گە تەڭ بولغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى بولىدۇ؛

(3) ئەگەر a تۈز سىزىق α تەكشىلىكتىكى ئىككى تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ هالدا a تۈز سىزىق α تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى مىساللاردا، p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

(1) p: $x^2=3x+4$, q: $x=\sqrt{3x+4}$;

(2) p: $x-3=0$, q: $(x-3)(x-4)=0$;

(3) p: $b^2-4ac \geqslant 0$ ($a \neq 0$)، q: $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) نىڭ ھەقىقىي يىلتىزى بار؛

(4) p: $x=1$ تەڭلىمە $ax^2+bx+c=0$ نىڭ بىر يىلتىزى، q: $a+b+c=0$.

2.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ:

(1) p شەرت q نىڭ يېتەرلىك شەرتى؛

(2) p شەرت q نىڭ زۆرۈر شەرتى؛

(3) p شەرت q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى.

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) «$a>b$» «$a^2>b^2$» بولۇش بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى؛

(2) «$|a|>|b|$» «$a^2>b^2$» بولۇش بولۇشنىڭ زۆرۈر شەرتى؛

(3) «$a>b$» «$a+c>b+c$» بولۇش بولۇشنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى.

3. تۆۋەندىكى مىساللاردا، p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

(1) p: $x=1$, q: $x-1=\sqrt{x-1}$;

(2) p: $|x-2|\leqslant 3$, q: $-1\leqslant x\leqslant 5$;

(3) p: $x=2$, q: $x-3=\sqrt{3-x}$;

(4) p: بىر ئۈچبۇلۇڭ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ، q: بىر ئۈچبۇلۇڭ تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ.

4. چەمبەر $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نىڭ كوئوردىنات بېشىدىن ئۆتۈشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكىلەر بېرىلگەن:

$A=\{x|$ x p لەر شەرتنى قانائەتلەندۈرىدۇ$\}$,

$B=\{x|$ x q لەر شەرتنى قانائەتلەندۈرىدۇ$\}$.

(1) ئەگەر $A\subseteq B$ بولسا، ئۇ ھالدا p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

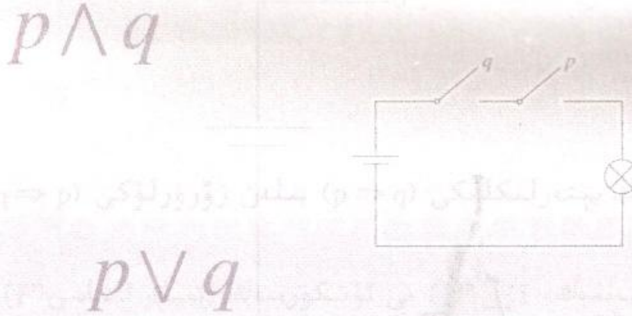
(2) ئەگەر $B\subseteq A$ بولسا، ئۇ ھالدا p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

(3) ئەگەر $A=B$ بولسا، ئۇ ھالدا p شەرت q نىڭ قانداق شەرتى بولىدۇ؟

2. ئىسپاتلاڭ: $\triangle ABC$ نىڭ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,$$

بۇ يەردىكى a، b، c لار $\triangle ABC$ نىڭ ئۈچ تەرىپى.



CHAPTER 1

3-1 ئاددىي لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار

ماتېماتىكىدا، بەزىدە «ھەمدە»، «ياكى»، «ئەمەس (بولمايدۇ، بولمىسا)» دېگەندەك باغلىغۇچىلار قوللىنىلىدۇ. بىز تۇرمۇشتىمۇ بۇ باغلىغۇچىلارنى قوللىنىمىز، لېكىن ئۇلارنىڭ مەنىسى ۋە ئىشلىتىلىش ئۇسۇلى ماتېماتىكىدىكى مەنىسى ۋە ئىشلىتىلىش ئۇسۇلىغا ئوخشىشىپ كەتمەيدۇ. تۆۋەندە ماتېماتىكىدا قوللىنىلىدىغان باغلىغۇچى «ھەمدە»، «ياكى»، «ئەمەس» لەرنىڭ ھۆكۈملۈكلەرنى باغلىغان چاغدىكى مەنىسى ۋە ئىشلىتىلىش ئۇسۇلىنى تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.

بايان قىلىشقا ئاسان بولۇش ئۈچۈن، بۇنىڭدىن كېيىن ھۆكۈملۈكلەرنى لاتىنچە كىچىك ھەرپ p، q، r، s، ⋯ لار بىلەن ئىپادىلەيمىز.

1-3-1 ھەمدە (and)

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى ئۈچ ھۆكۈملۈك ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) 12 بولسا 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(2) 12 بولسا 4 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(3) 12 بولسا 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ ھەمدە 4 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ.

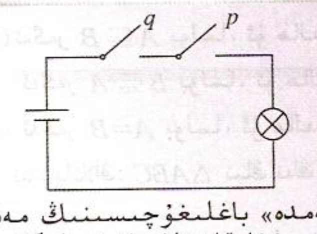
بۇنىڭدىن (3) ھۆكۈملۈكنىڭ (1) ۋە (2) ھۆكۈملۈكنى «ھەمدە» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاشتىن كېلىپ چىقىرىلغان يېڭى ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز.

ئومۇمەن، p ھۆكۈملۈك ۋە q ھۆكۈملۈكنى باغلىغۇچى «ھەمدە» بىلەن باغلىساق، بىر يېڭى ھۆكۈملۈك كېلىپ چىقىدۇ، ئۇنى

$$p \wedge q$$

قىلىپ يېزىپ، «p ھەمدە q» دەپ ئوقۇيمىز.

ھۆكۈملۈك $p \wedge q$ نىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىنى قانداق ئېنىقلايمىز؟



«ھەمدە» باغلىغۇچىسىنىڭ مەنىسىنى ئارقىمۇئارقا ئۇلانغان ئېلېكتر زەنجىرىدىن پايدىلىنىپ چۈشىنىۋالالايمىز. ئەگەر ئۈزچات (ۋىكلىيۇچاتېل) p، q نىڭ ئۇلىنىشى ۋە ئۈزۈلۈشى ئايرىم ـ ئايرىم ھۆكۈملۈك p، q نىڭ توغرا ۋە ناتوغرىلىقىغا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا پۈتكۈل ئېلېكتر زەنجىرىنىڭ ئۇلىنىشى ۋە ئۈزۈلۈشى ئايرىم ـ ئايرىم ھۆكۈملۈك $p \wedge q$ نىڭ توغرا ۋە ناتوغرىلىقىغا ماس كېلىدۇ.

ئومۇمەن، مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:

p، q ئىككى ھۆكۈملۈكنىڭ ھەر ئىككىسى توغرا ھۆكۈملۈك بولغاندا، $p \wedge q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ p، q ئىككى ھۆكۈملۈكنىڭ بىرى ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغاندا، $p \wedge q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

يۇقىرىقى «مۇلاھىزە»دىكى (1)، (2) ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەر ئىككىسى توغرا ھۆكۈملۈك، شۇنىڭ ئۈچۈن، (3) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى «ھەمدە» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاپ يېڭى ھۆكۈملۈك ھاسىل قىلايلى، ئاندىن يېڭى ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) p: پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ، q: پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى تەڭ بولىدۇ؛

(2) p: رومبىنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك، q: رومبىنىڭ دىئاگوناللىرى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ؛

(3) p: 35 بولسا 15 نىڭ ھەسسىلىكى، q: 35 بولسا 7 نىڭ ھەسسىلىكى.

يېشىش: (1) $p \wedge q$: پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ ھەمدە تەڭ بولىدۇ.

p توغرا ھۆكۈملۈك، q ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقى ئۈچۈن، $p \wedge q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) $p \wedge q$: رومبىنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ھەمدە بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ.

p توغرا ھۆكۈملۈك، q مۇ توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقى ئۈچۈن، $p \wedge q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(3) $p \wedge q$: 35 بولسا 15 نىڭ ھەسسىلىكى ھەمدە 7 نىڭ ھەسسىلىكى.

p ناتوغرا ھۆكۈملۈك، q توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقى ئۈچۈن، $p \wedge q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ھەمدە» دىن پايدىلىنىپ ئۆزگەرتىپ يازايلى ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) 1 ھەم تاق سان، ھەم تۈپ سان؛

(2) 2 بىلەن 3 نىڭ ھەر ئىككىسى تۈپ سان.

يېشىش: (1) «1 ھەم تاق سان، ھەم تۈپ سان» دېگەن ھۆكۈملۈكنى «1 تاق سان ھەمدە تۈپ سان» دەپ يېزىشقا بولىدۇ. «1 تۈپ سان» دېگەن ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقى ئۈچۈن، بۇ ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) «2 بىلەن 3 نىڭ ھەر ئىككىسى تۈپ سان» دېگەن ھۆكۈملۈكنى «2 تۈپ سان ھەمدە 3 تۈپ سان» دەپ يېزىشقا بولىدۇ. «2 تۈپ سان» ۋە «3 تۈپ سان» دېگەن ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەر ئىككىسى توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقى ئۈچۈن، بۇ ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

2-3-1 ياكى (or)

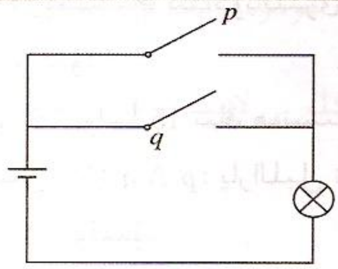
مۇلاھىزە

تۆۋەندىكى ئۈچ ھۆكۈملۈك ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) 27 بولسا 7 نىڭ ھەسسىلىكى؛

(2) 27 بولسا 9 نىڭ ھەسسىلىكى؛

(3) 27 بولسا 7 نىڭ ھەسسىلىكى ياكى 9 نىڭ ھەسسىلىكى.



«ياكى» باغلىغۇچىسىنىڭ مەنىسىنى يانداش ئۇلانغان ئېلېكتر زەنجىرىدىن پايدىلىنىپ چۈشىنىۋالالايمىز. ئەگەر ئۈزچات p، q نىڭ ئۇلىنىشى ۋە ئۈزۈلۈشى ئايرىم - ئايرىم ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ۋە ناتوغرىلىقىغا ماس كەلسە، ئۇ ھالدا پۈتكۈل ئېلېكتر زەنجىرىنىڭ ئۇلىنىشى ۋە ئۈزۈلۈشى ئايرىم - ئايرىم ھۆكۈملۈك $p \vee q$ نىڭ توغرا ۋە ناتوغرىلىقىغا ماس كېلىدۇ.

(3) ھۆكۈملۈك (1) ھۆكۈملۈك ۋە (2) ھۆكۈملۈكنى «ياكى» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاشتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يېڭى ھۆكۈملۈك.

ئومۇمەن، p ھۆكۈملۈك ۋە q ھۆكۈملۈكنى باغلىغۇچى «ياكى» بىلەن باغلىساق، بىر يېڭى ھۆكۈملۈك كېلىپ چىقىدۇ، ئۇنى

$$p \vee q$$

قىلىپ يېزىپ، «p ياكى q» دەپ ئوقۇيمىز.

ھۆكۈملۈك $p \vee q$ نىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىنى قانداق ئېنىقلايمىز؟

ئومۇمەن، مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز:

p، q ئىككى ھۆكۈملۈكنىڭ بىرى توغرا ھۆكۈملۈك بولغاندا، $p \vee q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ p، q ئىككى ھۆكۈملۈكنىڭ ھەر ئىككىسى ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغاندا، $p \vee q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

يۇقىرىقى «مۇلاھىزە»دىكى (1) ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك، (2) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، شۇنىڭ ئۈچۈن، (3) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

3 - مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا - ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) $2 \leqslant 2$;

(2) A توپلام $A \cap B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى ياكى $A \cup B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى؛

(3) ئايلانما ئۈزۈنلۈقلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ ياكى يۈزلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ.

يېشىش: (1) ھۆكۈملۈك «$2 \leqslant 2$» بولسا ھۆكۈملۈك

$$p: 2=2; \quad q: 2 < 2$$

لارنى «ياكى» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاشتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يېڭى ھۆكۈملۈك، يەنى $p \vee q$.

p ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، ھۆكۈملۈك $p \vee q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) «A توپلام $A \cap B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى ياكى $A \cup B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى» دېگەن ھۆكۈملۈك

p: A ھۆكۈملۈك $A \cap B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى؛

q: A ھۆكۈملۈك $A \cup B$ نىڭ قىسمىي توپلىمى

دېگەن ئىككى ھۆكۈملۈكنى «ياكى» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاشتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يېڭى ھۆكۈملۈك، يەنى $p \vee q$.

q ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، ھۆكۈملۈك $p \vee q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(3) «ئايلانما ئۈزۈنلۇقلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ ياكى يۈزلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ» دېگەن ھۆكۈملۈك

p: ئايلانما ئۈزۈنلۇقلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ؛

q: يۈزلىرى تەڭ بولغان ئىككى ئۈچبۇلۇڭ تەڭ بولىدۇ

دېگەن ئىككى ھۆكۈملۈكنى «ياكى» باغلىغۇچىسى بىلەن باغلاشتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يېڭى ھۆكۈملۈك، يەنى $p \vee q$.

p، q ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەر ئىككىسى ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، ھۆكۈملۈك $p \vee q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر $p \wedge q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا $p \vee q$ چوقۇم توغرا ھۆكۈملۈك بولامدۇ؟ ئەكسىچە، ئەگەر $p \vee q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا $p \wedge q$ چوقۇم توغرا ھۆكۈملۈك بولامدۇ؟

1-3-3 ئەمەس (not)

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى ئىككى ھۆكۈملۈك ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) 35 بولسا 5 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(2) 35 بولسا 5 كە پۈتۈن بۆلۈنمەيدۇ.

بۇنىڭدىن (2) ھۆكۈملۈك (1) ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز.

ئومۇمەن، بىر p ھۆكۈملۈكنى پۈتۈنلەي ئىنكار قىلىش ئارقىلىق، بىر يېڭى ھۆكۈملۈكنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز، ئۇنى

$$\neg p$$

قىلىپ يېزىپ، «p ئەمەس» ياكى «p نىڭ ئىنكار قىلىنىشى» دەپ ئوقۇيمىز.

بۇ يەردىكى ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى بىلەن 2.1.1 ـ دىكى ئىنكار ھۆكۈملۈكنىڭ پەرقىگە دىققەت قىلىڭ.

يۇقىرىقى «مۇلاھىزە»دىكى (1) ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، (2) ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولۇپ، p¬ ھۆكۈملۈك p نىڭ ئىنكار قىلىنىشى بولغانلىقتىن، p¬ بىلەن p بىرلا ۋاقىتتا توغرا ھۆكۈملۈك بولمايدۇ، شۇنداقلا بىرلا ۋاقىتتا ناتوغرا ھۆكۈملۈكمۇ بولمايدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا:

ئەگەر p توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا p¬ جەزمەن ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ ئەگەر p ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا p¬ جەزمەن توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

4 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يازايلى ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) p: $y=\sin x$ دەۋرىي فۇنكسىيە؛

(2) p: $3<2$;

(3) p: بوش توپلام A توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى بولىدۇ.

يېشىش: (1) $\neg p$: $y=\sin x$ دەۋرىي فۇنكسىيە ئەمەس.

p ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، p¬ ھۆكۈملۈك بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك.

(2) $\neg p$: $3 \geqslant 2$.

p ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك، p¬ ھۆكۈملۈك بولسا توغرا ھۆكۈملۈك.

(3) $\neg p$: بوش توپلام A توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمى ئەمەس.

p ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك، p¬ ھۆكۈملۈك بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) 12بولسا 48 نىڭ ھەممە 36 نىڭ بۆلگۈچىسى؛

(2) تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ھەمدە بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ.

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) 47 بولسا 7 نىڭ ھەسسىلىكى ياكى 49 بولسا 7 نىڭ ھەسسىلىكى؛

(2) تەڭ يانلىق تراپېتسىيىنىڭ دىئاگوناللىرى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ ياكى ئۆزئارا تىك بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىپ، ئاندىن ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $2+2=5$;

(2) 3 بولسا تەڭلىمە $x^2-9=0$ نىڭ يىلتىزى؛

(3) $\sqrt{(-1)^2}=-1$.

3.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۆكلەرنى يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $p \vee q$، بۇ يەردە p: $4 \in \{2, 3\}$، q: $2 \in \{2, 3\}$؛

(2) $p \wedge q$، بۇ يەردە p: $4 \in \{2, 3\}$، q: $2 \in \{2, 3\}$؛

(3) $p \vee q$، بۇ يەردە p: 2 بولسا جۈپ سان، q: 3 بولسا تۈپ سان ئەمەس؛

(4) $p \wedge q$، بۇ يەردە p: 2 بولسا جۈپ سان، q: 3 بولسا تۈپ سان ئەمەس.

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۆكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $5>2$ ھەمدە $7>3$؛

(2) $3>4$ ياكى $3<4$؛

(3) $7 \geqslant 8$.

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۆكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $\sqrt{2}$ راتسىئونال سان؛

(2) 5 بولسا 15 نىڭ بۆلگۈچىسى ئەمەس؛

(3) $2<3$;

(4) $8+7 \neq 15$;

(5) بوش توپلام ھەرقانداق توپلامنىڭ ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى بولىدۇ.

B گۇرۇپپا

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۆكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەم سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $p \vee q$، بۇ يەردە p: π بولسا ئىرراتسىئونال سان، q: π بولسا ھەقىقىي سان؛

(2) $p \wedge q$، بۇ يەردە p: π بولسا ئىرراتسىئونال سان، q: π بولسا ھەقىقىي سان؛

(3) $p \vee q$، بۇ يەردە p: $2>3$، q: $8+7 \neq 15$؛

(4) $p \wedge q$، بۇ يەردە p: $2>3$، q: $8+7 \neq 15$.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

«ھەمدە»، «ياكى»، «ئەمەس» ۋە «كېسىشىش»، «بىرىكىش»، «تولدۇرۇش»

لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ھەمدە»، «ياكى»، «ئەمەس» بىلەن توپلامنىڭ «كېسىشىش»، «بىرىكىش»، «تولدۇرۇش» ئەمەللىرى ئارىسىدا مۇناسىۋەت بارمۇ؟

ئالدى بىلەن بىر كونكرېت مىسالنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

بىزگە مەلۇمكى، «2 بولسا جۈپ سان» ۋە «2 بولسا تۈپ سان» دېگەن ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەر ئىككىسى توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، «2 بولسا جۈپ سان ھەمدە تۈپ سان» دېگەن توغرا ھۆكۈملۈككە ئىگە بولالايمىز. يەنە بىر تەرەپتىن، $2 \in$ {جۈپ سان}، $2 \in$ {تۈپ سان} بولغانلىقتىن، توپلامنىڭ «كېسىشىش» ئەمىلىگە ئاساسەن $2 \in$ {تۈپ سان} $\bigcap$ {جۈپ سان} غا ئىگە بولالايمىز. ئەگەر «توغرا»نى «$\in$» غا، «ھەمدە»نى «كېسىشىش»كە ماس كەلتۈرسەك، ئۇ ھالدا «2 بولسا جۈپ سان دېگىنىمىز توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ»نى $2 \in$ {جۈپ سان} غا، «2 بولسا تۈپ سان دېگىنىمىز توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ»نى $2 \in$ {تۈپ سان} غا، «2 بولسا جۈپ سان ھەمدە تۈپ سان دېگىنىمىز توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ»نى $2 \in$ {تۈپ سان} $\bigcap$ {جۈپ سان} غا ماس كەلتۈرۈشكە بولىدۇ.

يۇقىرىقى مىسالدىن ئىلھام ئېلىپ، لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ھەمدە» بىلەن توپلامنىڭ «كېسىشىش» ئەمىلى ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تۈرغۇزالايمىز.

بىزگە مەلۇمكى، لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ھەمدە» ھەققىدە تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىمە بار:

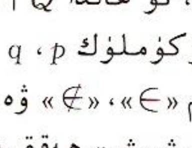
ئەگەر p ، q نىڭ ھەر ئىككىسى توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا $p \wedge q$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ ئەگەر p ، q لارنىڭ ئىچىدە ناتوغرا ھۆكۈملۈك بار بولسا، ئۇ ھالدا $p \wedge q$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

توپلامنىڭ «كېسىشىش» ئەمىلى ھەققىدە تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىمە بار:

ئەگەر $a \in P$ ، $a \in Q$ بولسا، ئۇ ھالدا $a \in P \bigcap Q$ بولىدۇ؛ ئەگەر $a \notin P$ ياكى $a \notin Q$ بولسا، ئۇ ھالدا $a \notin P \bigcap Q$ بولىدۇ.

ھۆكۈملۈك p ، q نى ئايرىم ـ ئايرىم توپلام P ، Q غا، «توغرا»، «ناتوغرا» ۋە «$\wedge$» نى ئايرىم ـ ئايرىم «$\in$»، «$\notin$» ۋە «$\bigcap$» غا ماس كەلتۈرسەك، ئۇ ھالدا يۇقىرىدا بايان قىلىنغان «ھەمدە» ۋە «كېسىشىش» ھەققىدىكى بەلگىلىمىلەر شەكىل جەھەتتە بىردەكلىككە ئىگە بولىدۇ. كونكرېت ئېيتقاندا، «p بولسا توغرا ھۆكۈملۈك» دېگىنىمىز «$a \in P$» غا، «q بولسا توغرا ھۆكۈملۈك» دېگىنىمىز «$a \in Q$» غا، «$p \wedge q$ بولسا توغرا ھۆكۈملۈك» دېگىنىمىز «$a \in P \bigcap Q$» غا، «$p \wedge q$ بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك» دېگىنىمىز «$a \notin P \bigcap Q$»غا ماس كېلىدۇ.

ئىزدىنىش



لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ياكى» بىلەن توپلامنىڭ «بىرىكىش» ئەمىلى ھەققىدىكى بەلگىلىمىلەرنىڭ شەكىل جەھەتتىكى بىردەكلىكىنى بايقىيالامسىز؟

لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ئەمەس» بىلەن توپلامنىڭ «تولدۇرۇش» ئەمىلىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

يەنە بىر كونكرېت مىسالنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

ئەگەر پۈتۈن سانلار توپلىمىنى تولۇق توپلام دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا جۈپ سانلار توپلىمى بىلەن تاق سانلار توپلىمى ئۆزئارا تولدۇرغۇچى توپلاملار بولىدۇ. «2 بولسا جۈپ سان» دېگىنىمىز توغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، «2 بولسا تاق سان» دېگىنىمىز ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ «3 بولسا جۈپ سان» دېگىنىمىز ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولغانلىقتىن، «3 بولسا تاق سان» دېگىنىمىز توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ. بۇلارنى توپلام شەكلىدىن پايدىلىنىپ مۇنداق بايان قىلىشقا بولىدۇ: $2 \in \{\text{جۈپ سان}\}$ بولغانلىقتىن، $2 \notin \{\text{تاق سان}\}$ بولىدۇ؛ $3 \notin \{\text{جۈپ سان}\}$ بولغانلىقتىن، $3 \in \{\text{تاق سان}\}$ بولىدۇ. ئەگەر «ئەمەس»، «توغرا» ۋە «ناتوغرا» نى ئايرىم ـ ئايرىم «تولدۇرۇش»، «$\in$» ۋە «$\notin$» كە ماس كەلتۈرسەك، ئۇ ھالدا p ھۆكۈملۈك بىلەن ئۇنىڭ ئىنكار قىلىنىشى $\neg p$ نى P توپلام بىلەن ئۇنىڭ تولدۇرغۇچى توپلىمى $\complement_U P$ غا، «p بولسا توغرا ھۆكۈملۈك»نى «$a \in P$» غا، «$\neg p$ بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك» نى «$a \notin \complement_U P$» غا، «p بولسا ناتوغرا ھۆكۈملۈك» نى «$a \notin P$»غا، «$\neg p$ بولسا توغرا ھۆكۈملۈك»نى «$a \in \complement_U P$» غا ماس كەلتۈرۈشكە بولىدۇ.

ئومۇمەن، لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ئەمەس» ھەققىدە تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىمە بار:

ئەگەر p توغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا $\neg p$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ؛ ئەگەر p ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولسا، ئۇ ھالدا $\neg p$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

توپلامنىڭ «تولدۇرۇش» ئەمىلى ھەققىدە تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىمە بار:

U تولۇق توپلام، $P \subseteq U$ دەپ پەرەز قىلىنغاندا، ئەگەر $a \in P$ بولسا، ئۇ ھالدا $a \notin \complement_U P$ بولىدۇ؛ ئەگەر $a \notin P$ بولسا، ئۇ ھالدا $a \in \complement_U P$ بولىدۇ.

ئىزدىنىش

«ھەمدە» بىلەن «كېسىشىش»نىڭ باغلىنىشىغا تەققاسلاپ (ئوخشىتىش، ئانالوگىيە دەپمۇ ئاتىلىدۇ) ھەم يۇقىرىقى مىسالغا بىرلەشتۈرۈپ، لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ئەمەس» بىلەن توپلامنىڭ «تولدۇرۇش» ئەمىلى ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋىتىنى تۇرغۇزالامسىز؟

يۇقىرىقى مۇھاكىمىلەردىن بايقىيالايمىزكى، ھۆكۈملۈك بىلەن توپلام ئارىسىدا ماسلىق مۇناسىۋىتىنى تۇرغۇزۇشقا بولىدۇ. بۇنداق ماسلىق تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار بىلەن توپلام ئەمەللىرى بىردەكلىككە ئىگە بولىدۇ، ھۆكۈملۈكتىكى «ھەمدە»، «ياكى»، «ئەمەس» ئايرىم ـ ئايرىم توپلامدىكى «كېسىشىش»، «بىرىكىش»، «تولدۇرۇش» ئەمەللىرىگە ماس كېلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار ھەققىدىكى بەلگىلىمىلەرنى توپلام تۇرغۇسىدىن يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ بىلىۋالالايمىز.

$\forall x\in M,\ p(x)$

$\exists x_0\in M,\ p(x_0)$

CHAPTER 1

4-1 ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز ۋە مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز

1-4-1 ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز

مۇلاھىزە؟

تۆۋەندىكى جۈملىلەر ھۆكۈملۈكمۇ؟ (1) بىلەن (3)، (2) بىلەن (4) ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) $x>3$;

(2) $2x+1$ بولسا پۈتۈن سان؛

(3) بارلىق $x\in\mathbf{R}$ غا نىسبەتەن، $x>3$ بولىدۇ؛

(4) خالىغان بىر $x\in\mathbf{Z}$ قا نىسبەتەن، $2x+1$ پۈتۈن سان بولىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، ھۆكۈملۈك دېگىنىمىز توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدىغان بايان جۈملىدۇر. (1) جۈملە بىلەن (2) جۈملە ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نى ئۆز ئىچىگە ئالغان بولۇپ، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x قانداق سانغا ۋەكىللىك قىلىدىغانلىقى نامەلۇم بولغانلىقتىن، ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولمايدۇ، شۇڭا ئۇلار ھۆكۈملۈك ئەمەس. (3) جۈملىدە (1) جۈملە ئاساسىدا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x كە «بارلىق ··· نىسبەتەن» دېگەن سۆز بىرىكمىسى بىلەن، (4) جۈملىدە بولسا (2) جۈملە ئاساسىدا ئۆزگەرگۈچى مىقدار x كە «خالىغان بىر ··· نىسبەتەن» دېگەن سۆز بىرىكمىسى بىلەن چەكلىمە قويۇلۇپ، بۇ ئارقىلىق (3)، (4) جۈملىلەر توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدىغان جۈملىگە ئايلاندۇرۇلغان، شۇڭا (3)، (4) جۈملىلەر ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

كۆپ ئۇچرايدىغان ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆزدىن يەنە «ھەربىر ··· نىسبەتەن»، «خالىغانچە (ئىختىيارىي) بېرىلگەن»، «بارلىق···» دېگەندەك سۆز بىرىكمىلىرىمۇ بار.

«بارلىق ··· نىسبەتەن»، «خالىغان بىر ··· نىسبەتەن» دېگەن سۆز بىرىكمىلىرى لوگىكىدا **ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز** (universal quantifier) دەپ ئاتىلىدۇ ۋە «$\forall$» بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈك **ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك** دەپ ئاتىلىدۇ.

مەسىلەن،

خالىغان $n\in\mathbf{Z}$ قا نىسبەتەن $2n+1$ تاق سان بولىدۇ؛

بارلىق كۋادراتلار تىك تۆتبۇلۇڭ بولىدۇ

دىگەندەك ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەممىسى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

ئادەتتە، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نى ئۆز ئىچىگە ئالغان جۈملە $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$، ··· لار بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى M بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، «M دىكى خالىغان بىر x كە نىسبەتەن $p(x)$ كۈچكە ئىگە بولىدۇ» دېگەن ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكنى بەلگە بىلەن قىسقىچە مۇنداق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\forall\ x \in M,\ p(x),$$

ئۇنى «M غا تەۋە خالىغان x كە نىسبەتەن $p(x)$ كۈچكە ئىگە بولىدۇ» دەپ ئوقۇيمىز.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) بارلىق تاق سانلار تاق سانلاردۇر؛

(2) $\forall\ x \in \mathbf{R},\ x^2+1 \geqslant 1$;

(3) ھەربىر ئىرراتسىئونال سان x كە نىسبەتەن، x^2 مۇ ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ.

تەھلىل: ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك «$\forall\ x \in M$، $p(x)$» نىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ئۈچۈن، M توپلامدىكى ھەربىر ئېلېمېنت x كە نىسبەتەن، $p(x)$ نىڭ كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش كېرەك؛ ئەگەر M توپلامدىن $p(x_0)$ نى كۈچكە ئىگە قىلمايدىغان بىر ئېلېمېنت x_0 نى تاپقىلى بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

يېشىش: (1) 2 بولسا تۈپ سان، لېكىن 2 تاق سان ئەمەس. شۇنىڭ ئۈچۈن، «بارلىق تۈپ سانلار تاق سانلاردۇر» دېگەن ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) $\forall\ x \in \mathbf{R}$، ھامان $x^2 \geqslant 0$ بولىدۇ، شۇڭا $x^2+1 \geqslant 1$. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك «$\forall\ x \in \mathbf{R},\ x^2+1 \geqslant 1$» توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(3) $\sqrt{2}$ ئىرراتسىئونال سان، لېكىن $(\sqrt{2})^2=2$ راتسىئونال سان. شۇنىڭ ئۈچۈن، «ھەربىر ئىرراتسىئونال سان x كە نىسبەتەن، x^2 مۇ ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ» دېگەن ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

2-4-1 مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز

مۇلاھىزە ؟

تۆۋەندىكى جۈملىلەر ھۆكۈملۈكمۇ؟ (1) بىلەن (3)، (2) بىلەن (4) ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

(1) $2x+1=3$;

(2) x بولسا 2 بىلەن 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(3) $2x_0+1=3$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر $x_0 \in \mathbf{R}$ مەۋجۇت؛

(4) كەم دېگەندە بىر $x_0 \in \mathbf{Z}$ بار بولۇپ، بۇ x_0 پۈتۈن سان 2 بىلەن 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ.

(1) بىلەن (2) نىڭ ھۆكۈملۈك ئەمەس ئىكەنلىكىگە ئاسانلا ھۆكۈم قىلالايمىز. (3) جۈملىدە (1) جۈملە ئاساسىدا، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممەت ئېلىشىغا «بىر ··· مەۋجۇت» دېگەن سۆز بىرىك-

مىسى بىلەن؛ (4) جۈملىدە (2) جۈملە ئاساسىدا، ئۆزگەرگۈچى مىقدار x نىڭ قىممەت ئېلىشىغا «كەم دېگەندە بىر ⋯ بار» دېگەن سۆز بىرىكمىسى بىلەن چەكلىمە قويۇلۇپ، بۇ ئارقىلىق (3)، (4) جۈملىلەر توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدىغان جۈملىگە ئايلاندۇرۇلغان، شۇڭا (3)، (4) جۈملىلەر ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

كۆپ ئۇچرايدىغان مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆزىدىن يەنە «بەزى⋯ »، «بىر ⋯ بار»، «مەلۇم بىر ⋯ نىسبەتەن» دېگەندەك سۆز بىرىكمىلىرى بار.

«بىر ⋯ مەۋجۇت»، «كەم دېگەندە بىر ⋯ بار» دېگەن سۆز بىرىكمىلىرى لوگىكىدا ئادەتتە **مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز** (existential quantifier) دەپ ئاتىلىدۇ ۋە « ∃ » بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆزىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈك **ئالاھىدە ھۆكۈملۈك** دەپ ئاتىلىدۇ.

مەسىلەن:

بەزى پاراللېل تۆت تەرەپلىكلەر رومبا بولىدۇ؛

تاق سان بولمىغان بىر تۈپ سان بار

دېگەندەك ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ھەممىسى ئالاھىدە ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

«M دا $p(x_0)$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر ئېلېمېنت x_0 مەۋجۇت» دېگەن ئالاھىدە ھۆكۈملۈكنى بەلگە بىلەن قىسقىچە مۇنداق ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\exists x_0 \in M,\ p(x_0),$$

بۇنى «M دا $p(x_0)$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر ئېلېمېنت x_0 مەۋجۇت (ياكى M غا تەۋە x_0 مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $p(x_0)$ كۈچكە ئىگە بولىدۇ)» دەپ ئوقۇيمىز.

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئالاھىدە ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) $x_0^2+2x_0+3=0$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر ھەقىقىي سان x_0 بار؛

(2) ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ھەم ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تەكشىلىك مەۋجۇت؛

(3) بەزى پۈتۈن سانلارنىڭ پەقەت ئىككىلا مۇسبەت كۆپەيتكۈچىسى بار.

تەھلىل: ئالاھىدە ھۆكۈملۈك «$\exists x_0 \in M,\ p(x_0)$» نىڭ توغرا ھۆكۈملۈك ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ئۈچۈن، پەقەت M توپلامدىن $p(x_0)$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر ئېلېمېنت x_0 نى تاپساقلا بولىدۇ؛ ئەگەر M توپلامدا $p(x)$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان x ئېلېمېنت مەۋجۇت بولمىسا، ئۇ ھالدا بۇ ئالاھىدە ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

يېشىش: (1) $\forall x \in \mathbf{R}$ ، $x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \geqslant 2$ بولغانلىقتىن، $x^2+2x+3=0$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان ھەقىقىي سان x مەۋجۇت بولمايدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، «$x_0^2+2x_0+3=0$ نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر ھەقىقىي سان x_0 بار» دېگەن ئالاھىدە ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ئىككى تەكشىلىك ئۆزئارا پاراللېل بولىدىغانلىقتىن، ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ھەم ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تەكشىلىك مەۋجۇت بولمايدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، «ئوخشاش بىر تۈز سىزىقتا تىك بولغان ھەم ئۆزئارا كېسىشكەن ئىككى تەكشىلىك مەۋجۇت» دېگەن ئالاھىدە ھۆكۈملۈك ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(3) پۈتۈن سان 3 نىڭ 1 ۋە 3 تىن ئىبارەت پەقەت ئىككىلا مۇسبەت كۆپەيتكۈچىسى بار، شۇڭا «بەزى پۈتۈن سانلارنىڭ پەقەت ئىككىلا مۇسبەت كۆپەيتكۈچىسى بار» دېگەن ئالاھىدە ھۆكۈملۈك توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۆكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) ھەربىر كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە مونوتون فۇنكسىيىدۇر؛

(2) ھەرقانداق ھەقىقىي ساننىڭ ئارىفمېتىكىلىق كۋادرات يىلتىزى بار؛

(3) $\forall x\in\{x|x$ ئىرراتسىئونال سان$\}$، x^2 ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى ئالاھىدە ھۆكۈملۆكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $\exists\ x_0\in \mathbf{R},\ x_0\leqslant 0;$

(2) كەم دېگەندە بىر پۈتۈن سان بار بولۇپ، ئۇ ھەم مۇرەككەپ سان ئەمەس، ھەم تۈپ سان ئەمەس؛

(3) $\exists\ x_0\in\{x|x$ ئىرراتسىئونال سان$\}$، x_0^2 ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ.

3-4-1 بىر مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۆكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى

ئىزدىنىش

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۆكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يازايلى:

(1) بارلىق تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ ھەممىسى پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ؛

(2) ھەربىر تۈپ سان تاق سان بولىدۇ؛

(3) $\forall\ x\in \mathbf{R},\ x^2-2x+1\geqslant 0.$

بۇ ھۆكۈملۆكلەر بىلەن ئۇلارنىڭ ئىنكار قىلىنىشى شەكىل جەھەتتە قانداق ئۆزگەرگەن؟

يۇقىرىقى ئۈچ ھۆكۈملۆكنىڭ ھەممىسى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۆك بولۇپ، «$\forall\ x\in M$، $p(x)$» شەكلىدە بېرىلگەن. بۇلارنىڭ ئىچىدىكى (1) ھۆكۈملۆكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: «بارلىق تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ ھەممىسىلا پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولۇپ كەتمەيدۇ»، باشقىچە ئېيتقاندا،

پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولمايدىغان بىر تىك تۆتبۇلۇڭ مەۋجۇت؛

(2) ھۆكۈملۆكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: «ھەربىر تۈپ ساننىڭ تاق سان بولۇشى ناتايىن»، باشقىچە ئېيتقاندا،

تاق سان بولمايدىغان بىر تۈپ سان مەۋجۇت؛

(3) ھۆكۈملۆكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: «بارلىق $x\in \mathbf{R}$ غا نىسبەتەن، ھامان $x^2-2x+1\geqslant 0$ بولۇشى ناتايىن»، باشقىچە ئېيتقاندا،

$$\exists\, x_0\in \mathbf{R},\ x_0^2-2x_0+1<0.$$

ھۆكۈملۆك شەكلىدىن قارىغاندا، بۇ ئۈچ ئۇنىۋېرسال ھۆ ـ

بۇ يەردە، «بارلىق تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ ھەممىسىلا پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولۇپ كەتمەيدۇ» دېگەن سۆز بىلەن «بارلىق تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ ھەممىسى پاراللېل تۆت تەرەپلىك ئەمەس» دېگەن سۆزنىڭ پەرقىگە دىققەت قىلىش كېرەك، ئالدىنقىسى «پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولمايدىغان بىر تىك تۆتبۇلۇڭ مەۋجۇت» ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىدۇ، ئۇ باشقا تىك تۆتبۇلۇڭلارنىڭ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولۇشىنى چەتكە قاقمايدۇ.

كۆملۈك ئىنكار قىلىنغاندىن كېيىن ئالاھىدە ھۆكۈملۈككە ئۆزگەرگەن.

ئومۇمەن، بىر مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ھەق-قىدە تۆۋەندىكىدەك يەكۈن بار:

ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك p:

$$\forall\ x \in M,\ p(x),$$

ئۇنىڭ ئىنكار قىلىنىشى $\neg p$:

$$\exists\ x \in \mathrm{M},\ \neg p(x_0).$$

ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ئالاھىدە ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

3 - مىسال. تۆۋەندىكى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يازايلى:

(1) p: 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدىغان بارلىق پۈتۈن سانلارنىڭ ھەممىسى تاق سان؛

(2) p: ھەربىر تۆت تەرەپلىكنىڭ تۆت چوققىسى چەمبەرداش بولىدۇ؛

(3) p: خالىغان $x \in \mathbf{Z}$ كە نىسبەتەن، x^2 نىڭ بىرلەر خانىسىدىكى رەقەم 3 كە تەڭ بولمايدۇ.

يېشىش: (1) $\neg p$: 3 كە پۈتۈن بۆلۈنىدىغان ھەم تاق سان بولمايدىغان بىر پۈتۈن سان مەۋجۇت.

(2) $\neg p$: تۆت چوققىسى چەمبەرداش بولمايدىغان بىر تۆت تەرەپلىك مەۋجۇت.

(3) $\neg p$: $\exists\ x_0 \in \mathbf{Z}$، x_0^2 نىڭ بىرلەر خانىسىدىكى رەقەم 3 كە تەڭ بولىدۇ.

ئىزدىنىش

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ:

(1) بەزى ھەقىقىي سانلارنىڭ مۇتلەق قىممىتى مۇسبەت سان بولىدۇ؛

(2) بەزى پاراللېل تۆت تەرەپلىكلەر رومبا بولىدۇ؛

(3) $\exists x_0 \in \mathbf{R},\ x_0^2+1<0$.

بۇ ھۆكۈملۈكلەر بىلەن ئۇلارنىڭ ئىنكار قىلىنىشى شەكىل جەھەتتە قانداق ئۆزگەرگەن؟

بۇ ئۈچ ھۆكۈملۈكنىڭ ھەممىسى ئالاھىدە ھۆكۈملۈك بولۇپ، «$\exists\ x_0 \in \mathrm{M}$، $p(x_0)$» شەكىلدە بېرىل-گەن. بۇلارنىڭ ئىچىدىكى (1) ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: «مۇتلەق قىممىتى مۇسبەت سان بولى-دىغان بىر ھەقىقىي سان مەۋجۇت ئەمەس»، باشقىچە ئېيتقاندا،

بارلىق ھەقىقىي سانلارنىڭ مۇتلەق قىممەتلىرىنىڭ ھەممىسى مۇسبەت سان ئەمەس؛

(2) ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: «رومبا بولىدىغان بىرمۇ پاراللېل تۆت تەرەپلىك يوق»، باش-قىچە ئېيتقاندا،

ھەربىر پاراللېل تۆت تەرەپلىك ئوخشاشلا رومبا ئەمەس؛

(3) ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى: « $x^2+1<0$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان $x \in \mathbf{R}$ مەۋجۇت ئە-مەس»، باشقىچە ئېيتقاندا،

$$\forall\ x \in \mathbf{R},\ x^2+1 \geqslant 0.$$

ھۆكۈملۈك شەكلىدىن قارىغاندا، بۇ ئۈچ ئالاھىدە ھۆكۈملۈك ئىنكار قىلىنغاندىن كېيىن، ئۇنىۋېر-سال ھۆكۈملۈككە ئۆزگەرگەن.

ئومۇمەن، بىر مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئالاھىدە ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ھەققىدە تۆۋەندىكىدەك يەكۈن بار:

ئالاھىدە ھۆكۈملۈك p:

$$\exists\ x_0 \in M,\ p(x_0),$$

ئۇنىڭ ئىنكار قىلىنىشى $\neg p$:

$$\forall\ x \in M,\ \neg p(x).$$

ئالاھىدە ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

4 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئالاھىدە ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يازايلى:

(1) p: $\exists x_0 \in \mathbf{R},\ x_0^2+2x_0+2 \leqslant 0$;

(2) p: بەزى ئۈچبۇلۇڭلار تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ؛

(3) p: ئۈچ مۇسبەت كۆپەيتكۈچىنى ئۆز ئىچىگە ئالىدىغان بىر تۈپ سان بار.

يېشىش:

(1) $\neg p$: $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2+2x+2>0$.

(2) $\neg p$: بارلىق ئۈچبۇلۇڭلارنىڭ ھەممىسى تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ ئەمەس.

(3) $\neg p$: ھەربىر تۈپ سان ئۈچ مۇسبەت كۆپەيتكۈچىنى ئۆز ئىچىگە ئالمايدۇ.

5 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يازايلى ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلايلى:

(1) p: خالىغان ئىككى تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ ئوخشاش بولىدۇ؛

(2) p: $\exists x_0 \in \mathbf{R},\ x_0^2+2x_0+2=0$.

يېشىش:

(1) $\neg p$: ئوخشاش بولمىغان ئىككى تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ مەۋجۇت.

$\neg p$ ناتوغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

(2) $\neg p$: $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2+2x+2 \neq 0$.

$\neg p$ توغرا ھۆكۈملۈك بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ:

(1) $\forall\ n \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Q}$;

(2) خالىغان تۈپ سان تاق سان بولىدۇ؛

(3) ھەربىر كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە مونوتون فۇنكسىيە بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ:

(1) بەزى ئۈچبۇلۇڭلار تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ؛

(2) بەزى تراپېتسىيىلەر تەڭ يانلىق تراپېتسىيە بولىدۇ؛

(3) مۇتلەق قىممىتى مۇسبەت سان بولمايدىغان بىر ھەقىقىي سان مەۋجۇت.

4.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) ئاخىرقى خانىسى 0 بولغان پۈتۈن سان 5 كە پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

(2) كېسىكنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى ئۈستىدىكى نۇقتىدىن بۇ كېسىكنىڭ ئىككى ئۇچىغىچە بولغان ئارىلىقلار تەڭ؛

(3) مەنپىي ساننىڭ كۋادراتى مۇسبەت سان بولىدۇ؛

(4) تراپېتسىيىنىڭ دىئاگوناللىرى تەڭ.

2. تۆۋەندىكى ئالاھىدە ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) بەزى ھەقىقىي سانلار دەۋرىي بولمىغان چەكسىز ئونلۇق كەسىر بولىدۇ؛

(2) بەزى ئۈچبۇلۇڭلار تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭ ئەمەس؛

(3) بەزى رومبىلار كۋادرات بولىدۇ.

3. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ:

(1) $\forall x \in \mathbf{N}, x^3>x^2$;

(2) 5 كە پۈتۈن بۆلۈنىدىغان بارلىق پۈتۈن سانلارنىڭ ئاخىرقى خانىسىدىكى رەقەم 0 بولىدۇ؛

(3) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2-x_0+1 \leqslant 0$;

(4) بىر تۆت تەرەپلىك مەۋجۇت بولۇپ، ئۇنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك.

B گۇرۇپپا

تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەم بۇ ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ:

(1) ھەربىر تۈز سىزىق y ئوق ئۈستىدە كېسىشىش ئارىلىقى ھاسىل قىلىدۇ؛

(2) ھەربىر ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى x ئوق بىلەن كېسىشىدۇ؛

(3) بىر ئۈچبۇلۇڭ مەۋجۇت بولۇپ، ئۇنىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرىنىڭ يىغىندىسى $180°$ تىن كىچىك؛

(4) سىرتتىن تېگىشكەن چەمبىرى بولمىغان بىر تۆت تەرەپلىك مەۋجۇت.

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى

- كۆپ قوللىنىلىدىغان لوگىكىلىق ئاتالغۇلار
  - ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز / مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز
  - ئاددىي لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار: ھەممىدە، ياكى، ئەمەس
  - يېتەرلىك شەرت / زۆرۈر شەرت / يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرت
  - ھۆكۈملۈك ۋە ھۆكۈملۈكلەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت

II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلغىلى بولىدىغان بايان جۈملە ھۆكۈملۈك دەپ ئاتىلىدۇ. «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدىكى ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى بىلەن يەكۈنىنى ئۆزگەرتىش ئارقىلىق، ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

(1) تەتۈر ھۆكۈملۈكى: ئەگەر q بولسا، ئۇ ھالدا p بولىدۇ؛

(2) ئىنكار ھۆكۈملۈكى: ئەگەر $\neg p$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg q$ بولىدۇ؛

(3) تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكى: ئەگەر $\neg q$ بولسا، ئۇ ھالدا $\neg p$ بولىدۇ.

تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

تۆت خىل ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقى ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىش بىزنىڭ خۇلاسە چىقىرىپ ئىسپاتلاش ئېلىپ بېرىشىمىزغا قۇلايلىق يارىتىپ بېرىدۇ. مەسىلەن، ئەسلىي ھۆكۈملۈك بىلەن ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقى ئوخشاش بولغانلىقتىن، ئەسلىي ھۆكۈملۈكنى ئىسپاتلاش قىيىن بولغاندا، ئۇنىڭ تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى ئىسپاتلاش ئارقىلىق ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ ئىسپاتىغا ئىگە بولالايمىز. بۇنىڭغا دائىر مىساللارنى كەلتۈرەلەمسىز؟

2. ئەگەر p دىن q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا ($p \Rightarrow q$) بولسا، ئۇ ھالدا p نى q نىڭ يېتەرلىك شەرتى، q نى p نىڭ زۆرۈر شەرتى دەيمىز. ئەگەر p دىن q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا ($p \Rightarrow q$) بولسا، ھەم q دىنمۇ p نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا ($q \Rightarrow p$) بولسا، p نى q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى دەيمىز.

3. لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ھەممىدە»، «ياكى»، «ئەمەس» ئايرىم ـ ئايرىم «$\wedge$»، «$\vee$»، «$\neg$» بەلگىلەر بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

ھۆكۈملۈك $p \wedge q$، $p \vee q$، $\neg p$ لارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقى بىلەن p، q لارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى قانداق ئېنىقلايمىز؟

4. ھۆكۈملۈكتىكى «بارلىق … نىسبەتەن»، «خالىغان بىر … » دېگەندەك سۆز بىرىكمىلىرى ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆز دەپ ئاتىلىدۇ ۋە «$\forall$» بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ؛ «مەۋجۇت»، «كەم دېگەندە بىر … بار» دېگەندەك سۆز بىرىكمىلىرى مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆز دەپ ئاتىلىدۇ ۋە «$\exists$» بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. ئۇنىۋېرسال مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈك ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك دەپ ئاتىلىدۇ، مەۋجۇتلۇق مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈك ئالاھىدە ھۆكۈملۈك دەپ ئاتىلىدۇ.

ھۆكۈملۈكلەرنىڭ شەكلىدىن قارىغاندا، ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ئالاھىدە ھۆكۈملۈك بولىدۇ، ئالاھىدە ھۆكۈملۈكنىڭ ئىنكار قىلىنىشى ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈك بولىدۇ. شۇڭا، بىز «ئەكس مىسال كەلتۈرۈش» ئارقىلىق بىر ئۇنىۋېرسال ھۆكۈملۈكنى ئىنكار قىلالايمىز.

بىر مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈكنى قانداق ئىنكار قىلىمىز؟

5. مەسىلىگە باغلىنىش نۇقتىئىنەزىرىدىن قارىساق، ماتېماتىكا بىلىملىرىنى تېخىمۇ چوڭقۇر چۈشىنەلەيمىز. بۇ بابتا، لوگىكىلىق باغلىغۇچىلار بىلەن توپلام ئەمەللىرى، ئېلېكتر زەنجىرىنى ئارقىمۇئارقا ئۇلاش ۋە پاراللېل ئۇلاشنى بىر ـ بىرىگە باغلاش ئارقىلىق باغلىنىش نۇقتىئىنەزىرى گەۋدىلەندۈرۈلگەن. ئۆگىنىشتىن كېيىنكى تەسىراتىڭىزنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. «تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ ئىچكى بۇلۇڭى ئۆزئارا تەڭ» دېگەن ھۆكۈملۈكنى ئەسلىي ھۆكۈملۈك دەپ پەرەز قىلىپ، ئەسلىي ھۆكۈملۈكنى «ئەگەر p بولسا، ئۇ ھالدا q بولىدۇ» دېگەن شەكىلدە يېزىڭ ھەم ئۇنىڭ تەتۈر ھۆكۈملۈكى، ئىنكار ھۆكۈملۈكى ۋە تەتۈر ئىنكار ھۆكۈملۈكىنى يېزىڭ، ئاندىن ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

2. ئايرىم ـ ئايرىم مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ:

(1) p بولسا q نىڭ يېتەرلىك شەرتى، لېكىن زۆرۈر شەرتى ئەمەس؛

(2) p بولسا q نىڭ زۆرۈر شەرتى، لېكىن يېتەرلىك شەرتى ئەمەس؛

(3) p بولسا q نىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى.

3. a ، b ، c لار ھەقىقىي سان ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) «$a>b$» بولۇش «$a^2>b^2$» بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى؛

(2) «$a>b$» بولۇش «$a^2>b^2$» بولۇشنىڭ زۆرۈر شەرتى؛

(3) «$a>b$» بولۇش «$ac^2>bc^2$» بولۇشنىڭ يېتەرلىك شەرتى؛

(4) «$a>b$» بولۇش «$|a|>|b|$» بولۇشنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى.

4. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) 27 بولسا 3 نىڭ ھەسسىلىكى ياكى 27 بولسا 9 نىڭ ھەسسىلىكى؛

(2) 27 بولسا 3 نىڭ ھەسسىلىكى ھەمدە 27 بولسا 9 نىڭ ھەسسىلىكى؛

(3) پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ھەمدە بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ؛

(4) پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرى ئۆزئارا تىك ياكى بىر ـ بىرىنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ؛

(5) 1 بولسا تەڭلىمە $x-1=0$ نىڭ يىلتىزى ھەمدە تەڭلىمە $x^2-5x+4=0$ نىڭمۇ يىلتىزى.

5. مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى « $\forall$ » ۋە « $\exists$ » بەلگە بىلەن ئىپادىلەڭ:

(1) تەبىئىي سانلارنىڭ كۋادراتى نۆلدىن چوڭ بولىدۇ؛

(2) چەمبەر $x^2+y^2=r^2$ ئۈستىدىكى خالىغان بىر P نۇقتىدىن چەمبەر مەركىزى O غىچە بولغان ئارىلىق r بولىدۇ؛

(3) بىر جۈپ پۈتۈن سان x ، y مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $2x+4y=3$ بولىدۇ؛

(4) بىر ئىرراتسىئونال سان مەۋجۇت بولۇپ، ئۇنىڭ كۇبى راتسىئونال سان بولىدۇ.

6. تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنىڭ ئىنكار قىلىنىشىنى يېزىڭ ھەم ئۇلارنىڭ توغرا ـ ناتوغرىلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $3=2$;

(2) $5>4$;

(3) خالىغان ھەقىقىي سان x كە نىسبەتەن، $x>0$ بولىدۇ؛

(4) ھەربىر كۋادرات پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولىدۇ.

B گۇرۇپپا

1. بىر قېتىملىق قارىغا ئېتىش مەشقىدە، مەلۇم بىر جەڭچى ئۇدا ئىككى قېتىم قارىغا ئاتقان. ئۇنىڭ «بىرىنچى قېتىم نىشانغا تەگكۈزگەن»لىكىنى p ھۆكۈملۈك، «ئىككىنچى قېتىم نىشانغا تەگكۈزگەن»لىكىنى q ھۆكۈملۈك دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى ھۆكۈملۈكلەرنى p، q ۋە لوگىكىلىق باغلىغۇچى «ياكى»، «ھەمدە»، «ئەمەس» (∨، ∧، ¬) لەر بىلەن ئىپادىلەڭ:

(1) ئىككىلا قېتىمدا نىشانغا تەگكۈزۈشى؛

(2) ئىككىلا قېتىمدا نىشانغا تەگكۈزەلمەسلىكى.

2. تۆۋەندىكى تېئورېمىلاردا ئىپادىلەنگەن ھۆكۈملۈكلەرنى مىقدار سۆزنى ئۆز ئىچىگە ئالغان ھۆكۈملۈك قىلىپ يېزىڭ:

(1) گوگۇ تېئورېمىسى؛

(2) سىنۇس تېئورېمىسى.

2 - باب

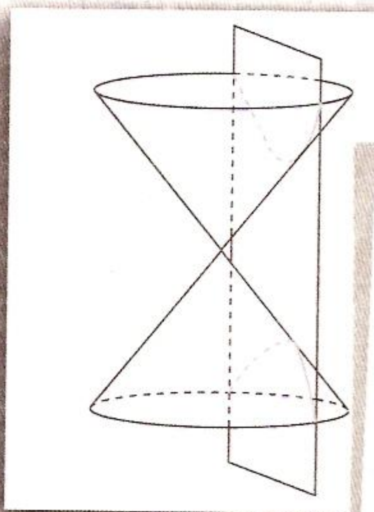
كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى ۋە ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسى

1-2 ئەگرى سىزىق ۋە ئۇنىڭ تەڭلىمىسى

2-2 ئېللىپس

3-2 هىپېربولا

4-2 پارابولا



بىزگە مەلۇمكى، كونۇسنى ئۇنىڭ ئوقىغا تىك بولغان بىر تەكشىلىك بىلەن كەسسەك، كېسىش ئەگرى سىزىقى (كەسمە يۈز بىلەن كونۇس يان سىرتىنىڭ كېسىشىش سىزىقى) بىر چەمبەر بولىدۇ. ئەگەر تەكشىلىك بىلەن كونۇس ئوقىنىڭ ئارا بۇلۇڭىنى ئۆزگەرتسەك، ئۇ هالدا قانداق شەكىل كېلىپ چىقىدۇ؟

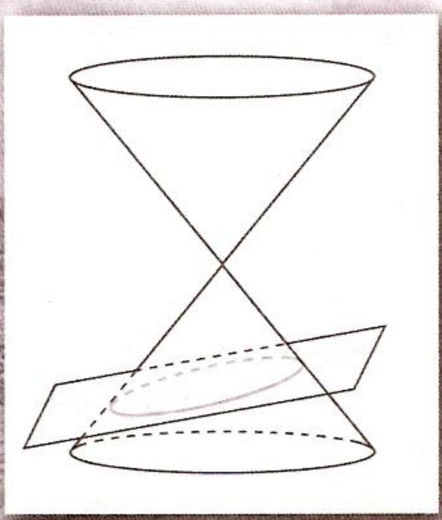
رەسىمدىكىدەك، كونۇسنى ئۇنىڭ ئوقىغا تىك بولمىغان بىر تەكشىلىك بىلەن كەسسەك، كەسمە يۈز بىلەن كونۇس ئوقىنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئوخشاش بولمىغاندا، ئوخشاش بولمىغان كېسىش ئەگرى سىزىقلىرى كېلىپ چىقىدۇ، ئۇلار ئايرىم - ئايرىم ئېللىپس، پارابولا، هىپېربولا بولىدۇ. بىز ئادەتتە چەمبەر، ئېللىپس، پارابولا، هىپېربولالارنى ئومۇملاشتۇرۇپ كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى (conic sections) دەپ ئاتايمىز.

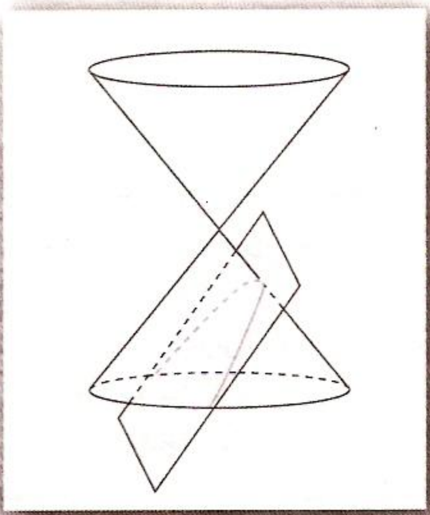
كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ئىلمىي تەتقىقات، ئىشلەپچىقىرىش ۋە ئىنسانلارنىڭ تۇرمۇشى بىلەن زىچ مۇناسىۋىتى بار. 16 - ئەسىرنىڭ ئاخىرى، 17 - ئەسىرنىڭ باشلىرىدىلا كېپلېر سەييارىلەرنىڭ قۇياشنى ئايلىنىپ هەرىكەت قىلىش ئوربىتىسىنىڭ ئېللىپس شەكلىدە ئىكەنلىكىنى بايقىغان. پروژېكتورنىڭ نۇر قايتۇرۇش ئەينىكى پارابولانى ئۇنىڭ سىممېترىك ئوقىنى چۆرىدىتىپ ئايلاندۇرۇشتىن هاسىل بولغان پارابولوئىدتىن ئىبارەت؛ ئېلېكتر ئىستانسىسىنىڭ مۇزلىتىش مۇنارىنىڭ سىرتقى شەكلى هىپېربولا بولىدۇ، .... كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ نېمە ئۈچۈن مۇشۇنداق زور رولى بار؟ بىز كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكى ۋە خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن بۇنىڭغا جاۋاب تاپالايمىز.

كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى قانداق گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىككە ئىگە؟
كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى قانداق تەتقىق قىلىش كېرەك؟

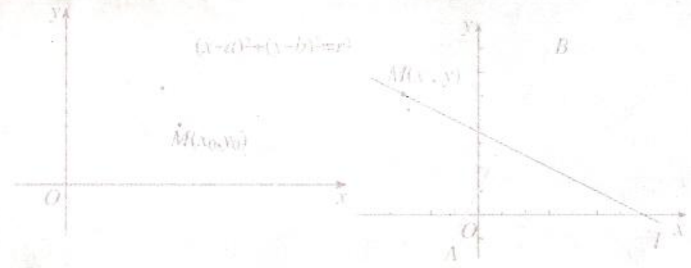
ئەمەلىيەتتە، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ بايقىلىشى ۋە تەتقىق قىلىنىشى قەدىمكى گرېتسىيىدە باشلانغان. ئۇ چاغدا كىشىلەر چەمبەر بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىك بولغان بۇ خىل ئەگرى سىزىقلارنى گېئومېترىيە نۇقتىسىدىن چىقىپ تەتقىق قىلىپ، ئۇلارنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى چەمبەرنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى تەبئىي كېڭەيتىش ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقارغان. 17 - ئەسىرنىڭ بېشىدا، دېكارت كوئوردېنات سىستېمىسىنى كەشىپ قىلدى. شۇنىڭ بىلەن كىشىلەر كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى كوئوردېنات سىستېمىسىنى ئاساس قىلغان هالدا ئالگېبرالىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا باشلىدى. بۇ بابتا بىز زۆرۈر دەرسلىك «ماتېماتىكا 2» دىكى تۈز سىزىق ۋە چەمبەرنى تەتقىق قىلىشتا قوللانغان كوئوردېنات ئۇسۇلىنى داۋاملىق قوللىنىپ، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكى ئۈستىدىكى ئىزدىنىشلەر ئاساسىدا ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇۋالىمىز، ئاندىن كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ئاددىي خۇسۇسىيەتلىرىنى تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىپ هەم ئۇلارغا مۇناسىۋەتلىك بەزى ئاددىي گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەر ۋە ئەمەلىي مەسىلىلەرنى كوئوردېنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ هەل قىلىپ، سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈشتىن ئىبارەت ئاساسىي ئىدىيە هەققىدە يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ تەسىراتقا ئىگە بولىمىز.

2





كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى مول ئەمەلىي ئار-
قا كۆرۈنۈشكە ئىگە بولۇپ، ئۇلار رېئال دۇنيانى سۈرەت-
لەشتە ۋە ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا مۇھىم رول
ئوينايدۇ. كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى كوئوردىنات
ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش ئارقىلىق، سان
بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش ئىدىيىسى ھەققىدە يەنە-
مۇ ئىلگىرىلەپ تەسىراتقا ئىگە بولالايمىز.



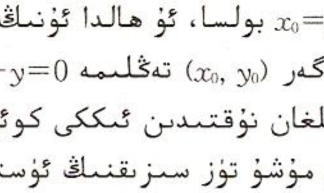
CHAPTER 2

1-2 ئەگرى سىزىق ۋە ئۇنىڭ تەڭلىمىسى

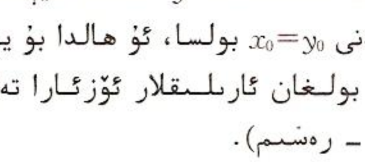
1-1-2 ئەگرى سىزىق ۋە ئۇنىڭ تەڭلىمىسى

ئالدىدا بىز تۈز سىزىق ۋە چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسىنى تەتقىق قىلىپ، بۇ ئەگرى سىزىقلار (تۈز سىزىقنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) بىلەن ئۇلارنىڭ ماس تەڭلىمىسىنىڭ مۇناسىۋىتىنى مۇھاكىمە قىلدۇق. تۆۋەندە يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئادەتتىكى ئەگرى سىزىقلار (تۈز سىزىقنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) بىلەن ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسىنىڭ مۇناسىۋىتىنى تەتقىق قىلىمىز.

بىزگە مەلۇمكى، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا، 1 ـ، 3 ـ چارەكلەرنى تەڭ بۆلىدىغان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x-y=0$ بولىدۇ. دېمەك، ئەگەر $M(x_0, y_0)$ نۇقتا بۇ تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا بولۇپ، ئۇنىڭدىن ئىككى كوئوردىنات ئوقىغىچە بولغان ئارىلىقلار ئۆزئارا تەڭ، يەنى $x_0=y_0$ بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ كوئوردىناتى (x_0, y_0) تەڭلىمە $x-y=0$ نىڭ يېشىمى بولىدۇ؛ ئەكسىچە، ئەگەر (x_0, y_0) تەڭلىمە $x-y=0$ نىڭ يېشىمى، يەنى $x_0=y_0$ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ يېشىمنى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىدىن ئىككى كوئوردىنات ئوقىغىچە بولغان ئارىلىقلار ئۆزئارا تەڭ بولۇپ، بۇ نۇقتا چوقۇم مۇشۇ تۈز سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ (1.1.2 ـ رەسىم).



1.1.2 ـ رەسىم



2.1.2 ـ رەسىم

يەنە ئالايلۇق، (a, b) نى مەركەز، r نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ بولىدۇ. دېمەك، ئەگەر $M(x_0, y_0)$ چەمبەر ئۈستىدىكى بىر نۇقتا بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭدىن چەمبەر مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق چوقۇم رادىئۇسقا تەڭ بولىدۇ، يەنى $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=r$، $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$. بۇ، ئاشۇ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (x_0, y_0) تەڭلىمە $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نىڭ يېشىمى بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ؛ ئەكسىچە، ئەگەر (x_0, y_0) تەڭلىمە $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نىڭ

يېشىمى، يەنى $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ ، $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=r$ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ يېشىمنى كوئور ـ دېنات قىلغان نۇقتىدىن (a, b) نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىق r بولۇپ، ئۇ چوقۇم (a, b) نى مەركەز، r نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ (2.1.2 ـ رەسىم).

ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭ ـ لىمىسى $f(x, y)=0$ نى ئەگ ـ رى سىزىق $f(x, y)=0$ دەپ ئېيتىشقىمۇ بولىدۇ.

ئومۇمەن، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئەگەر مەلۇم ئەگرى سىزىق C (نۇقتىلار توپلىمى ياكى مەلۇم خىل شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدىغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى) ئۈستىدە ـ كى نۇقتىلار بىلەن ئىككى نامەلۇملۇق تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نىڭ ھەقىقىي يېشىملىرى ئارىسىدا:

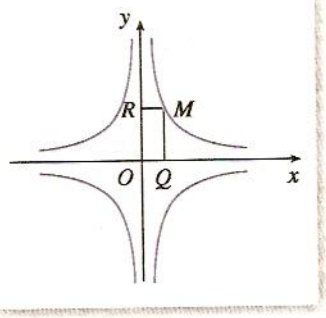
(1) **ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتى بىر ـ دەك بۇ تەڭلىمىنىڭ يېشىمى بولىدۇ؛**

(2) **بۇ تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى كوئوردېنات قىلغان نۇقتىلار ئەگرى سىزىقنىڭ ئۈستىدىكى نۇقتىلار بولىدۇ.**

دېگەن مۇناسىۋەت تۇرغۇزۇلسا، ئۇ ھالدا بۇ تەڭلىمە مۇشۇ **ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى** دەپ ئاتىلىدۇ؛ بۇ ئەگرى سىزىق مۇشۇ **تەڭلىمىنىڭ ئەگرى سىزىقى** (curve) دەپ ئاتىلىدۇ.

1 ـ مىسال. ئىككى كوئوردېنات ئوقىغىچە ئارىلىقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى تۇراقلىق سان $k(k>0)$ غا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسى $xy=\pm k$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: (1) 3.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $M(x_0, y_0)$ نى ترايېكتورد ـ يە ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىمىز. M نۇقتا بىلەن x ئوقىنىڭ ئارىلىقى $|y_0|$ ، ئۇنىڭ بىلەن y ئوقىنىڭ ئارىلىقى $|x_0|$ بولغانلىقتىن،



3.1.2 ـ رەسىم

$$|x_0|\cdot|y_0|=k,$$

يەنى (x_0, y_0) تەڭلىمە $xy=\pm k$ نىڭ يېشىمى بولىدۇ.

(2) M_1 نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى (x_1, y_1) نى تەڭلىمە $xy=\pm k$ نىڭ يېشىمى دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$x_1y_1=\pm k,$$

يەنى

$$|x_1|\cdot|y_1|=k.$$

ھالبۇكى، $|x_1|$ ، $|y_1|$ دەل M_1 نۇقتىدىن ئوردىنات ئوقى ۋە ئابسىسسا ئوقىغىچە بولغان ئارىلىقلار بولغانلىقتىن، M_1 نۇقتىدىن بۇ ئىككى تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ كۆپەيتمىسى تۇراقلىق سان k غا تەڭ بولۇپ، M_1 نۇقتا ئەگرى سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ.

(1)، (2) لەرگە ئاساسەن، $xy=\pm k$ ئىككى كوئوردېنات ئوقىغىچە ئارىلىقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى تۇراقلىق سان $k(k>0)$ غا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسى بولىدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ.

2-1-2 ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىش

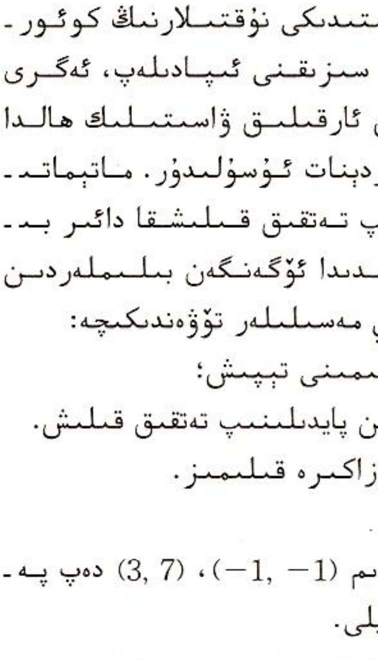
بىز ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى ۋە تەڭلىمىنىڭ ئەگرى سىزىقى ھەققىدىكى ئۇقۇملارنى تۇرغۇزۇۋالدۇق. بۇ ئىككى مۇھىم ئۇقۇمغا ئىگە بولغاندىن كېيىن، كوئوردىنات سىستېمىسىدا نۇقتىنى كوئوردىنات بىلەن ئىپادىلەپ، ئەگرى سىزىقنى مەلۇم خىل شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان نۇقتىلارنىڭ توپلىمى ياكى ترايېكتورىيىسى دەپ قاراشقا بولىدۇ ـ دە، ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى (x, y) قانائەتلەندۈرىدىغان تەڭلىمە $f(x, y)=0$ ئارقىلىق ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەپ، ئەگرى سىزىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەڭلىمىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق ۋاستىلىك ھالدا تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ. مانا بۇ بىز قايتا ـ قايتا تىلغا ئېلىۋاتقان كوئوردىنات ئۇسۇلىدۇر. ماتېماتىكىدا، گېئومېترىيىلىك شەكىللەرنى كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا دائىر بىلىملەردىن شەكىللەنگەن پەن ئانالىتىك گېئومېترىيە دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىدا ئۆگەنگەن بىلىملەردىن كۆرەلەيمىزكى، ئانالىتىك گېئومېترىيىدە تەتقىق قىلىنىدىغان ئاساسىي مەسىلىلەر تۆۋەندىكىچە:

(1) بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، ئەگرى سىزىقنى ئىپادىلەيدىغان تەڭلىمىنى تېپىش؛

(2) ئەگرى سىزىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش.

تۆۋەندە بىز ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىش مەسىلىسىنى مۇزاكىرە قىلىمىز.

2 ـ مىسال. A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى ئايرىم ـ ئايرىم $(-1, -1)$، $(3, 7)$ دەپ پەرەز قىلىپ، AB كېسىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.



4.1.2 ـ رەسىم

يېشىش: 4.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $M(x, y)$ نۇقتىنى AB كېسىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، يەنى M نۇقتىنى تۆۋەندىكى توپلامغا تەۋە دەپ پەرەز قىلىمىز:

$$P=\{M \mid |MA|=|MB|\}.$$

ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئاساسەن، M نۇقتا ئۇيغۇن كېلىدىغان شەرتنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2}.$$

يۇقىرىقى ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئاندىن رەتلىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x+2y-7=0. \qquad ①$$

ئەمدى AB كېسىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى تەڭلىمە ① بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايمىز.

(1) تەڭلىمىنى تېپىش جەريانىدىن بىلەلەيمىزكى، تىك تەڭ بۆلگۈچى ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى تەڭلىمە ① نىڭ يېشىمى بولىدۇ؛

(2) M_1 نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (x_1, y_1) تەڭلىمە ① نىڭ يېشىمى بولىدۇ، يەنى

$$x_1+2y_1-7=0,$$

$$x_1=7-2y_1$$

بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا M_1 نۇقتىدىن A ۋە B غىچە بولغان ئارىلىقلار ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$|M_1A|=\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1+1)^2}=\sqrt{(8-2y_1)^2+(y_1+1)^2}$$
$$=\sqrt{5(y_1^2-6y_1+13)}\ ;$$
$$|M_1B|=\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-7)^2}=\sqrt{(4-2y_1)^2+(y_1-7)^2}$$
$$=\sqrt{5(y_1^2-6y_1+13)}\ .$$
$$\therefore\quad |M_1A|=|M_1B|,$$

يەنى M نۇقتا AB كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى ئۈستىدە ياتىدۇ.

(1) ۋە (2) گە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، AB كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى تەڭلىمە ① بولىدۇ.

يۇقىرىقى مىساللاردىن كۆرەلەيمىزكى، ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىشتا، ئادەتتە تۆۋەندىكىدەك بىرقانچە باسقۇچ بولىدۇ:

(1) مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى خالىغان بىر M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) ئارقىلىق ئىپادىلەش؛

(2) p شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدىغان M نۇقتىنىڭ توپلىمىنى يېزىش:

$$P=\{M|\,p(M)\};$$

(3) $P(M)$ شەرتنى كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلەپ، تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نى تۈزۈش؛

(4) تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نى ئەڭ ئاددىي كۆرۈنۈشكە كەلتۈرۈش؛

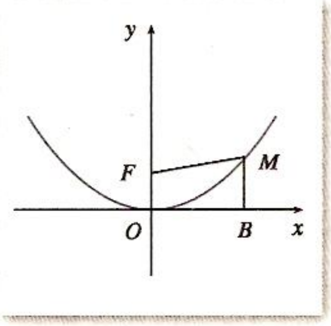
(5) ئاددىيلاشتۇرۇلغاندىن كېيىنكى تەڭلىمىنىڭ يېشىمىنى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ئەگرى سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش.

ئادەتتىكى ئەھۋالدا، تەڭلىمىلەرنىڭ يېشىملەر توپلىمى ئاددىيلاشتۇرۇلۇشنىڭ ئالدى ـ كەينىدە ئوخشاش بولىدىغانلىقتىن، (5) باسقۇچنى قالدۇرۇۋېتىشكە بولىدۇ، ئەمما ئالاھىدە ئەھۋاللاردا مۇۋاپىق چۈشەندۈرۈپ قويۇش لازىم. بۇنىڭدىن سىرت، كونكرېت ئەھۋاللارغا ئاساسەن، (2) باسقۇچنىمۇ قالدۇرۇۋېتىپ، ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى بىۋاستە يېزىشقىمۇ بولىدۇ.

3 ـ مىسال. بىر l تۈز سىزىقنىڭ ئۈستۈنكى تەرىپىدە ياتقان F نۇقتىدىن l غىچە بولغان ئارىلىق 2 ئىكەنلىكى بېرىلگەن. يەنە بىر ئەگرى سىزىقمۇ l نىڭ ئۈستۈنكى تەرىپىدە بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈستىدىكى ھەربىر نۇقتىدىن F قىچە بولغان ئارىلىقتىن شۇ نۇقتىدىن l غىچە بولغان ئارىلىقنى ئالغاندىكى ئايرىما ئوخشاشلا 2 گە تەڭ بولسا، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، بۇ ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

تەھلىل: كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزغاندا، ئادەتتە بېرىلگەن شەرتتىكى مۇقىم نۇقتا، مۇقىم تۈز سىزىق قاتارلىقلاردىن تولۇق پايدىلىنىش كېرەك، بۇنداق قىلغاندا مەسىلىدىكى گېئومېترىيەلىك ئالاھىدىلىكنى تېخىمۇ ياخشى نامايان قىلغىلى ھەم بۇ ئارقىلىق ئەگرى سىزىق تەڭلىمىسىنىڭ كۆرۈنۈشىنى ئاددىيلاشتۇرغىلى بولىدۇ.

يېشىش: 5.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىقنى x ئوق، F نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە l تۈز سىزىققا تىك بولغان تۈز سىزىقنى y ئوق قىلىپ كوئوردىنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزىمىز.



5.1.2 ـ رەسىم

$M(x, y)$ نۇقتىنى ئەگرى سىزىق ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلىپ، x ئوق $\perp MB$ (تىك ئاساسى B) نى ئۆتكۈزسەك، ئۇ ھالدا M نۇقتا تۆۋەندىكى توپلامغا تەۋە بولىدۇ:

$$P=\{M \mid |MF|-|MB|=2\}.$$

ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىغا ئاساسەن، M نۇقتا ئۇيغۇن كېلىدىغان شەرتنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-y=2, \qquad ①$$

تەڭلىمە ① نىڭ ئەزالىرىنى يۆتكەپ، ئاندىن ئۇنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$x^2+(y-2)^2=(y+2)^2,$$

ئاددىيلاشتۇرساق:

$$y=\frac{1}{8}x^2.$$

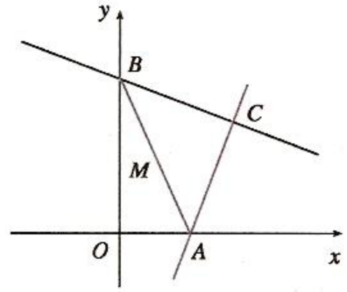
ئەگرى سىزىق x ئوقنىڭ ئۈستۈنكى تەرىپىدە بولغانلىقتىن، $y>0$ بولىدۇ. گەرچە كوئوردېنات بېشى O نىڭ كوئوردېناتى $(0, 0)$ بۇ تەڭلىمىنىڭ يېشىمى بولسىمۇ، ئەمما ئۇ بېرىلگەن ئەگرى سىزىق ئۈستىدە ياتمىغانلىقتىن، ئەگرى سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $y=\frac{1}{8}x^2$ $(x\neq 0)$ بولۇشى كېرەك.

مەشىق

1. تەڭ يانلىق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ چوققىسىنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم ـ ئايرىم $A(0, 3)$، $B(-2, 0)$، $C(2, 0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، AO (O كوئوردېنات بېشى) مېدىئانا ياتقان تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $x=0$ بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

2. تەڭلىمە $ax^2+by^2=2$ نىڭ ئەگرى سىزىقى $A\left(0, \frac{5}{3}\right)$، $B(1, 1)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن. a، b لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، C نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(2, 2)$ بولۇپ، C نۇقتىدىن ئۆتكەن CA تۈز سىزىق x ئوق بىلەن A نۇقتىدا، C نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە CA تۈز سىزىققا تىك بولغان CB تۈز سىزىق y ئوق بىلەن B نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن. M نۇقتىنى AB كېسىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى دەپ پەرەز قىلىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $A(1, -2)$، $B(2, -3)$، $C(3, 10)$ نۇقتىلار تەڭلىمە

$$x^2-xy+2y+1=0$$

ئىپادىلەيدىغان ئەگرى سىزىقنىڭ ئۈستىدە ياتامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

2. بىر نۇقتىدىن $O(0, 0)$، $A(c, 0)$ نۇقتىلارغىچە بولغان ئارىلىقلار كۋادراتلىرىنىڭ ئايرىمىسى تۇراقلىق سان c غا تەڭ بولسا، بۇ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

3. ئىككى مۇقىم نۇقتىنىڭ ئارىلىقى 6 بولۇپ، M نۇقتىدىن بۇ ئىككى مۇقىم نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلار كۋادراتلىرىنىڭ يىغىندىسى 26 گە تەڭ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4. كوئوردېنات بېشىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق بىلەن چەمبەر $x^2+y^2-6x+5=0$ نىڭ A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى بېرىلگەن. AB خوردىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. $P(3, 4)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەرىكەتچان تۈز سىزىق بىلەن ئىككى كوئوردېنات ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى ئايرىم ـ ئايرىم A، B بولۇپ، A، B لار ئارقىلىق ئايرىم ـ ئايرىم ئىككى كوئوردېنات ئوقىغا تىك قىلىپ ئۆتكۈزۈلگەن تۈز سىزىقلار ئۆزئارا M نۇقتىدا كېسىشسە، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

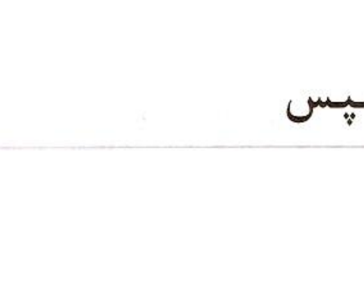
2. بىر ھەرىكەتچان چەمبەرنىڭ تۈز سىزىق $3x-y=0$ ۋە $3x+y=0$ نى كېسىشىدىن ھاسىل بولغان خوردىلارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم 8، 4 بولسا، بۇ ھەرىكەتچان چەمبەر مەركىزىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2-2 ئېللىپس

1-2-2 ئېللىپس ۋە ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

ئىزدىنىش

مۇقىم ئۇزۇنلۇقتىكى بىر ئىنچىكە تانىنى ئېلىپ، ئۇنىڭ ئىككى ئۇچىنى رەسىم تاختىسىدىكى ئوخشاش بىر نۇقتىغا مۇقىملاشتۇرىمىز، ئاندىن تانىنى قېرىنداش ئۇچىغا ئىلىپ ھەم ئۇنى چىڭ تارتىپ تۇرۇپ، قېرىنداش ئۇچىنى ھەرىكەتلەندۈرسەك، بۇ چاغدا قېرىنداش ئۇچى (ھەرىكەتچان نۇقتا) سىزىپ چىققان ترايېكتورىيە بىر چەمبەر بولىدۇ. ئەگەر تانىنىڭ ئىككى ئۇچى ئارىسىدا بىر بۆلەك ئارىلىق قالدۇرۇپ، ئۇلارنى ئايرىم - ئايرىم رەسىم تاختىسىدىكى ئىككى نۇقتىغا مۇقىملاشتۇرغاندىن كېيىن (1.2.2 - رەسىمدىكىدەك)، تانىنى قېرىنداش ئۇچىغا ئىلىپ ھەم ئۇنى چىڭ تارتىپ تۇرۇپ، قېرىنداش ئۇچىنى ھەرىكەتلەندۈرسەك، سىزىپ چىقىلغان ترايېكتورىيە قانداق ئەگرى سىزىق بولىدۇ؟



1.2.2 - رەسىم

بۇ جەرياندا، ھەرىكەتلەندۈرۈلگەن قېرىنداش ئۇچى (ھەرىكەتچان نۇقتا) قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېترىيىلىك شەرتنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

تانىنىڭ ئىككى ئۇچى ئارىسىدا بەلگىلىك ئارىلىق قالدۇرۇپ، قېرىنداش ئۇچىنى ھەرىكەتلەندۈرۈش جەريانىدا، تانىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئۆزگەرمەيدۇ، يەنى قېرىنداش ئۇچىدىن ئىككى مۇقىم نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ يىغىندىسى بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ بولىدۇ.

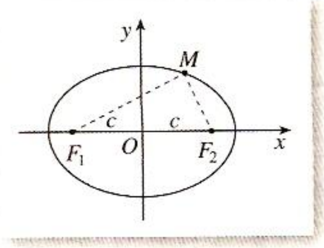
تەكشىلىكتىكى ئىككى مۇقىم نۇقتا F_1، F_2 گىچە ئارىلىقلىرىنىڭ يىغىندىسى تۇراقلىق سان ($|F_1F_2|$ دىن چوڭ) غا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى **ئېللىپس** (ellipse) دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ ئىككى مۇقىم نۇقتا **ئېللىپسنىڭ فوكۇسى**، ئىككى فوكۇسنىڭ ئارىلىقى **ئېللىپسنىڭ فوكۇسلار ئارىلىقى** دەپ ئاتىلىدۇ.

بىز ئەمدى ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاپ، ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى تۈرگۈزىمىز ھەمدە تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ ئېللىپسنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىمىز.

مۇلاھىزە ؟

ئېللىپسنىڭ شەكلىنى كۆزىتىڭ، سىزىنچە كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تاللىغاندا ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى ئاددىيلاشتۇرغىلى بولىدۇ؟

چەمبەرنىڭ سىممېترىكلىكىگە ئاساسەن ئۇنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش جەريانىغا تەققاسلاپ، ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاش ئارقىلىق ئۇنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزىمىز.



2.2.2 ـ رەسىم

2.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئېللىپسنىڭ ئىككى فوكۇسى F_1، F_2 دىن ئۆتكەن تۈز سىزىقنى x ئوق، F_1F_2 كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسىنى y ئوق قىلىپ، تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزۇۋالىمىز.

$M(x, y)$ نى ئېللىپس ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، ئېللىپسنىڭ فوكۇسلار ئارىلىقىنى $2c$ $(c>0)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا فوكۇس F_1، F_2 نىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-c, 0)$، $(c, 0)$ بولىدۇ. يەنە M بىلەن F_1، F_2 نىڭ ئارىلىقلىرىنىڭ يىغىندىسىنى تۇراقلىق سان $2a$ غا تەڭ دەپ پەرەز قىلايلى.

ئېللىپسنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، ئۇ تۆۋەندىكى توپلامدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

$$\because\ |MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\therefore\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

بۇ تەڭلىمىنى ئاددىيلاشتۇرۇش ئۈچۈن، سول تەرەپتىكى بىر يىلتىزلىق ئىپادىنى ئوڭ تەرەپكە يۆتكىسەك:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

بۇ تەڭلىمىنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرسەك:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

بۇنى رەتلىسەك:

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

يۇقىرىدىكى ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپىنى يەنە كۋادراتقا كۆتۈرسەك:

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

بۇنى رەتلىسەك:

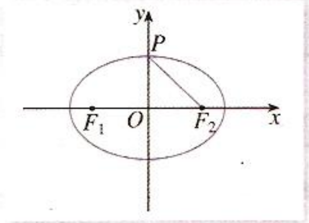
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

ئىككىلا تەرىپىنى بىرلا ۋاقىتتا $a^2(a^2-c^2)$ قا بۆلسەك:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad ①$$

ئېللىپسنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى، $2a>2c$، يەنى $a>c$، شۇڭا $a^2-c^2>0$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟



3.2.2 ـ رەسىم

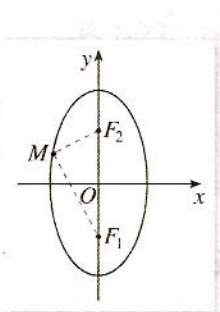
3.2.2 ـ رەسىمنى كۆزىتىڭ، ئۇنىڭدىن a، c، $\sqrt{a^2-c^2}$ نى ئىپادىلەيدىغان كېسىكلەرنى تېپىپ چىقالامسىز؟

3.2.2 ـ رەسىمدىن بىلەلەيمىزكى، $|PF_1|=|PF_2|=a$، $|OF_1|=|OF_2|=c$، $|PO|=\sqrt{a^2-c^2}$ بولىدۇ. $b=|PO|=\sqrt{a^2-c^2}$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا ① ئىپادە تۆۋەندىكىگە ئۆزگىرىدۇ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0). \qquad ②$$

يۇقىرىدىكى جەرياندىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، ئېللىپس ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى تەڭلىمە ② نى قانائەتلەندۈرىدۇ، تەڭلىمە ② نىڭ يېشىمى (x, y) نى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىدىن ئېللىپسنىڭ ئىككى فوكۇسى $F_1(-c, 0)$، $F_2(c, 0)$ گىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ يىغىندىسى $2a$ بولىدۇ، يەنى تەڭلىمە ② نىڭ يېشىمىنى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ئېللىپسنىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمىنىڭ مۇناسىۋىتىدىن بىلەلەيمىزكى، تەڭلىمە ② ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى بولىدۇ، بىز تەڭلىمە ② نى **ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى** دەپ ئاتايمىز. بۇ ئېللىپسنىڭ فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، ئىككى فوكۇسنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $F_1(-c, 0)$، $F_2(c, 0)$ بولۇپ، $c^2=a^2-b^2$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟



4.2.2 ـ رەسىم

4.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئەگەر فوكۇس F_1، F_2 لەر y ئوق ئۈستىدە ياتسا ھەمدە F_1، F_2 لەرنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(0, -c)$، $(0, c)$ بولۇپ، a، b لەرنىڭ مەنىسى يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش بولسا، ئۇ ھالدا ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

ئاسانلا بىلىۋېلىشقا بولىدۇكى، بۇ چاغدا ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

بولۇپ، بۇ تەڭلىمىمۇ ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى بولىدۇ.

1 ـ مىسال. ئېللىپسنىڭ ئىككى فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-2, 0)$، $(2, 0)$ بو-

لوپ، بۇ ئېللىپسنىڭ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن. ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: ئېللىپسنىڭ فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلىمىز:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

ئېللىپسنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى،

$$2a=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=2\sqrt{10},$$

شۇڭا $a=\sqrt{10}$.

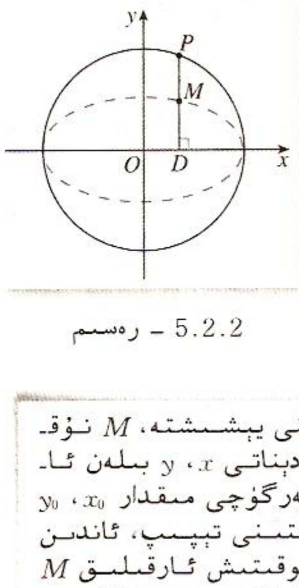
يەنە $c=2$، شۇڭا $b^2=a^2-c^2=10-4=6$.

شۇنىڭ ئۈچۈن، تاپماقچى بولغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ.

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1.$$

بۇ ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى باشقا ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ تاپالامسىز؟ قايسى خىل ئۇسۇل تېخىمۇ ئاددىي؟ سىز قانداق تەسىراتقا ئىگە بولدىڭىز؟

2 ـ مىسال. 5.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، چەمبەر $x^2+y^2=4$ ئۈستىدىكى خالىغان بىر P نۇقتىدا ئارقىلىق x ئوققا تىك قىلىپ PD كېسىك ئۆتكۈزۈلگەن (تىك ئاساسى D). P نۇقتا چەمبەر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، PD كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M نىڭ ترايېكتورىيىسى نېمە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟



5.2.2 ـ رەسىم

تەھلىل: P نۇقتىنىڭ چەمبەر $x^2+y^2=4$ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلىشى M نۇقتىنىڭ ھەرىكىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىدۇ. بىز M نىڭ PD كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولىدىغانلىقىغا ئاساسەن، M نۇقتا بىلەن P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئىپادىسىگە ئىگە بولالايمىز ھەم P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى چەمبەر تەڭلىمىسىنى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقىغا ئاساسەن، M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى قانائەتلەندۈرىدىغان تەڭلىمىنى تېپىپ چىقالايمىز.

بۇ مىسالنى يېشىشتە، M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى x، y بىلەن ئارىدىكى ئۆزگەرگۈچى مىقدار x_0، y_0 نىڭ مۇناسىۋىتىنى تېپىپ، ئاندىن x_0، y_0 لەرنى يوقىتىش ئارقىلىق M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىگە ئىگە بولدۇق. مانا بۇ، ئانالىتىك گېئومېتىرىيىدە نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىشتا دائىم قوللىنىلىدىغان بىر خىل ئۇسۇلدۇر.

شارائىتى بار مەكتەپلەر ئۇچۇر تېخنىكىسى قورالىدىن پايدىلىنىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ شەكلى ئۈستىدە ئىزدىنىش ئېلىپ بارسا بولىدۇ.

يېشىش: M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y)، P نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x_0, y_0) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$x=x_0,\ y=\frac{y_0}{2}.$$

$P(x_0, y_0)$ چەمبەر $x^2+y^2=4$ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن،

$$x_0^2+y_0^2=4. \quad ①$$

$x_0=x$، $y_0=2y$ نى تەڭلىمە ① گە قويساق:

$$x^2+4y^2=4,$$

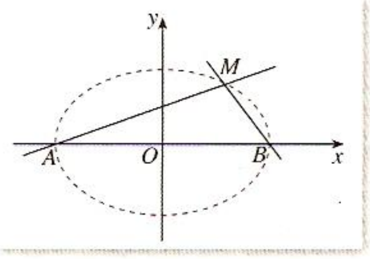
يەنى

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ئېللىپس بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

2 ـ مىسالدىن ئېللىپس بىلەن چەمبەرنىڭ مۇناسىۋىتىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟



6.2.2 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. 6.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، A ، B نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-5, 0)$ ، $(5, 0)$ بولۇپ، AM ، BM تۈز سىزىقلار M نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى ھەمدە ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى $-\frac{4}{9}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

تەھلىل: M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا AM ، BM تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقىنى x ، y نى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئىپادە ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ. AM ، BM تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى $-\frac{4}{9}$ بولغانلىقتىن، x ، y لەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى تۇرغۇزۇپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

يېشىش: M نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلىمىز، A نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى $(-5, 0)$ بولغانلىقتىن، AM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$k_{AM}=\frac{y}{x+5}\quad(x\neq-5);$$

ئوخشاش يول بىلەن، BM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$k_{BM}=\frac{y}{x-5}\quad(x\neq5),$$

بېرىلگەن شەرتلەرگە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى،

$$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}\,(x\neq\pm5),$$

بۇنى ئاددىيلاشتۇرساق، M نۇقتىنىڭ تۆۋەندىكى ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىگە ئىگە بولىمىز:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1\,(x\neq\pm5).$$

شارائىتى بار مەكتەپلەر ئۇچۇر تېخنىكىسى قورالىدىن پايدىلىنىپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنىڭ شەكلى ئۈستىدە ئىزدەنسە بولىدۇ.

مەشىق

1. ئەگەر ئېللىپس $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ ئۈستىدىكى بىر P نۇقتىدىن فوكۇس F_1 گىچە بولغان ئارىلىق 6 بولسا، ئۇ ھالدا P نۇقتىدىن يەنە بىر فوكۇس F_2 گىچە بولغان ئارىلىق ______ بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى يېزىڭ:

(1) $a=4$، $b=1$، فوكۇسى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ؛

(2) $a=4$، $c=\sqrt{15}$، فوكۇسى y ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ؛

(3) $a+b=10$، $c=2\sqrt{5}$.

3. ئېللىپس $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ نىڭ ئوڭ فوكۇسى F_2 ئارقىلىق x ئوققا تىك قىلىپ ئۆتكۈزۈلگەن AB تۈز سىزىق ئېللىپس بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغانلىقى ھەم ئېللىپسنىڭ سول فوكۇسى F_1 ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

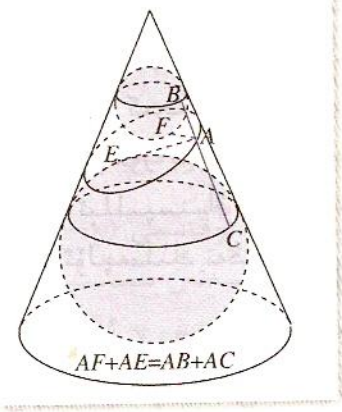
(1) $\triangle AF_1B$ نىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ؛

(2) ئەگەر AB تۈز سىزىق x ئوققا تىك بولمىسا، $\triangle AF_1B$ نىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقىدا ئۆزگىرىش بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

4. A، B نۇقتىلارنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم $(-1, 0)$، $(1, 0)$ بولۇپ، AM، BM تۈز سىزىقلار M نۇقتىدا كېسىشىشە ھەمدە AM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى بىلەن BM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنىڭ بۆلۈنمىسى 2 بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى نېمە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

كېسىش ئەگرى سىزىقى نېمە ئۈچۈن ئېللىپس بولىدۇ؟

1 - رەسىمدىكىدەك، كونۇسنى بىر تەكشىلىك بىلەن كەسسەك، كېسىش ئەگرى سىزىقى ئېللىپس بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، كېسىش ئەگرى سىزىقى نېمە ئۈچۈن ئېللىپس بولىدۇ؟



1 - رەسىم

تارىختا، نۇرغۇن كىشىلەر بۇ مەسىلىنى ساپ گېئومېترىيە نۇقتىسىدىن چىقىپ تەتقىق قىلغان، بۇلارنىڭ ئىچىدە ماتېماتىك Germinal Dandelin ئوتتۇرىغا قويغان ئۇسۇل ناھايىتى ئەپچىل ئۇسۇلدۇر.

چوڭ - كىچىكلىكى ئوخشاش بولمىغان ئىككى شارنى ئايرىم - ئايرىم ھالدا كونۇسنىڭ يان سىرتى ۋە كەسمە يۈزى بىلەن ئۇرۇنىدىغان قىلىپ كونۇس ئىچىگە سالىمىز ھەم بۇ ئىككى شار بىلەن كونۇس كەسمە يۈزىنىڭ ئۇرۇنۇش نۇقتى-

سىنى ئايرىم ـ ئايرىم E ، F دەپ ئالىمىز، ئاندىن كېسىش ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىن خالىغان بىر A نۇقتىنى ئېلىپ، A نۇقتا ئارقىلىق كونۇسنىڭ ياسىغۇچىسىنى ئۆتكۈزسەك، ئۇ ئىككى شار بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم C ، B نۇقتىلاردا ئۇرۇنىدۇ. شار ۋە چەمبەرنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىدىن بىلەلەيمىزكى،

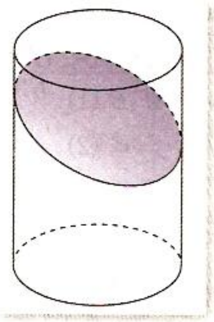
$$AE=AC,\ AF=AB,$$

شۇڭا

$$AE+AF=AB+AC=BC.$$

B ، C ئۇرۇنۇش نۇقتىلىرىنى ھاسىل قىلىش ئۇسۇلىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئۇلارنىڭ ئارىلىقى BC مۇقىم قىممەت بولىدۇ. شۇڭا، كېسىش ئەگرى سىزىقى ئۈستىدىكى خالىغان بىر A نۇقتىدىن ئىككى مۇقىم نۇقتا E ، F كىچە بولغان ئارىلىقلارنىڭ يىغىندىسى تۇراقلىق سان بولىدۇ.

ئېللىپسنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، كېسىش ئەگرى سىزىقى ئېللىپس بولىدۇ.



2 ـ رەسىم

Germinal Dandelin نىڭ بۇ ئۇسۇلى ئىنتايىن ئەپچىل بولۇپ، ئىجادىيلىقىمۇ ناھايىتى يۇقىرى. سىز ئۇنىڭ خىزمىتىنى كۆرگەندىن كېيىن، قانداق تەسىراتقا ئىگە بولدىڭىز؟

2 ـ رەسىمدىكىدەك، سىلىندىرنى ئۇنىڭ ياسىغۇچىسى بىلەن يانتۇ كېسىشىدىغان بىر تەكشىلىك ئارقىلىق كەسسەك، بىر كېسىش ئەگرى سىزىقى كېلىپ چىقىدۇ. سىز يۇقىرىدىكى ئۇسۇلغا تەقلىد قىلىپ، بۇ كېسىش ئەگرى سىزىقىنىڭ ئېللىپس بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

2-2-2 ئېللىپسنىڭ ئاددىي گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتى

ئەگرى سىزىقنىڭ دائىرىسى، سىممېترىكلىكى ۋە ئالاھىدە نۇقتىلىرىنى مۇھاكىمە قىلىش ئارقىلىق، ئەگرى سىزىقنىڭ شەكلى، چوڭ ـ كىچىكلىكى ۋە ئورنىنى ئومۇمىي جەھەتتىن ئىگىلىۋېلىشقا بولىدۇ. شۇڭا، بۇ بابتا بىرقانچە خىل كونۇس ئەگرى سىزىقنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى ئۇلارنىڭ دائىرىسى، سىممېترىكلىكى، چوققىسى ۋە باشقا ئالاھىدىلىكلىرى دېگەندەك تارماقلارغا بۆلۈپ تەتقىق قىلىمىز.

يۇقىرىدا ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى ئۇنىڭ ئېنىقلىمىسى (گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكى) دىن چىقىپ تۇرغۇزۇۋالدۇق. تۆۋەندە ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىمىز، بۇ، ئېللىپسنىڭ شەكلى، چوڭ ـ كىچىكلىكى، سىممېترىكلىكى ۋە ئورنى قاتارلىقلارنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ.

بىز ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0) \qquad ①$$

دىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىمىز.

كۆزىتىش

ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ نىڭ شەكلىنى كۆزىتىڭ، سىز شەكىلگە قاراپ ئۇنىڭ دائىرىسىنى بىلەلەمسىز؟ ئۇ قانداق سىممېترىكلىككە ئىگە؟ ئېللىپس ئۈستىدىكى قايسى نۇقتىلار ئالاھىدىرەك؟

1. دائىرىسى

7.2.2 ـ رەسىمنى كۆزىتىپ، شۇنى ئاسانلا كۆرۈۋالالايمىزكى، ئېللىپس ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسىنىڭ دائىرىسى $-a\leqslant x\leqslant a$، ئوردىناتىنىڭ دائىرىسى $-b\leqslant y\leqslant b$ بولىدۇ. تۆۋەندە ئۇنىڭ دائىرىسىنى تەڭلىمە (ئالگېبرالىق ئۇسۇل) دىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىمىز.

تەڭلىمە ① دىن بىلەلەيمىزكى،

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\geqslant 0,$$

شۇڭا ئېللىپس ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ ئابسىسساسى تۆۋەندىكى تەڭسىزلىككە ئۇيغۇن كېلىدۇ:

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,$$

يەنى

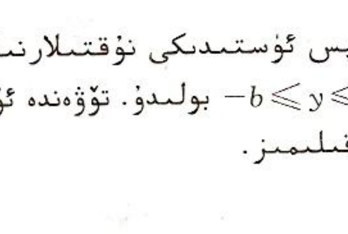
$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

ئوخشاش يول بىلەن،

$$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

يەنى

$$-b\leqslant y\leqslant b.$$



7.2.2 ـ رەسىم

بۇ، ئېللىپسنىڭ تۈز سىزىق $x=\pm a$ ۋە تۈز سىزىق $y=\pm b$ دىن قورشالغان تىك تۆتبۇلۇڭ شەكىللىك رامكا ئىچىگە جايلاشقانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ (7.2.2 ـ رەسىم).

2. سىممېترىكلىكى

ئېللىپسنىڭ شەكلىنى كۆزىتىش ئارقىلىق، ئۇنىڭ ھەم ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك شەكىل، ھەم مەركەزگە نىسبەتەن سىممېترىك شەكىل ئىكەنلىكىنى بايقاشقا بولىدۇ.

ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ دە y نىڭ ئورنىغا $-y$ نى قويساق، تەڭلىمە ئۆزگەرمەيدۇ، بۇ، $P(x, y)$ نۇقتا ئېللىپسنىڭ ئۈستىدە ياتقاندا، ئۇنىڭ x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى $P_1(x, -y)$ مۇ ئېللىپس ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ، شۇڭا ئېللىپس x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ؛ ئوخشاشلا، x نىڭ ئورنىغا $-x$ نى قويساق، تەڭلىمە ئۆزگەرمەيدۇ، شۇڭا ئېللىپس y ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ؛ x نىڭ ئورنىغا $-x$ نى، y نىڭ ئورنىغا $-y$ نى قويساق، تەڭلىمە يەنىلا ئۆزگەرمەيدۇ، شۇڭا ئېللىپس كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ.

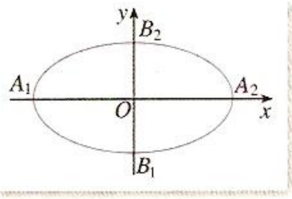
يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، ئېللىپس x، y ئوقلارنىڭ ھەر ئىككىسىگە ۋە كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ. بۇ يەردە، كوئوردىنات ئوقلىرى ئېللىپسنىڭ سىممېترىك ئوقى، كوئوردىنات بېشى ئېللىپسنىڭ سىممېترىك مەركىزى بولىدۇ، ئېللىپسنىڭ سىممېترىك مەركىزى **ئېللىپسنىڭ مەركىزى** دەپ ئاتىلىدۇ.

3. چوققىسى

ئەگرى سىزىقنىڭ ئورنىنى ئۇنىڭ ئۈستىدىكى بەزى ئالاھىدە نۇقتىلارنىڭ ئورنىنى مۇھاكىمە قىلىش ئارقىلىق بەلگىلەشكە بولىدۇ. ئەگرى سىزىقنىڭ كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى ئورنىنى بەلگىلەشتە، كۆپ ھاللاردا ئەگرى سىزىق بىلەن x ئوق، y ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىشقا توغرا كېلىدۇ.

ئىزدىنىش

ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ گە ئاساسەن، ئېللىپس بىلەن x ئوق، y ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپالامسىز؟



8.2.2 ـ رەسىم

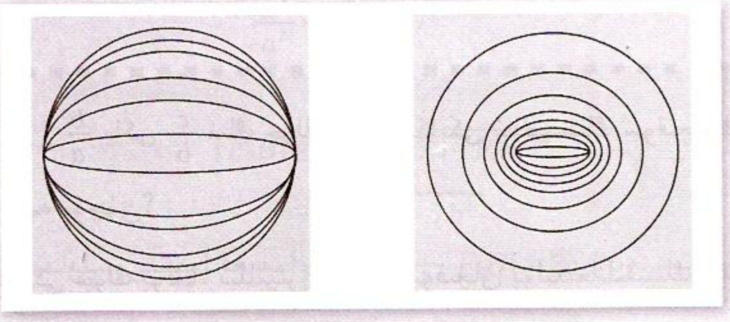
ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىدە، $x=0$ دەپ ئالساق، $y=\pm b$ كېلىپ چىقىدۇ. بۇ، $B_1(0, -b)$، $B_2(0, b)$ نۇقتىلار ئېللىپس بىلەن y ئوقنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرىدۇ. ئوخشاشلا، $y=0$ دەپ ئالساق، $x=\pm a$ كېلىپ چىقىدۇ، بۇ، $A_1(-a, 0)$، $A_2(a, 0)$ نۇقتىلار ئېللىپس بىلەن x ئوقنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرىدۇ. x ئوق بىلەن y ئوق ئېللىپسنىڭ سىممېترىك ئوقلىرى بولغانلىقتىن، ئېللىپس ئۆزىنىڭ سىممېترىك ئوقلىرى بىلەن تۆت نۇقتىدا كېسىشىدۇ، بۇ تۆت كېسىشىش نۇقتىسى ئېللىپسنىڭ **چوققىلىرى** دېيىلىدۇ (8.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك).

كېسىك A_1A_2 بىلەن B_1B_2 ئايرىم ـ ئايرىم ئېللىپسنىڭ **ئۇزۇن ئوقى** ۋە **قىسقا ئوقى** دېيىلىدۇ،ئۇلارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم $2a$ ۋە $2b$ غا تەڭ بولىدۇ، a بىلەن b ئايرىم ـ ئايرىم ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە قىسقا يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى دېيىلىدۇ.

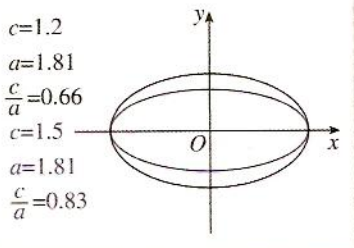
4. مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى

مۇلاھىزە ؟

ئوخشاش بولمىغان ئېللىپسلار (9.2.2 ـ رەسىم) نى كۆزىتىش ئارقىلىق ، ئېللىپسلارنىڭ سوقچاقلىق دەرىجىسىنىڭ ئوخشاش بولمايدىغانلىقىنى بايقايمىز. ئۇنداق بولسا، ئېللىپسنىڭ سوقچاقلىق دەرىجىسىنى قانداق مىقدار بىلەن تەسۋىرلەشكە بولىدۇ؟



9.2.2 ـ رەسىم



10.2.2 ـ رەسىم

10.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ نىڭ ئۇزۇن يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى a، يېرىم فوكۇسلار ئارىلىقى c ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى a نى ئۆزگەرتمەي، يېرىم فوكۇسلار ئارىلىقى c نى ئۆزگەرتسەك، c نىڭ قىممىتى a غا قانچىكى يېقىنلاشسا، ئېللىپس شۇنچە سوقىچاق بولىدىغانلىقىنى بايقايمىز. دېمەك، ئېللىپسنىڭ سوقىچاقلىق دەرىجىسىنى c ۋە a ئىككى مىقدار ئارقىلىق تەسۋىرلەشكە بولىدۇ.

بىز ئېللىپسنىڭ فوكۇسلار ئارىلىقى بىلەن ئۇزۇن ئوق ئۇزۇنلۇقىنىڭ نىسبىتى $\frac{c}{a}$ نى **ئېللىپسنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى**❶ دەپ ئاتاپ، ئۇنى e بىلەن ئىپادىلەيمىز، يەنى $e=\frac{c}{a}$.

چۈنكى $a>c>0$، شۇڭا $0<e<1$ بولىدۇ. e نىڭ قىممىتى 1 گە قانچىكى يېقىنلاشسا، c نىڭ قىممىتى a غا شۇنچە يېقىنلىشىپ، بۇنىڭ بىلەن $b=\sqrt{a^2-c^2}$ مۇ شۇنچە كىچىكلەيدۇ ـ دە، بۇ چاغدا ئېللىپس شۇنچە سوقىچاق بولىدۇ؛ ئەكسىچە، e نىڭ قىممىتى 0 گە قانچىكى يېقىنلاشسا، c نىڭ قىممىتى 0 گە شۇنچە يېقىنلىشىپ، بۇنىڭ بىلەن b مۇ a غا شۇنچە يېقىنلىشىدۇ ـ دە، بۇ چاغدا ئېللىپس چەمبەرگە شۇنچە يېقىنلىشىدۇ.

پەقەت ۋە پەقەت $a=b$ بولغاندا، $c=0$ بولۇپ، بۇ چاغدا ئىككى فوكۇس ئۇستمۇئۇست چۈشىدۇ ـ دە، ئېللىپس چەمبەرگە ئايلىنىدۇ، ئۇنىڭ تەڭلىمىسى:

$$x^2+y^2=a^2.$$

❶ ئېللىپسنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسىنى ئوبرازلىق ھالدا: ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن ئوق ئۇزۇنلۇقى ئۆزگەرمىگەن شەرت ئاستىدا، ئىككى فوكۇسنىڭ مەركەزدىن يىراقلىشىش دەرىجىسى دەپ چۈشىنىشكە بولىدۇ. بۇنداق بەلگىلىۋېلىش كېيىن كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ بىردەكلىك خۇسۇسىيىتى دېگەندەك خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىشىمىزغا قولايلىق يارىتىپ بېرىدۇ.

ئىزدىنىش

1. $\frac{b}{a}$ ياكى $\frac{c}{b}$ نىڭ چوڭ - كىچىكلىكى ئېللىپسنىڭ سوقچاقلىق دەرىجىسىنى تەسۋىرلەپ بېرەلەمدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

2. سىز $e=\frac{c}{a}$ قانچىكى چوڭ بولسا، ئېللىپس شۇنچە سوقچاق بولىدىغانلىقىنىڭ سەۋەبىنى ترىگونو-مېترىيىلىك فۇنكسىيە بىلىملىرىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟ $e=\frac{c}{a}$ قانچە كىچىك بولسا، ئېللىپس شۇنچە يۇمىلاق بولامدۇ؟

4 - مىسال. ئېللىپس $16x^2+25y^2=400$ نىڭ ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى، مەر-كەزدىن قېچىش دەرىجىسى، فوكۇسلىرى ۋە چوققىلىرىنىڭ كوئوردېناتىنى تاپايلى.

يېشىش: بېرىلگەن تەڭلىمىنى تۆۋەندىكى ئۆلچەملىك تەڭلىمىگە ئايلاندۇرىمىز:

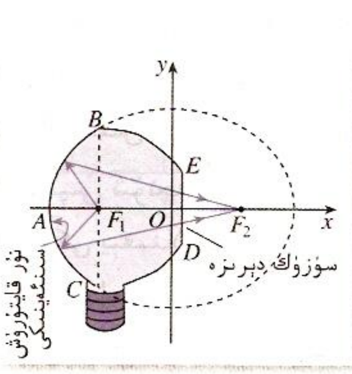
$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1,$$

شۇنىڭ بىلەن، $a=5$، $b=4$، $c=\sqrt{25-16}=3$ بولىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن، ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم $2a=10$ ۋە $2b=8$، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$، ئىككى فوكۇس-نىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم $F_1(-3, 0)$ ۋە $F_2(3, 0)$، تۆت چوققىسىنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم $A_1(-5, 0)$، $A_2(5, 0)$، $B_1(0, -4)$ ۋە $B_2(0, 4)$ بولىدۇ.

بۇ ئېللىپسنىڭ تەخمىنىي شەكلىنى سىزىڭ.

5 - مىسال. 11.2.2 - رەسىمدىكىدەك، بىر خىل كىنو قويۇش لامپۇچكىسىنىڭ نۇر قايتۇرۇش سىنئەينىكى ئايلانما ئېللىپسوئىد (ئېللىپسنى ئۇنىڭ سىممېترىك ئوقىنى چۆرىدىتىپ تولۇق بىر قې-تىم ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئەگرى سىرت) نىڭ بىر قىسمى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. سىممېترىك ئوقتىن ئۆتكەن كېسىش ئېغىزى BAC ئېللىپسنىڭ بىر قىسمى بولۇپ، لامپۇچكا قىلى ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇسى F_1 گە، لىنتا ئىشىكى يەنە بىر فوكۇسى F_2 گە جايلاش-قان. ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇسى F_1 دىن چىققان يورۇقلۇق نۇرى ئايلانما ئېللىپسوئىدتىن قايتىپ يەنە بىر فوكۇس F_2 گە يىغىلىدۇ، ئەگەر $BC\perp F_1F_2$، $|F_1B|=2.8\,\text{cm}$، $|F_1F_2|=4.5\,\text{cm}$ بولسا، مۇۋاپىق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇر-غۇزۇپ، كېسىش ئېغىزى BAC ياتقان ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى (0.1 cm غىچە ئېنىقلىقتا).



11.2.2 - رەسىم

يېشىش: 11.2.2 - رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇ-زۇپ، تاپماقچى بولغان ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك دەپ پەرەز قىلىمىز:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$\mathrm{Rt}\triangle BF_1F_2$ دە،

$$|F_2B|=\sqrt{|F_1B|^2+|F_1F_2|^2}$$
$$=\sqrt{2.8^2+4.5^2}\ .$$

ئېللىپسنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن $|F_1B|+|F_2B|=2a$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز، شۇڭا

$$a=\frac{1}{2}(|F_1B|+|F_2B|)$$
$$=\frac{1}{2}(2.8+\sqrt{2.8^2+4.5^2}\ )$$
$$\approx 4.1;$$
$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$
$$=\sqrt{4.1^2-2.25^2}$$
$$\approx 3.4.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، تاپماقچى بولغان ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\frac{x^2}{4.1^2}+\frac{y^2}{3.4^2}=1.$$

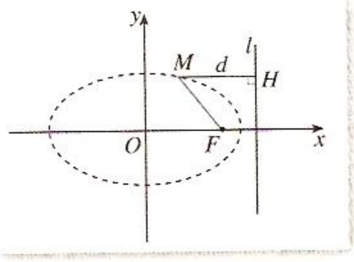
6 ـ مىسال. $M(x,y)$ نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا $F(4,0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن تۈز سىزىق l: $x=\frac{25}{4}$ كىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى تۇراقلىق سان $\frac{4}{5}$ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تاپايلى.

يېشىش: M نۇقتىدىن تۈز سىزىق l: $x=\frac{25}{4}$ كىچە بولغان ئارىلىقنى d دەپ پەرەز قىلساق، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى تۆۋەندىكى توپلامدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{d}=\frac{4}{5}\right.\right\},$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېگە بولىمىز:

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|\frac{25}{4}-x\right|}=\frac{4}{5}.$$



12.2.2 ـ رەسىم

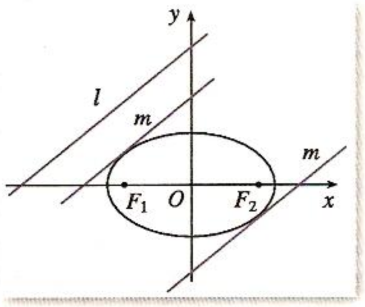
بۇ ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئاندىن ئاددىيلاشتۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$9x^2+25y^2=225,$$

يەنى

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

شۇڭا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم 10 ۋە 6 بولغان ئېللىپستىن ئىبارەت بولىدۇ (12.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك).



13.2.2 ـ رەسىم

7 ـ مىسال. ئېللىپس $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$، تۈز سىزىق l: $4x-5y+40=0$ بېرىلگەن. ئېللىپسنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغان ھەم l تۈز سىزىققىچە ئارىلىقى ئەڭ كىچىك بولىدىغان بىر نۇقتا مەۋجۇتمۇ؟ بۇ ئەڭ كىچىك ئارىلىق قانچە؟

تەھلىل: l تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپسنى سىزىمىز (13.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك). شەكىلنى كۆزىتىش ئارقىلىق بىلەلەيمىزكى، l تۈز سىزىققا پاراللېل ھەمدە ئېللىپس بىلەن پەقەت بىرلا كېسىشىش نۇقتىسىغا ئىگە بولغان تۈز سىزىقتىن پايدىلىنىپ، ماس ھالدىكى ئەڭ كىچىك ئارىلىقنى تېپىشقا بولىدۇ.

يېشىش: l تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىگە ئاساسەن بىلىشكە بولىدۇكى، lتۈز سىزىق بىلەن ئېللىپس كېسىشمەيدۇ (نېمە ئۈچۈن؟). m تۈز سىزىقنى l تۈز سىزىققا پاراللېل دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا m تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

$$4x-5y+k=0. \qquad ①$$

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases}4x-5y+k=0,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$$

دىكى y نى يوقاتساق:

$$25x^2+8kx+k^2-225=0. \qquad ②$$

تەڭلىمە ② نىڭ يىلتىزىنىڭ ئېنىقلىغۇچىسىنى $\Delta=0$ دەپ ئالساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$64k^2-4\times25(k^2-225)=0. \qquad ③$$

تەڭلىمە ③ نى يەشسەك:

$k_1=25$ ياكى $k_2=-25$.

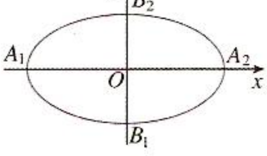
13.2.2 ـ رەسىمدىن بىلىشكە بولىدۇكى، $k=25$ بولغاندا، m تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپسنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق ئەڭ يېقىن بولۇپ، بۇ ۋاقىتتا m تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى $4x-5y+25=0$ بولىدۇ. m تۈز سىزىق بىلەن l تۈز سىزىقنىڭ ئارىلىقى:

$$d=\frac{|40-25|}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{15}{41}\sqrt{41}.$$

ئەڭ چوڭ ئارىلىق قانچە؟

شۇڭا، ئەڭ كىچىك ئارىلىق $\frac{15}{41}\sqrt{41}$ بولىدۇ.

مەشىق



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكى ئېللىپسنىڭ فوكۇسلىرىنىڭ ئورنىنى بەلگىلەپ بېرەلەمسىز؟ نېمىگە ئاساسلاندىڭىز؟

2. تۆۋەندىكى ئېللىپسلارنىڭ فوكۇسلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; (2) $2x^2+y^2=8$.

3. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، $a=6$، $e=\frac{1}{3}$؛

(2) فوكۇسلىرى y ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، $c=3$، $e=\frac{3}{5}$.

4. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $P(-3, 0)$، $Q(0, -2)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(2) ئۇزۇن ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 20 گە تەڭ، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $\frac{3}{5}$ كە تەڭ.

5. تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى ئىككى ئېللىپسنىڭ شەكلىنى سېلىشتۇرۇڭ، قايسىسى تېخىمۇ يۇمىلاق، قايسىسى تېخىمۇ سوقىچاق؟ نېمە ئۈچۈن؟

(1) $9x^2+y^2=36$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$;

(2) $x^2+9y^2=36$, $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$.

6. تۆۋەندە بېرىلگەن تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپسنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $3x+10y-25=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$;

(2) $3x-y+2=0$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

7. ئېللىپس $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ نىڭ سول فوكۇسى F_1 ئارقىلىق يانتۇلۇق بۇلۇڭى $60°$ بولغان l تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، l تۈز سىزىق بىلەن ئېللىپس A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. AB نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

2.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ئەگەر $M(x, y)$ نۇقتا ھەرىكەت قىلىش جەريانىدا ھامان مۇناسىۋەت ئىپادىسى

$$\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$$

نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ ھالدا M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى قانداق ئەگرى سىزىق بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟ ئۇنىڭ تەڭلىمىسىنى يېزىڭ.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى يېزىڭ:

(1) فوكۇسى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، فوكۇسلار ئارىلىقى 4 كە تەڭ ھەم $P(3, -2\sqrt{6})$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) فوكۇسلىرىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(0, -4)$، $(0, 4)$، $a=5$؛

(3) $a+c=10$, $a-c=4$.

3. تۆۋەندىكى ئېللىپسلارنىڭ دائىرىسىنى مۇھاكىمە قىلىڭ ھەم شەكلىنى سىزىڭ:

(1) $4x^2+y^2=16$;　　(2) $5x^2+9y^2=100$.

4. تۆۋەندىكى ئېللىپسلارنىڭ ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى، فوكۇسلىرى ۋە چوققىلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $x^2+4y^2=16$;　　(2) $9x^2+y^2=81$.

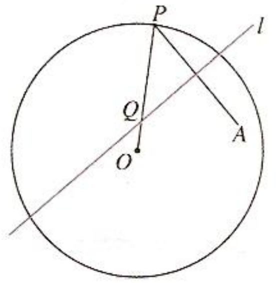
5. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $Q(0,\ \sqrt{5})$، $P(-2\sqrt{2},\ 0)$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(2) ئۇزۇن ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى قىسقا ئوقى ئۇزۇنلۇقىنىڭ 3 ھەسسىسىگە تەڭ ھەمدە $P(3,\ 0)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(3) فوكۇسلار ئارىلىقى 8 گە، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى 0.8 گە تەڭ.

6. P نۇقتا ئېللىپس $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ نىڭ ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ھەمدە P نۇقتا ۋە فوكۇس F_1، F_2 لارنى چوققا قىلغان ئۈچبۇلۇڭنىڭ يۈزى 1 گە تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، P نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

7. رەسىمدىكىدەك، O چەمبەرنىڭ رادىئۇسى مۇقىم ئۇزۇنلۇق r غا تەڭ، A بولسا O چەمبەرنىڭ ئىچىدىكى بىر مۇقىم نۇقتا، P بولسا O چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، AP كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى l بىلەن OP رادىئۇس Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ. P نۇقتا چەمبەر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، Q نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى نېمە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

8. ئېللىپس $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ۋە بىر گۇرۇپپا پاراللېل سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $\frac{3}{2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) بۇ بىر گۇرۇپپا پاراللېل تۈز سىزىق قانداق ۋاقىتتا ئېللىپس بىلەن كېسىشىدۇ؟

(2) بۇ پاراللېل سىزىقلار ئېللىپس بىلەن كېسىشكەندە، ھاسىل بولىدىغان كېسىكلەرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرى بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

9. «زېمىنشەن 1 ـ نومۇرلۇق» كومېتا (قۇيرۇقلۇق يۇلتۇز)نى نەنجىڭ رەسەتخانىسى بايقىغان بولۇپ، ئۇنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسى قۇياشنى بىر فوكۇس قىلغان ئېللىپستىن ئىبارەت. بۇ ئوربىتىنىڭ قۇياشقا يېقىن نۇقتىسى (قۇياش بىلەن ئارىلىقى ئەڭ يېقىن بولغان نۇقتا) دىن قۇياش مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق 1.486 ئاسترونومىيە بىرلىكىگە، قۇياشقا يىراق نۇقتىسى (قۇياش بىلەن ئارىلىقى ئەڭ يىراق بولغان نۇقتا)دىن قۇياش مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق 5.563 ئاسترونومىيە بىرلىكىگە تەڭ (1 ئاسترونومىيە بىرلىكى دېگىنىمىز قۇياشتىن يەر شارىغىچە بولغان ئوتتۇرىچە ئارىلىقنى كۆرسىتىدۇ. ئۇ تەخمىنەن 1.5×10^8 km غا تەڭ) ئىكەنلىكى ھەمدە قۇياشقا يېقىن نۇقتا، قۇياشقا يىراق نۇقتا ۋە قۇياش مەركىزىنىڭ ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ئۆلچەپ چىقىلغان بولسا، ئوربىتىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

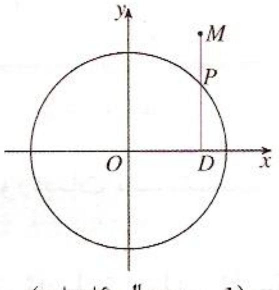
10. يەر شارىنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسى ئۇزۇن ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $a=1.50\times10^8$ km، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=0.0192$ بولغان ئېللىپس بولۇپ، قۇياش بۇ ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇسى ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى بېرىلگەن. يەر شارىدىن قۇياشقىچە بولغان ئەڭ چوڭ ۋە ئەڭ كىچىك ئارىلىقنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

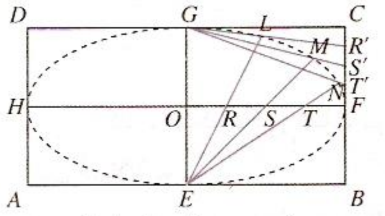
1. رەسىمدىكىدەك، x ئوق $\perp DP$ بولۇپ، M نۇقتا DP نىڭ داۋامى ئۈستىدە ياتىدۇ ھەمدە $\frac{|DM|}{|DP|}=\frac{3}{2}$.

P نۇقتا چەمبەر $x^2+y^2=4$ نىڭ ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەم ترايېكتورىيىنىڭ شەكلىنى چۈشەندۈرۈڭ. بۇنى 45 ـ بەتتىكى 2 ـ مىسالغا سېلىشتۇرۇڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟

2. بىر ھەرىكەتچان چەمبەرنىڭ چەمبەر $x^2+y^2+6x+5=0$ بىلەن سىرتتىن، چەمبەر $x^2+y^2-6x-91=0$ بىلەن ئىچتىن ئۇرۇنىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ھەرىكەتچان چەمبەر مەركىزىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەم ئۇنىڭ قانداق ئەگرى سىزىق ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. M نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا $F(2, 0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق $x=8$ گىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى $2:1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەم ترايېكتورىيىنىڭ قانداق شەكىل بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

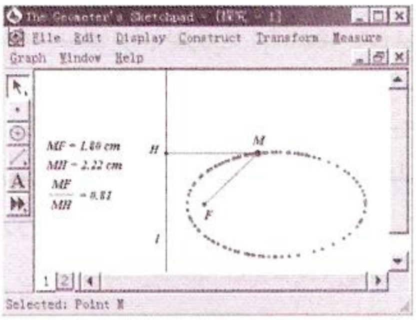
4. رەسىمدىكىدەك، تىك تۆتبۇلۇڭ $ABCD$ دا، $|AB|=8$، $|BC|=6$ بولۇپ، E، F، G، H لار ئايرىم ـ ئايرىم تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ تۆت تەرىپىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، R، S، T لار OF كېسىكىنى تەڭ تۆتكە بۆلگۈچى نۇقتىلار، R'، S'، T' لار CF كېسىكىنى تەڭ تۆتكە بۆلگۈچى نۇقتىلار ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۈز سىزىق ER بىلەن GR'، ES بىلەن GS'، ET بىلەن GT' نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى L، M، N لارنىڭ ھەممىسى ئېللىپس $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ نىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

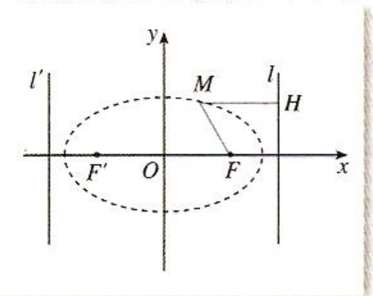
«گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسى (几何画板)»دىن پايدىلىنىپ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ــ ئېللىپس ئۈستىدە ئىزدىنىش

رەسىمدىكىدەك، F مۇقىم نۇقتا، l بولسا F نۇقتىدىن ئۆتمەيدىغان مۇقىم تۈز سىزىق، ھەرىكەتچان نۇقتا M دىن مۇقىم نۇقتا F قىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق l غىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى e بولۇپ، ئۇ 1 دىن كىچىك بولغان تۇراقلىق سان. ھەرىكەتچان نۇقتا M نىڭ ترايېكتورىيىسىنى يۇمشاق دېتال «گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسى»دىن پايدىلىنىپ سىزىپ چىقساق، بۇ ترايېكتورىيىنى كۆزىتىش ئارقىلىق ئۇنىڭ بىر ئېللىپس ئىكەنلىكىنى بايقايمىز.

دائىرە $0<e<1$ ئىچىدە، e نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ياكى F نۇقتا بىلەن تۈز سىزىق l نىڭ نىسبىي ئورنىنى ئۆزگەرتسەك، ھەرىكەتچان نۇقتا M نىڭ ترايېكتورىيىسى يەنىلا بىر ئېللىپس بولىدىغانلىقىنى بايقايمىز (1 ـ رەسىم).



1 ـ رەسىم



2 ـ رەسىم

يۇقىرىقى مەسىلىنى تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىدەك بايان قىلالايمىز:

ئەگەر $M(x, y)$ نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا $F(c, 0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق l: $x=\frac{a^2}{c}$ قىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى تۇراقلىق سان $\frac{c}{a}$ $(a>c>0)$ غا تەڭ بولسا، ئۇ هالدا M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى بىر ئېللىپس بولىدۇ (2 ـ رەسىمدىكىدەك). مۇقىم نۇقتا $F(c, 0)$ ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇسى بولىدۇ، تۈز سىزىق l: $x=\frac{a^2}{c}$ ئېللىپسنىڭ فوكۇس F كە ماس بولغان يۆنەلدۇرگۇچىسى دەپ ئاتىلىدۇ. ئېللىپسنىڭ سىممېترىكلىكىگە ئاساسەن، ئېللىپسنىڭ فوكۇس $F'(-c, 0)$ گە ماس بولغان يۆنەلدۇرگۇچىسى l': $x=-\frac{a^2}{c}$ بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟ بۇ ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن ئوقى ۋە قىسقا ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى ئايرىم ـ ئايرىم قانچە بولىدۇ؟

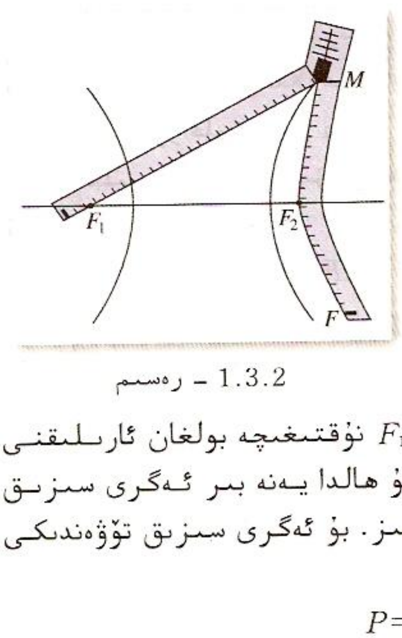
3-2

ھىپېربولا

1-3-2 ھىپېربولا ۋە ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

مۇلاھىزە؟

بىزگە مەلۇمكى، ئىككى مۇقىم نۇقتىغىچە ئارىلىقلىرىنىڭ يىغىندىسى نۆل بولمىغان تۇراقلىق سان (ئىككى مۇقىم نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقتىن چوڭ) غا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ ترايېكتورىيىسى ئېللىپس بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئىككى مۇقىم نۇقتىغىچە ئارىلىقلىرىنىڭ ئايرىمىسى نۆل بولمىغان تۇراقلىق سانغا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ ترايېكتورىيىسى نىمە بولىدۇ؟



1.3.2 ـ رەسىم

1.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر سىيرىتمىنىڭ بىر بۆلىكىنى تارتىپ ئېچىپ، ئېچىلغان ئىككى تەرىپىنىڭ ھەربىرىدىن بىر نۇقتىنى تاللايمىز ھەم ئۇلارنى ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا F_1، F_2 نۇقتىلارغا مۇقىملاشتۇرىمىز، قېرىنداش ئۇچىنى M نۇقتىغا قويۇپ، سىيرىتمىنى تەدرىجىي ئاچساق ياكى ئەتسەك، قېرىنداش ئۇچى بېسىپ ئۆتكەن نۇقتىلار بىر ئەگرى سىزىقنى ھاسىل قىلىدۇ. بۇ ئەگرى سىزىق تۆۋەندىكى شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان نۇقتىلارنىڭ توپلىمىدىن ئىبارەت:

$$P=\{M||MF_1|-|MF_2|=\text{تۇراقلىق سان}\}.$$

ئەگەر M نۇقتىدىن F_2 نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقتىن ئۇنىڭدىن F_1 نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقنى ئالغاندىكى ئايرىمىنى ئوخشاش بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ قىلساق، ئۇ ھالدا يەنە بىر ئەگرى سىزىق (1.3.2 ـ رەسىمنىڭ سول تەرىپىدىكى ئەگرى سىزىق) قا ئىگە بولىمىز. بۇ ئەگرى سىزىق تۆۋەندىكى شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان نۇقتىلارنىڭ توپلىمىدىن ئىبارەت:

$$P=\{M||MF_2|-|MF_1|=\text{تۇراقلىق سان}\}.$$

بۇ ئىككى ئەگرى سىزىق بىرلەشتۈرۈلۈپ ھىپېربولا دەپ ئاتىلىدۇ، ھەربىر ئەگرى سىزىق ھىپېربولانىڭ بىر تارمىقى دېيىلىدۇ.

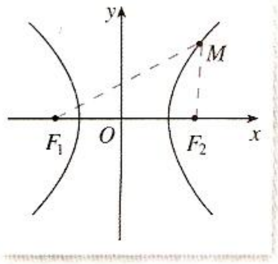
مۇلاھىزە؟

ئېللىپسنىڭ ئېنىقلىمىسىغا تەققاسلاپ، ھىپېربولانىڭ ئېنىقلىمىسىنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

تەكشىلىكتىكى ئىككى مۇقىم نۇقتا F_1، F_2 گىچە ئارىلىقلىرىنىڭ ئايرىمىسىنىڭ مۇتلەق قىممىتى تۇراقلىق سان ($|F_1F_2|$ دىن كىچىك) غا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ ترايېكتورىيىسى **ھىپېربولا** (hyperbola) دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ ئىككى مۇقىم نۇقتا **ھىپېربولانىڭ فوكۇسى**، ئىككى فوكۇسنىڭ ئارىلىقى **ھىپېربولانىڭ فوكۇسلار ئارىلىقى** دەپ ئاتىلىدۇ.

ئىزدىنىش

ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش جەريانىغا تەققاسلاپ، كوئوردىنات سىستېمىسىنى قانداق تاللاش ۋە ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى قانداق تۇرغۇزۇش كېرەكلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟



2.3.2 - رەسىم

بىز ھىپېربولانىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاپ، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۈزىمىز.

2.3.2 - رەسىمدىكىدەك، x ئوق F_1، F_2 فوكۇسلاردىن ئۆتىدىغان، y ئوق F_1F_2 كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى بولىدىغان قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزىمىز.

$M(x, y)$ نى ھىپېربولا ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، ھىپېربولانىڭ فوكۇسلار ئارىلىقىنى $2c$ $(c>0)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا F_1، F_2 فوكۇسلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم - ئايرىم $(-c, 0)$، $(c, 0)$ بولىدۇ. ئاندىن M نۇقتىدىن F_1، F_2 نۇقتىلارغىچە بولغان ئارىلىقلار ئايرىمىسىنىڭ مۇتلەق قىممىتىنى تۇراقلىق سان $2a$ غا تەڭ دەپ پەرەز قىلىمىز.

$2a$ دەپ پەرەز قىلىش مەسىلىنى تەتقىق قىلىشىمىزغا قولايلىق يارىتىپ بېرىدۇ.

ئېنىقلىمىدىن بىلەلەيمىزكى، ھىپېربولا تۆۋەندىكى توپلامدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\{M \mid ||MF_1|-|MF_2||=2a\}.$$

$$\because |MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad ①$$

ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇشتىكى ئاددىيلاشتۇرۇش جەريانىغا تەققاسلاپ، ① نى ئاددىيلاشتۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2),$$

ئىككى تەرىپىنى بىرلا ۋاقىتتا $a^2(c^2-a^2)$ قا بۆلسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

ھىپېربولانىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلىمىزكى، $2c>2a$، يەنى $c>a$، شۇڭا $c^2-a^2>0$ بولىدۇ.

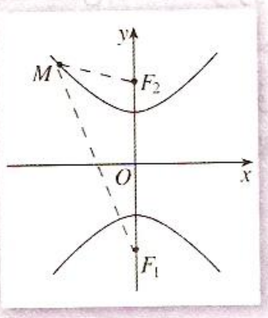
سىز y ئوق ئۈستىدىن $|OB|=b$ بولىدىغان قىلىپ بىر B نۇقتىنى تاپالامسىز؟

ئېللىپسنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇش جەريانىغا تەققاسلاپ، $c^2-a^2=b^2$ $(b>0)$ دەپ ئالساق ھەم ئۇنى يۇقىرىقى ئىپادىگە قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).\qquad ②$$

يۇقىرىدىكى جەرياندىن كۆرۈۋالالايمىزكى، ھىپپىربولانىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كو ـ ئوردىناتى تەڭلىمە ② نى قانائەتلەندۈرىدۇ، تەڭلىمە ② نىڭ يېشىمى (x, y) نى كوئوردىنات قىلغان نۇق ـ تىدىن ھىپپىربولانىڭ ئىككى فوكۇسى $F_1(-c, 0)$ ، $F_2(c, 0)$ گىچە بولغان ئارىلىقلار ئايرىمىسىنىڭ مۇت ـ لەق قىممىتى $2a$ بولىدۇ، يەنى تەڭلىمە ② نىڭ يېشىمىنى كوئوردىنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ھىپپىربولانىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمىنىڭ مۇناسىۋىتىدىن بىلەلەيمىزكى، تەڭ ـ لىمە ② ھىپپىربولانىڭ تەڭلىمىسى بولىدۇ. بىز تەڭلىمە ② نى **ھىپپىربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى** دەپ ئاتايمىز. ئۇ فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتقان، فوكۇسلىرى ئايرىم ـ ئايرىم $F_1(-c, 0)$ ، $F_2(c, 0)$ بولغان ھىپپىربولانى ئىپادىلەيدۇ، بۇ يەردە $c^2=a^2+b^2$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟



3.3.2 ـ رەسىم

3.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، فوكۇسى y ئوق ئۈستىدە ياتقان ئېللىپس ـ نىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسگە تەققاسلىساق، ھىپپىربولانىڭ فوكۇسلىرى ئايرىم ـ ئايرىم $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$ بولۇپ، a ، b لارنىڭ مەنىسى يۇ ـ قىرىدا دېيىلگەندىكىگە ئوخشاش بولغان ئەھۋالدا، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى قانداق بولىدۇ؟

بۇ چاغدا ھىپپىربولانىڭ تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0),$$

بۇ تەڭلىمىمۇ ھىپپىربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى بولىدۇ.

1 ـ مىسال. ھىپپىربولانىڭ ئىككى فوكۇسى ئايرىم ـ ئايرىم $F_1(-5, 0)$ ، $F_2(5, 0)$ بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈستىدىكى بىر P نۇقتىدىن F_1 ، F_2 گىچە بولغان ئارىلىقلار ئايرىمىسىنىڭ مۇتلەق قىممىتى 6 گە تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ھىپپىربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: ھىپپىربولانىڭ فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلى ـ مىسىنى تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلساق بولىدۇ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0).$$

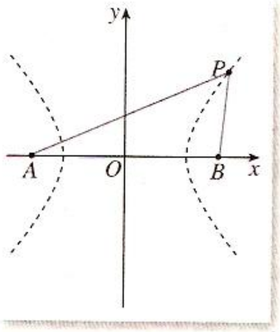
$2a=6$ ، $2c=10$ بولغانلىقتىن، $a=3$ ، $c=5$ بولىدۇ، شۇڭا $b^2=5^2-3^2=16$.

شۇنىڭ ئۈچۈن، ھىپپىربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

2 ـ مىسال. A، B ئىككى جاينىڭ ئارىلىقى 800m بولۇپ، زەمبىرەك ئوقىنىڭ پارتلاش ئاۋازىنى A جايدىكىلەر B جايدىكىلەردىن 2s كېيىن ئاڭلايدىغانلىقى ھەمدە ئاۋازنىڭ تېزلىكى 340m/s ئىكەنلىكى بېرىلگەن. زەمبىرەك ئوقى پارتلاش نۇقتىسىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

تەھلىل: ئالدى بىلەن مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، ترايېكتورىيىنىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلىمىز. ئاۋازنىڭ تېزلىكى ۋە A، B ئىككى جايدا تۇرۇپ پارتلاش ئاۋازىنى ئاڭلىغاندىكى ۋاقىت پەرقىگە ئاساسەن، A، B ئىككى جايدىن پارتلاش نۇقتىسىغىچە بولغان ئارىلىقلار ئايرىمىسىنىڭ مۇقىم قىممەت بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز. شۇڭا، پارتلاش نۇقتىسى A، B نى فوكۇس قىلغان ھىپېربولانىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. پارتلاش نۇقتىسىدىن A جايغىچە بولغان ئارىلىق ئۇنىڭدىن B جايغىچە بولغان ئارىلىقتىن چوڭ بولغانلىقى ئۈچۈن، پارتلاش نۇقتىسى ھىپېربولانىڭ B جايغا يېقىن بولغان بىر تارمىقى ئۈستىدە بولۇشى كېرەك.



4.3.2 ـ رەسىم

يېشىش: 4.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، A، B ئىككى نۇقتا x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان ھەمدە كوئوردىنات بېشى O كېسىك AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغان قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزۇۋالىمىز.

پارتلاش نۇقتىسى P نىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$|PA|-|PB|=340\times 2=680,$$

يەنى

$$2a=680,\ a=340.$$

$$\because\ |AB|=800,$$

$$\therefore\ 2c=800,\ c=400,$$

$$b^2=c^2-a^2=44\,400.$$

$$\because |PA|-|PB|=340\times 2=680>0,$$

$$\therefore\ x>0.$$

ئەگەر A، B ئىككى جايدىكىلەر بىرلا ۋاقىتتا پارتلاش ئاۋازىنى ئاڭلىغان بولسا، ئۇ ھالدا پارتلاش نۇقتىسى قانداق ئەگرى سىزىق ئۈستىدە ياتىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

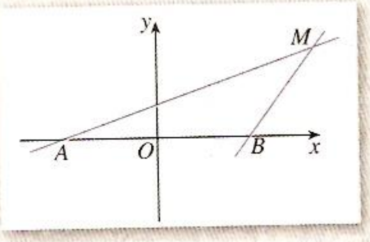
شۇنىڭ ئۈچۈن، زەمبىرەك ئوقىنىڭ پارتلاش نۇقتىسىنىڭ ترايېكتورىيە (ھىپېربولا) تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\frac{x^2}{115\,600}-\frac{y^2}{44\,400}=1\ (x>0).$$

ئوخشاش بولمىغان ئىككى كۆزىتىش نۇقتىسى A، B دا تۇرۇپ ئوخشاش بىر P نۇقتىدىن چىققان سىگنالنى ئاڭلىغاندىكى ۋاقىت پەرقىنى ئۆلچەش ئارقىلىق، P نۇقتا ياتقان ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ. ئەگەر يەنە بىر كۆزىتىش نۇقتىسى C قوشۇلسا، ئۇ ھالدا B، C (ياكى A، C) ئىككى نۇقتىدا تۇرۇپ P نۇقتىدىن چىققان سىگنالنى ئاڭلىغاندىكى ۋاقىت پەرقىنى ئۆلچەش ئارقىلىق، يەنە بىر ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىپ چىقىشقا بولىدۇ. بۇ ئىككى تەڭلىمىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنى يېشىش ئارقىلىق، P نۇقتىنىڭ ئېنىق ئورنىنى بەلگىلەشكە بولىدۇ. بۇ، ھىپېربولانىڭ بىر مۇھىم قوللىنىلىشىدۇر.

ئىزدىنىش

5.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، B ، A نۇقتىلار- نىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم (0 ,5−)، (0 ,5) بولۇپ، تۈز سىزىق AM ، BM لار M نۇقتىدا كېسىشىدۇ ھەمدە ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى $\frac{4}{9}$ كە تەڭ. M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسگە ئاساسەن ترايېكتورىيىنىڭ شەكلىگە ھۆ- كۈم قىلىڭ. 2.2 ـ پاراگرافتىكى 3 ـ مىسالغا سېلىشتۇرۇپ كۆرۈڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟



5.3.2 ـ رەسىم

مەشىق

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، $a=4$ ، $b=3$؛

(2) فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ ھەمدە $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$، $(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{2})$ نۇقتىلاردىن ئۆتىدۇ؛

(3) فوكۇسلىرى $(0, -6)$ ، $(0, 6)$ ھەمدە $(-5, 2)$نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

2. ھىپېربولا $x^2-15y^2=15$ بىلەن ئېللىپس $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ نىڭ فوكۇسلىرى ئوخشاش بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. تەڭلىمە $\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{m+1}=1$ نىڭ ھىپېربولانى ئىپادىلەيدىغانلىقى بېرىلگەن، m نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

2-3-2 ھىپېربولانىڭ ئاددىي گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتى

ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئۇسۇلىغا تەققاسلاپ، ھىپېربولا- نىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0). \qquad ①$$

گە ئاساسەن ئۇنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىمىز.

مۇلاھىزە ؟

ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىشقا تەققاسلاپ، ھىپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0$ ، $b>0)$ نىڭ قايسى خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىش كېرەك دەپ قارايسىز؟ بۇ خۇسۇسىيەتلەرنى قانداق تەتقىق قىلىش كېرەك؟

1. دائىرىسى

ھىپېربولانى كۆزىتىش ئارقىلىق، ئۇنىڭ تەڭسىزلىك $x \leqslant -a$ بىلەن $x \geqslant a$ ئىپادىلىگەن دائىرە ئىچىدە ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز. تۆۋەندە ھىپېربولانىڭ دائىرىسىنى ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىدىن پايدىلىنىپ تاپىمىز.

تەڭلىمە ① نى تۆۋەندىكىدەك ئۆزگەرتىمىز:

$$\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2},$$

شۇڭا ھىپېربولا ئۈستىدىكى نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى (x, y) تەڭسىزلىك $\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$ گە ئۇيغۇن كېلىدۇ، يەنى

$$x^2\geqslant a^2,$$

شۇڭا $x\leqslant -a$ ياكى $x\geqslant a$ بولىدۇ.

بۇ، ھىپېربولانىڭ تەڭسىزلىك $x \leqslant -a$ بىلەن $x\geqslant a$ ئىپادىلىگەن دائىرە ئىچىدە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرىدۇ.

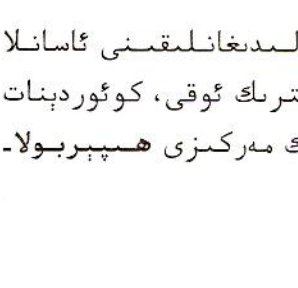
2. سىممېترىكلىكى

ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ نىڭ سىممېترىكلىكىنى تەتقىق قىلىش ئۇسۇلىغا تەققاسلاپ، ھىپېربولانىڭ x ئوق، y ئوق ۋە كوئوردىنات بېشىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدىغانلىقىنى ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز. بۇ چاغدا، كوئوردىنات ئوقلىرى ھىپېربولانىڭ سىممېترىك ئوقى، كوئوردىنات بېشى ھىپېربولانىڭ سىممېترىك مەركىزى بولىدۇ. ھىپېربولانىڭ سىممېترىك مەركىزى **ھىپېربولانىڭ مەركىزى** دەپ ئاتىلىدۇ.

3. چوققىسى

تەڭلىمە ① دە، $y=0$ دەپ ئالساق، $x=\pm a$ كېلىپ چىقىدۇ، شۇڭا ھىپېربولا بىلەن x ئوقنىڭ $A_1(-a, 0)$ ، $A_2(a, 0)$ دىن ئىبارەت ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ. x ئوق ھىپېربولانىڭ سىممېترىك ئوقى بولغانلىقتىن، ھىپېربولا بىلەن ئۇنىڭ سىممېترىك ئوقىنىڭ ئىككى كېسىشىش نۇقتىسى بولىدۇ، ئۇلار **ھىپېربولانىڭ چوققىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

$x=0$ دەپ ئالساق، $y^2=-b^2$ كېلىپ چىقىدۇ، ئەمما بۇ تەڭلىمە ھەقىقىي يىلتىزغا ئىگە ئەمەس، بۇ، ھىپېربولا بىلەن y ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى يوق ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ، شۇنداق بولسىمۇ، بىز يەنىلا $B_1(0, -b)$ ، $B_2(0, b)$ نى y ئوق ئۈستىگە بەلگىلەپ قويىمىز (6.3.2 ـ رەسىم).



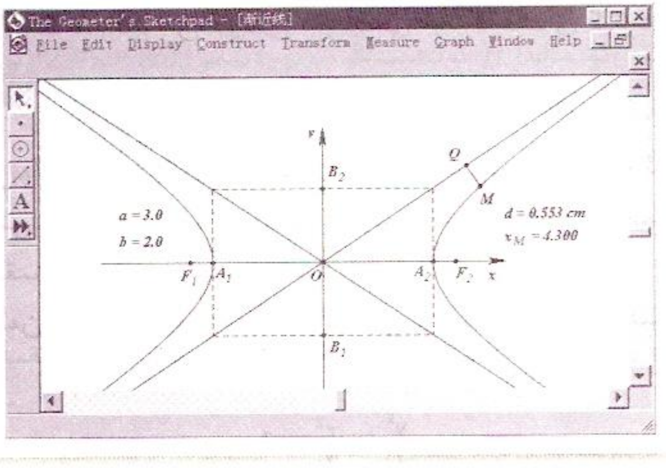
6.3.2 ـ رەسىم

كېسىك A_1A_2 **ھىپېربولانىڭ ھەقىقىي ئوقى** دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى $2a$ غا تەڭ بولىدۇ، a بولسا ھىپېربولانىڭ ھەقىقىي يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى دېيىلىدۇ؛ كېسىك B_1B_2 **ھىپېربولانىڭ مەۋھۇم ئوقى** دەپ ئاتىلىدۇ، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى $2b$ غا تەڭ بولىدۇ، b بولسا ھىپېربولانىڭ مەۋھۇم يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى دېيىلىدۇ.

4. تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقى

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

7.3.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئالدى بىلەن ھىپېربولا $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ نى «گېئومېتىرىيىلىك سىزىش تاختىسى(几何画板)» دىن پايدىلىنىپ سىزىمىز، ئاندىن 1 ـ چارەكتىكى ئەگرى سىزىق ئۈستىگە بىر M نۇقتىنى بەلگىلەپ، M نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x_M نى ۋە ئۇنىڭدىن تۈز سىزىق $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0$ گىچە بولغان ئارىلىق d نى ئۆلچەيمىز، ئۇنىڭدىن كېيىن، M نۇقتىنى ئەگرى سىزىقنى بويلاپ ئوڭ يۇقىرى تەرەپكە سۈرۈپ، x_M بىلەن d نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىنى كۆزىتىمىز، سىز نېمىنى بايقىدىڭىز؟



7.3.2 ـ رەسىم

شۇنى بايقاشقا بولىدۇكى، M نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى x_M قانچە چوڭايسا، d شۇنچە كىچىكلەيدۇ، ئەمما ئۇ مەڭگۈ 0 گە تەڭ بولمايدۇ.

ئەمەلىيەتتە، A_1، A_2 ئارقىلىق y ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقى $x=\pm a$ نى، B_1، B_2 ئارقىلىق x ئوقىنىڭ پاراللېل سىزىقى $y=\pm b$ نى ئۆتكۈزسەك، بۇ تۆت تۈز سىزىق بىر تىك تۆتبۇلۇڭ ھاسىل قىلىدۇ (7.3.2 ـ رەسىم). بۇ تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ ئىككى دىئاگونالى ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسى $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ بولىدۇ. ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ شۇنى كۆرەلەيمىزكى، ھىپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نىڭ ھەربىر تارمىقى سىرتقا قاراپ سوزۇلغاندا، ئۇلار بۇ ئىككى تۈز سىزىققا تەدرىجىي يېقىنلىشىدۇ، بىز بۇ ئىككى تۈز سىزىقنى **ھىپېربولانىڭ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقى** دەپ ئاتايمىز. باشقىچە ئېيتقاندا، ھىپېربولا ئۆزىنىڭ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىغا چەكسىز يېقىنلىشىدۇ، لېكىن ئۇلار بىلەن مەڭگۈ كېسىشمەيدۇ.

ئەگەر تەڭلىمە $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ دە، $a=b$ بولسا، ئۇ ھالدا ھېپېربولانىڭ تەڭلىمىسى $x^2-y^2=a^2$ بولۇپ، ئۇنىڭ ھەقىقىي ئوقى بىلەن مەۋھۇم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا $2a$ غا تەڭ بولىدۇ. بۇ چاغدا، تۆت تۈز سىزىق $x=\pm a$، $y=\pm a$ كۋادراتنى ھاسىل قىلىدۇ، تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقلارنىڭ تەڭلىمىسى $x=\pm y$ كە ئايلىنىدۇ، بۇ ئىككى تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىق ئۆزئارا تىك بولۇپ، ھېپېربولانىڭ ھەقىقىي ئوقى بىلەن مەۋھۇم ئوقىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلارنى تەڭ ئىككىگە بۆلىدۇ. ھەقىقىي ئوقى بىلەن مەۋھۇم ئوقى ئۆزئارا تەڭ بولغان ھېپېربولا **تەڭ ئوقلۇق ھېپېربولا** دەپ ئاتىلىدۇ.

5. مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى

ئېللىپسىتىكىغا ئوخشاش، ھېپېربولانىڭ فوكۇسلار ئارىلىقى بىلەن ھەقىقىي ئوقى ئۇزۇنلۇقىنىڭ نىسبىتى $\frac{c}{a}$ **ھېپېربولانىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى** دەپ ئاتىلىدۇ. $c>a>0$ بولغانلىقتىن، ھېپېربولانىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=\frac{c}{a}>1$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

ئېللىپسنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى ئۇنىڭ سوقچاقلىق دەرىجىسىنى سۈرەتلەپ بېرىدۇ، ئۇنداق بولسا، ھېپېربولانىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى ئۇنىڭ قانداق گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىنى سۈرەتلەپ بېرىدۇ؟

3 ـ مىسال. ھېپېربولا $9y^2-16x^2=144$ نىڭ ھەقىقىي يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە مەۋھۇم يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى، فوكۇسلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسىنى، تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: ئالدى بىلەن تەڭلىمە $9y^2-16x^2=144$ نى تۆۋەندىكى ئۆلچەملىك تەڭلىمىگە ئايلاندۇرۇۋالىمىز:

$$\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1.$$

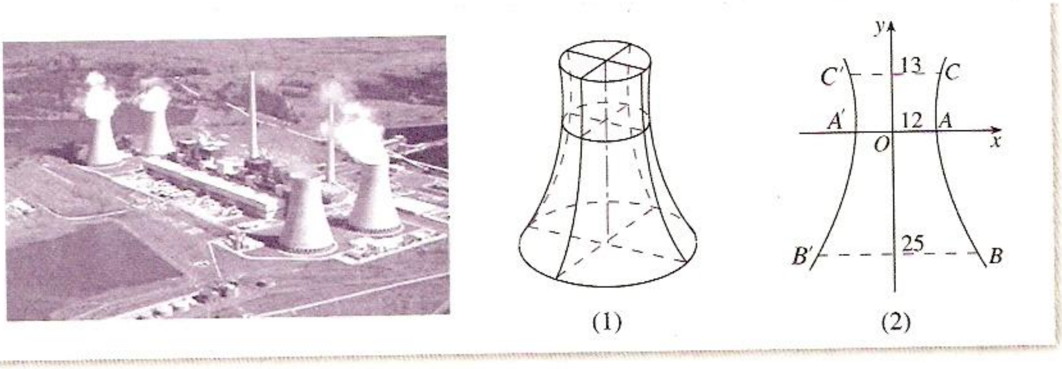
بۇنىڭدىن بىلەلەيمىزكى، ھېپېربولانىڭ ھەقىقىي يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $a=4$، مەۋھۇم يېرىم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $b=3$ بولىدۇ؛

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

ئىككى فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى $(0, -5)$، $(0, 5)$؛ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$؛ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسى $y=\pm\frac{4}{3}x$ بولىدۇ.

بۇ ھېپېربولانىڭ تەخمىنىي شەكلىنى سىزىڭ.

4 ـ مىسال. ھېپېربولا تىپىدىكى سوۋۇتۇش مۇنارىنىڭ سىرتقى شەكلى ھېپېربولانىڭ بىر بۆلىكىنى ئۇنىڭ مەۋھۇم ئوقىنى چۆرىدىتىپ ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئەگرى سىرتتىن ئىبارەت (8.3.2 ـ رەسىم (1)) بولۇپ، ئۇنىڭ ئەڭ كىچىك رادىئۇسى 12 m، ئۈستۈنكى ئاغزىنىڭ رادىئۇسى 13 m، ئاستىنقى ئاغزىنىڭ رادىئۇسى 25 m، ئېگىزلىكى 55 m. مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تاللاپ، بۇ ھېپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى (1 m غىچە ئېنىقلىقتا).



8.3.2 ـ رەسىم

يېشىش: 8.3.2 ـ رەسىم (2) دىكىدەك، سوۋۇتۇش مۇنارىنىڭ ئوق كەسمىسى ياتقان تەكشىلىكتە كىچىك چەمبەرنىڭ AA' دىئامېتىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدىغان، چەمبەر مەركىزى كوئوردىنات بېشى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغان قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزۇۋالىمىز. بۇ چاغدا، مۇنارنىڭ ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى ئاغزىنىڭ CC'، BB' دىئامېتىرلىرى x ئوققا پاراللېل ھەمدە $|CC'|=13\times2$، $|BB'|=25\times2$ بولىدۇ.

ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0$، $b>0)$ دەپ پەرەز قىلىپ، C نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى $(13, y)$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا B نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(25, y-55)$ بولىدۇ.

B، C نۇقتىلار ھىپېربولانىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن،

$$\begin{cases}\frac{25^2}{12^2}-\frac{(y-55)^2}{b^2}=1, & ①\\ \frac{13^2}{12^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. & ②\end{cases}$$

② تەڭلىمىدىن $y=\frac{5b}{12}$ (مەنپىي قىممەتنى تاشلىۋېتىمىز) كېلىپ چىقىدۇ، بۇنى ① تەڭلىمىگە قويساق:

$$\frac{25^2}{12^2}-\frac{\left(\frac{5b}{12}-55\right)^2}{b^2}=1,$$

ئاددىيلاشتۇرساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$19b^2+275b-18\,150=0. \quad ③$$

③ تەڭلىمىنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ يەشسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$b\approx25.$$

شۇڭا، تاپماقچى بولغان ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1.$$

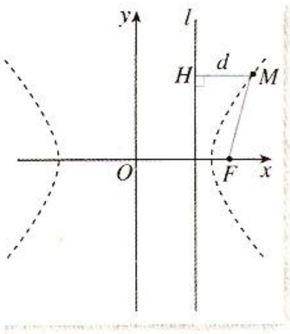
5 ـ مىسال. $M(x, y)$ نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا $F(5, 0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق l: $x=\frac{16}{5}$ گىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى تۇراقلىق سان $\frac{5}{4}$ كە تەڭ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تاپايلى.

يېشىش: d نى M نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق دەپ پەرەز قىلساق، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، تاپماقچى بولغان ترايېكتورىيە تۆۋەندىكى توپلامدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\left\{M\left|\frac{|MF|}{d}=\frac{5}{4}\right.\right\},$$

بۇنىڭدىن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|\frac{16}{5}-x\right|}=\frac{5}{4}.$$



9.3.2 - رەسىم

بۇ ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئاندىن ئاددىيلاشتۇرساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$9x^2-16y^2=144,$$

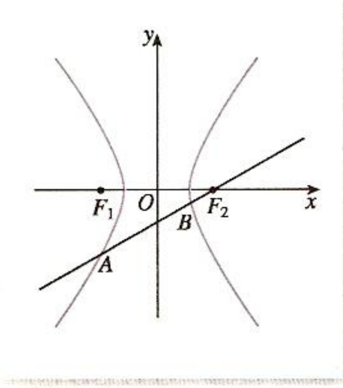
يەنى

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى ھەقىقىي ئوقنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن مەۋھۇم ئوقنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم 8، 6 بولغان ھىپېربولادىن ئىبارەت (9.3.2 - رەسىم).

مۇلاھىزە ؟

5 - مىسال بىلەن 2.2 - پاراگرافتىكى 6 - مىسالنى سېلىشتۇرۇڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟



10.3.2 - رەسىم

6 - مىسال. 10.3.2 - رەسىمدىكىدەك، ھىپېربولا $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ نىڭ ئوڭ فوكۇسى F_2 دىن ئۆتكەن، يانتۇلۇق بۇلۇڭى $30°$ بولغان تۈز سىزىق ھىپېربولا بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشسە، $|AB|$ نى تاپايلى.

يېشىش: ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىگە ئاساسەن، ئۇنىڭ ئىككى فوكۇسى ئايرىم - ئايرىم $F_1(-3, 0)$، $F_2(3, 0)$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز.

AB تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇق بۇلۇڭى $30°$ ھەمدە بۇ تۈز سىزىق ئوڭ فوكۇس F_2 دىن ئۆتىدىغانلىقى ئۈچۈن، AB تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3) \qquad ①$$

بولىدۇ، تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1 \end{cases}$$

دىكى y نى يوقاتساق:

$$5x^2+6x-27=0.$$

بۇ تەڭلىمىنى يەشسەك:

$$x_1=-3,\ x_2=\frac{9}{5}.$$

x_1، x_2 نىڭ قىممىتىنى تەڭلىمە ① گە قويساق:

$$y_1=-2\sqrt{3},\ y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

شۇنىڭ بىلەن، A، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-3,\ -2\sqrt{3})$، $\left(\frac{9}{5},\ -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ بولىدۇ.

$$\therefore\ |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-3-\frac{9}{5}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{16}{5}\sqrt{3}.$$

مۇلاھىزە ؟

$\triangle AF_1B$ نىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقىنى تاپالامسىز؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكى ھىپېربولالارنىڭ ھەقىقىي ئوقى ۋە مەۋھۇم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى، چوققىسى ۋە فوكۇسلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى، مەركەزدىن قىچىش دەرىجىسىنى تېپىڭ:

(1) $x^2-8y^2=32$;　(2) $9x^2-y^2=81$;

(3) $x^2-y^2=-4$;　(4) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=-1$.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) چوققىلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، ئىككى چوققىسىنىڭ ئارىلىقى 8، $e=\frac{5}{4}$؛

(2) فوكۇسلىرى y ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، فوكۇسلار ئارىلىقى 16 گە تەڭ، $e=\frac{4}{3}$.

3. ئېللىپس $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ نىڭ فوكۇسلىرىنى چوققا، چوققىلىرىنى فوكۇس قىلغان ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4. سىممېترىك ئوقلىرى كوئوردىنات ئوقلىرىدا ياتقان تەڭ ئوقلۇق ھىپېربولانىڭ بىر فوكۇسى $F_1(-6,\ 0)$ بولسا، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى بىلەن تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

5. تۆۋەندىكى تۈز سىزىق بىلەن ھىپېربولانىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ:

(1) $2x-y-10=0,\ \frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$;

(2) $4x-3y-16=0,\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

3.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ھىپېربولا $4x^2-y^2+64=0$ نىڭ ئۈستىدىكى بىر P نۇقتىدىن ئۇنىڭ بىر فوكۇسىغىچە بولغان ئارىلىق 1 گە تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا P نۇقتىدىن ئۇنىڭ يەنە بىر فوكۇسىغىچە بولغان ئارىلىق ______ بولىدۇ.

2. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، $a=2\sqrt{5}$، $A(-5, 2)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) $A(-7, -6\sqrt{2})$، $B(2\sqrt{7}, 3)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

3. بېرىلگەن ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىگە ئاساسەن، ئۇنىڭ فوكۇسلىرىنىڭ كوئوردىناتىنى، مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسىنى ۋە تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $16x^2-9y^2=144$; (2) $16x^2-9y^2=-144$.

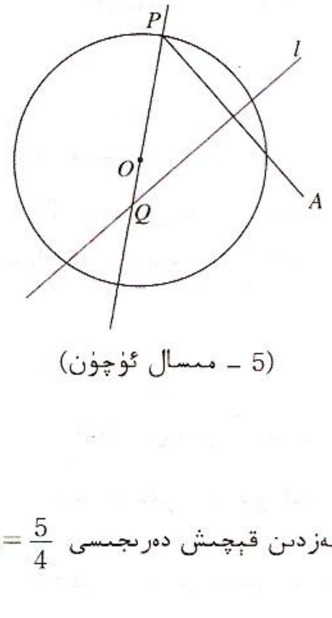
4. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) فوكۇسلىرى x ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، ھەقىقىي ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 10، مەۋھۇم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 8؛

(2) فوكۇسلىرى y ئوق ئۈستىدە ياتىدۇ، فوكۇسلار ئارىلىقى 10، مەۋھۇم ئوقىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 8؛

(3) مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=\sqrt{2}$، $M(-5, 3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

5. رەسىمدىكىدەك، O چەمبەرنىڭ رادىئۇسى مۇقىم ئۇزۇنلۇق r غا تەڭ بولۇپ، A نۇقتا O چەمبەرنىڭ سىرتىدىكى بىر مۇقىم نۇقتا، P بولسا چەمبەر ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، AP كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى l بىلەن OP تۈز سىزىق Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ. P نۇقتا چەمبەر ئۈستىدە ھەرىكەت قىلغاندا، Q نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى نېمە بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟



(5 ـ مەسىلە ئۈچۈن)

6. $A(3, -1)$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغان ھەمدە سىممېترىك ئوقلىرى كوئوردىنات ئوقىدا ياتىدىغان تەڭ ئوقلۇق ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

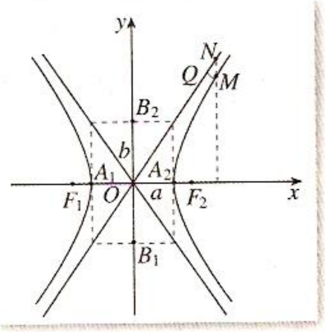
1. فوكۇسلىرى ئېللىپس $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ نىڭكى بىلەن ئوخشاش ھەمدە مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى $e=\frac{5}{4}$ بولغان ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. ئارىلىقى 1400m كېلىدىغان A، B ئىككى قاراۋۇلخانىدا تۇرۇپ زەمبىرەك ئوقىنىڭ پارتلاش ئاۋازىنى ئاڭلىغاندىكى ۋاقىت پەرقى 3s بولۇپ، ئاۋازنىڭ تېزلىكى 340m/s بولسا، پارتلاش نۇقتىسى قانداق ئەگرى سىزىق ئۈستىدە ياتىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

3. M نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا $F(c, 0)$ $(c>0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق $l: x=\frac{a^2}{c}$ قىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى $\frac{c}{a}$ $(\frac{c}{a}>1)$ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى تېپىڭ.

4. ھىپېربولا $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ بېرىلگەن، $P(1, 1)$ نۇقتا ئارقىلىق بۇ ھىپېربولا بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدىغان ھەم P نۇقتا AB كېسىكىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولىدىغان بىر l تۈز سىزىقنى سىزىشقا بولامدۇ؟

نېمە ئۈچۈن $y=\pm\frac{b}{a}x$ ھېپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نىڭ تەدرىجىي يېقىنلاشقۇچى سىزىقى بولىدۇ؟



رەسىمدىكىدەك، ئالدى بىلەن ھېپېربولا $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نىڭ 1 ـ چارەكتىكى بۆلىكىگە نىسبەتەن ئىسپاتلاش ئېلىپ بارىمىز. بۇ بۆلەكنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad (x>a).$$

$M(x, y)$ نى ھېپېربولانىڭ مۇشۇ بۆلىكى ئۈستىدىكى نۇقتا، $N(x, Y)$ نى تۈز سىزىق $y=\frac{b}{a}x$ ئۈستىدىكى ئابسىپسىسى M نىڭكى بىلەن ئوخشاش بولغان نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $Y=\frac{b}{a}x$ بولىدۇ.

$$\because\ y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}<\frac{b}{a}x=Y,$$

$$\therefore\ |MN|=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$|MQ|$ نى M نۇقتىدىن $y=\frac{b}{a}x$ تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىق دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $|MQ|<|MN|$ بولىدۇ.

x تەدرىجىي چوڭايغاندا، $|MN|$ تەدرىجىي كىچىكلەيدۇ، x چەكسىز چوڭايغاندا، $|MN|$ نىڭ قىممىتى 0 گە چەكسىز يېقىنلىشىپ، $|MQ|$ مۇ 0 گە چەكسىز يېقىنلىشىدۇ. دېمەك، ھېپېربولانىڭ 1 ـ چارەكتىكى بۆلىكى ON نۇرىنىڭ ئاستى تەرىپىدىن ON نۇرغا تەدرىجىي يېقىنلىشىدۇ.

قالغان چارەكلەردىمۇ يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش ئەھۋالنى ئىسپاتلاپ چىقىشقا بولىدۇ. سىز بۇنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

ئۇنىڭدىن باشقا، $|MQ|$ نى بىۋاستە ھېسابلاپ، x چەكسىز چوڭايغاندا $|MQ|$ نىڭ 0 گە چەكسىز يېقىنلىشىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاشقىمۇ بولىدۇ.

CHAPTER 2

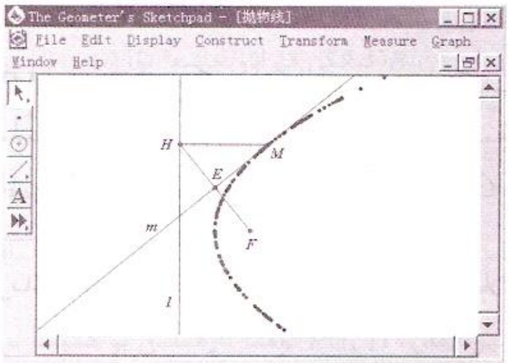
4-2 پارابولا

1-4-2 پارابولا ۋە ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

بىزگە مەلۇمكى، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ نىڭ گرافىكى پارابولا بولىدۇ، بىز بۇ پارابولانىڭ چوققىسىنىڭ كوئوردىناتى، سىممېترىك ئوقى دېگەندەك مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلغان. ئۇنداق بولسا، پارابولانىڭ زادى قانداق گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكلىرى بار؟ ئۇ يەنە قانداق گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە؟

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

1.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، «گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسى»دىن پايدىلىنىپ گرافىك سىزىمىز، بۇنىڭدىكى F مۇقىم نۇقتا، l بولسا F نۇقتىدىن ئۆتمەيدىغان مۇقىم تۈز سىزىق، H بولسا l نىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، H نۇقتا ئارقىلىق $MH \perp l$ نى ئۆتكۈزسەك، FH كېسىكىنىڭ تىك تەڭ بۆلگۈچىسى m تىك سىزىق MH بىلەن M نۇقتىدا كېسىشىدۇ. H نۇقتىنى سۈرۈپ، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسىنى كۆزىتىمىز. سىز M نۇقتا قانائەتلەندۈرىدىغان گېئومېترىيىلىك شەرتنى بايقىيالامسىز؟



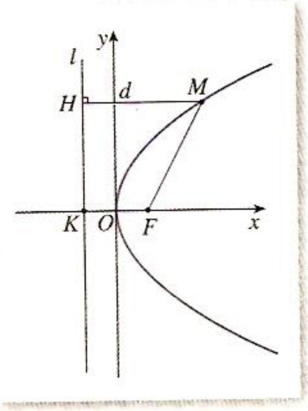
1.4.2 ـ رەسىم

شۇنى بايقاشقا بولىدۇكى، M نۇقتا H قا ئەگىشىپ ھەرىكەت قىلىش جەريانىدا، باشتىن ـ ئاخىر $|MF|=|MH|$ بولىدۇ، يەنى M نۇقتىدىن مۇقىم نۇقتا F كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن مۇقىم تۈز سىزىق l غىچە بولغان ئارىلىق ئۆز ئارا تەڭ.

تەكشىلىك ئىچىدە، بىر مۇقىم نۇقتا F بىلەن بىر مۇقىم تۈز سىزىق l (l تۈز سىزىق F نۇقتىدىن ئۆتمەيدۇ) غىچە بولغان ئارىلىقلىرى ئۆز ئارا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ تراييكتورىيىسى **پارابولا** (Parabola) دەپ ئاتىلىدۇ. F نۇقتا **پارابولانىڭ فوكۇسى**، l تۈز سىزىق **پارابولانىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئېللىپس ۋە ھېپيربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىش جەريانىغا سېلىشتۇرۇڭ، سىزىنىڭچە كوئوردېنات سىستېمىسىنى قانداق تاللىغاندا، كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان پارابولانىڭ تەڭلىمىسى تېخىمۇ ئاددىي بولىدۇ؟



2.4.2 ـ رەسىم

2.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پارابولانىڭ گېئومېتىرىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، F نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە l تۈز سىزىققا تىك (تىك ئاساسى K) بولغان تۈز سىزىقنى x ئوق، KF كېسىكىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنى كوئوردېنات بېشى قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى xOy نى تۇرغۇزۇۋالىمىز.

$|KF|=p$ ($p>0$) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا فوكۇس F نىڭ كوئوردېناتى $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$، يۆنەلدۈرگۈچى l نىڭ تەڭلىمىسى $x=-\frac{p}{2}$ بولىدۇ.

$M(x, y)$ نۇقتىنى پارابولا ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتا، M نۇقتىدىن l غىچە بولغان ئارىلىقنى d دەپ پەرەز قىلساق، پارابولانىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، پارابولا تۆۋەندىكى نۇقتىلار توپلىمىدىن ئىبارەت بولىدۇ:

$$P=\{M \mid |MF|=d\}.$$

$$\because\ |MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad d=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

$$\therefore\ \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

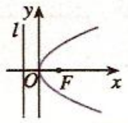
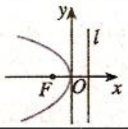
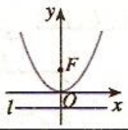
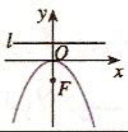
يۇقىرىقى ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئاندىن رەتلىسەك، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$y^2=2px\ (p>0). \qquad ①$$

يۇقىرىدىكى جەرياندىن كۆرۈۋالايمىزكى، پارابولانىڭ ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردېناتى تەڭلىمە ① نى قانائەتلەندۈرىدۇ؛ تەڭلىمە ① نىڭ يېشىمى (x, y) نى كوئوردېنات قىلغان نۇقتىدىن پارابولانىڭ فوكۇسى $F(\frac{p}{2}, 0)$ كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن پارابولانىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى $x=-\frac{p}{2}$ كىچە بولغان ئارىلىق ئۆز ئارا تەڭ، يەنى تەڭلىمە ① نىڭ يېشىمىنى كوئوردېنات قىلغان نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى پارابولانىڭ ئۈستىدە ياتىدۇ. بىز تەڭلىمە ① نى **پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى** دەپ ئاتايمىز. ئۇ ئىپادىلىگەن پارابولانىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردېناتى $(\frac{p}{2}, 0)$، يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى $x=-\frac{p}{2}$ بولىدۇ.

ئىزدىنىش

ئېللىپس ۋە ھىپېربولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشتا، ئوخشاش بولمىغان كوئوردىنات سىستېمىلىرىنى تاللاش ئارقىلىق ئوخشاش بولمىغان كۆرۈنۈشتىكى ئۆلچەملىك تەڭلىملەرگە ئىگە بولغانىدۇق. ئۇنداق بولسا، پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنىڭ ئوخشاش بولمىغان قانداق كۆرۈنۈشلىرى بار؟ ئىزدەنگەندىن كېيىن تۆۋەندىكى جەدۋەلنى تولدۇرۇڭ.

شەكلى	ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى	فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى	يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى
	$y^2=2px$ $(p>0)$	$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$
			
			
			

مۇلاھىزە

سىز ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى نېمە ئۈچۈن پارابولا بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟ ئۇنىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى ۋە يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

1 ـ مىسال. (1) پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى $y^2=6x$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئۇنىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتىنى ۋە يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تاپايلى؛

(2) پارابولانىڭ فوكۇسى $F(0,\ -2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

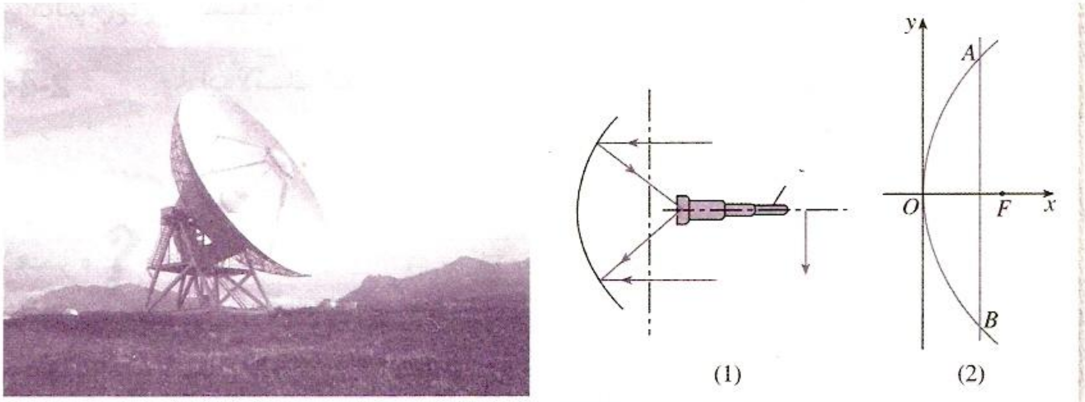
يېشىش: (1) $p=3$ بولغانلىقتىن، پارابولانىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{3}{2},0\right)$، يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى $x=-\frac{3}{2}$ بولىدۇ.

(2) بۇ پارابولانىڭ فوكۇسى y ئوقىنىڭ مەنپىي يېرىم ئوقى ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ھەمدە $\frac{p}{2}=2$،

$p=4$ بولغانلىقى ئۈچۈن، تاپماقچى بولغان پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$x^2=-8y.$$

2 ـ مىسال. 3.4.2 ـ رەسىم (1) دە بېرىلگىنى سۈنئىي ھەمراھ سىگنالىنى قوبۇل قىلىدىغان بىر خىل ئانتېنناننىڭ ئوق كەسمىسىدىن ئىبارەت. سۈنئىي ھەمراھنىڭ دولقۇن دەستىسى ئوق كەسمىسى پارابولا شەكلىدە بولغان ئانتېنناغا تەخمىنەن پاراللېل ھالەتتە چۈشۈپ، قايتۇرۇلغاندىن كېيىن فوكۇسقا يىغىلىدۇ. ئانتېنناننىڭ ئېچىلىش ئاغزىنىڭ دىئامېتىرى 4.8m، چوڭقۇرلۇقى 0.5m ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى ۋە فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتىنى تاپايلى.



3.4.2 ـ رەسىم

يېشىش: 3.4.2 ـ رەسىم (2) دىكىدەك، ئانتېنناننىڭ ئوق كەسمىسى ياتقان تەكشىلىكتە تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، ئانتېنناننىڭ چوققىسى (يەنى پارابولانىڭ چوققىسى)نى كوئوردىنات بېشى بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشۈرىمىز.

پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى $y^2=2px$ $(p>0)$ دەپ پەرەز قىلساق، بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن A نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتى $(0.5, 2.4)$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. ئۇنى تەڭلىمىگە قويساق، تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$2.4^2=2p\times0.5,$$

يەنى $p=5.76$.

شۇڭا، تاپماقچى بولغان پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى $y^2=11.52x$، فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى $(2.88, 0)$ بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى يېزىڭ:

(1) فوكۇسى $F(3, 0)$؛

(2) يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى $x=-\frac{1}{4}$؛

(3) فوكۇسىدىن يۆنەلدۈرگۈچىسىگىچە بولغان ئارىلىق 2.

2. تۆۋەندىكى پارابولالارنىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى ۋە يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $y^2=20x$;　　(2) $x^2=\frac{1}{2}y$;

(3) $2y^2+5x=0$;　　　(4) $x^2+8x=0$.

3. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ ئۈستىدىكى M نۇقتىدىن فوكۇسقىچە بولغان ئارىلىق a $(a>\frac{p}{2})$ غا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا M نۇقتىدىن يۆنەلدۈرگۈچىگىچە بولغان ئارىلىق ____، M نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى ____ بولىدۇ؛

(2) پارابولا $y^2=12x$ ئۈستىدە، فوكۇس بىلەن بولغان ئارىلىقى 9 غا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ____ بولىدۇ.

2-4-2 پارابولانىڭ ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيىتى

مۇلاھىزە ؟

ئېللىپس ۋە ھىپېربولانىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىگە تەققاسلاپ، پارابولانىڭ قايسى گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلىشقا بولىدۇ دەپ قارايسىز؟

پارابولانىڭ نۇرغۇن مۇھىم خۇسۇسىيەتلىرى بار. تۆۋەندە پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى

$$y^2=2px\ (p>0) \qquad ①$$

گە ئاساسەن، ئۇنىڭ بىر قىسىم ئاددىي گېئومېتىرىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىمىز.

1. دائىرىسى

$p>0$ بولغانلىقتىن، ① تەڭلىمىدىن بىلەلەيمىزكى، پارابولا ① ئۈستىدىكى M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى (x, y) تەڭسىزلىك $x\geqslant 0$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن، بۇ پارابولا y ئوقىنىڭ ئوڭ تەرىپىدە ياتىدۇ، ئۇنىڭ ئېچىلىش يۆنىلىشى x ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى بىلەن بىردەك بولىدۇ؛ x نىڭ قىممىتى چوڭايغاندا، $|y|$ مۇ ئۇنىڭغا ئەگىشىپ چوڭىيىدۇ، بۇ، پارابولانىڭ ئوڭ يۇقىرى تەرەپ ۋە ئوڭ تۆۋەن تەرەپكە قاراپ چەكسىز سوزۇلىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ.

2. سىممېترىكلىكى

y نىڭ ئورنىغا $-y$ نى قويساق، تەڭلىمە ① ئۆزگەرمەيدۇ، شۇڭا بۇ پارابولا x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك بولىدۇ، بىز پارابولانىڭ سىممېترىك ئوقىنى **پارابولانىڭ ئوقى** دەپ ئاتايمىز.

3. چوققىسى

پارابولا بىلەن ئۇنىڭ ئوقىنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى **پارابولانىڭ چوققىسى** دەپ ئاتىلىدۇ. تەڭلىمە ① دە، $y=0$ بولغاندا، $x=0$ بولىدۇ، شۇڭا پارابولا ① نىڭ چوققىسى دەل كوئوردىنات بېشىدىن ئىبارەت بولىدۇ.

4. مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى

پارابولا ئۈستىدىكى M نۇقتىدىن فوكۇسقىچە بولغان ئارىلىق بىلەن مۇشۇ M نۇقتىدىن يۆنەلدۈرگۈچىگىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى **پارابولانىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى** دەپ ئاتىلىپ، e بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. پارابولانىڭ ئېنىقلىمىسىدىن مەلۇمكى، $e=1$ بولىدۇ.

3 ـ **مىسال.** پارابولا x ئوقىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولۇپ، ئۇنىڭ چوققىسى كوئوردېنات بېشىدا ياتىدىغانلىقى ھەم بۇ پارابولا $M(2, -2\sqrt{2})$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: پارابولا x ئوقىغا نىسبەتەن سىممېترىك بولۇپ، ئۇنىڭ چوققىسى كوئوردېنات بېشىدا ياتىدىغانلىقى ھەم ئۇ $M(2, -2\sqrt{2})$ نۇقتىدىن ئۆتىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئۇنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك پەرەز قىلىشقا بولىدۇ:

$$y^2=2px\ (p>0).$$

M نۇقتا پارابولا ئۈستىدە ياتىدىغانلىقتىن،

$$(-2\sqrt{2})^2=2p\cdot 2,$$

يەنى

$$p=2.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، تاپماقچى بولغان پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$y^2=4x.$$

مۇلاھىزە ؟

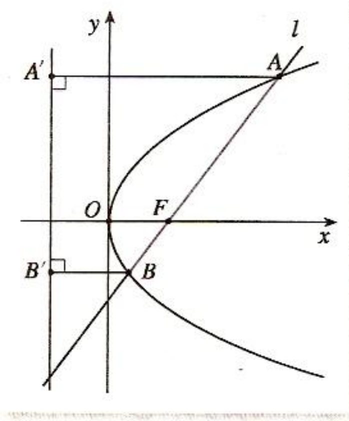
چوققىسى كوئوردېنات بېشىدا ياتقان، سىممېترىك ئوقى كوئوردېنات ئوقى بولغان ھەم $M(2, -2\sqrt{2})$ نۇقتىدىن ئۆتكەن پارابولادىن قانچىسى بار؟ ئۇلارنىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4 ـ **مىسال.** يانتۇلۇقى 1 بولغان l تۈز سىزىق پارابولا $y^2=4x$ نىڭ فوكۇسى F تىن ئۆتسە ھەمدە ئۇ پارابولا بىلەن A ، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشسە، AB كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تاپايلى.

مۇشۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ $|AB|$ نى تېپىپ كۆرۈڭ.

تەھلىل: پارابولانىڭ تەڭلىمىسىدىن ئۇنىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردېناتىنى تاپالايمىز، يەنە l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى 1 ، شۇڭا l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنىمۇ تاپالايمىز؛ l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى پارابولانىڭ تەڭلىمىسى بىلەن بىرلەشتۈرسەك، A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ كوئوردېناتىنى تېپىشقا بولىدۇ؛ ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ $|AB|$ نى تاپالايمىز. بۇ خىل ئۇسۇلنىڭ پىكىر يولى ئاددىي بولسىمۇ، لېكىن مۇرەككەپ ئالگېبرالىق ھېسابلاشلارنى ئېلىپ بېرىشقا توغرا كېلىدۇ.

تۆۋەندە يەنە بىر خىل ئۇسۇل — سان بىلەن شەكىلنى بىرلەشتۈرۈش ئۇسۇلىنى تونۇشتۇرۇپ ئۆتىمىز.



4.4.2 ـ رەسىم

4.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ دەپ پەرەز قىلساق، پارابولانىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى، $|AF|$ بىلەن A نۇقتىدىن يۆنەلدۈرگۈچىگىچە بولغان ئارىلىق $|AA'|$ ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ. $|AA'|=d_A$ دەپ پەرەز قىلساق، $d_A=x_1+1$ بولغانلىقتىن، $|AF|=d_A=x_1+1$ بولىدۇ. ئوخشاش يول بىلەن، $|BF|=|BB'|=d_B=x_2+1$ ، شۇنداق قىلىپ تۆۋەندىكىگە ئېگە بولىمىز:

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

بۇنىڭدىن كۆرۈۋېلىشقا بولىدۇكى، A ، B ئىككى نۇقتىنىڭ ئابسىسسالىرىنىڭ يىغىندىسى x_1+x_2 نى تېپىپ چىقساقلا، $|AB|$ نى تاپقىلى بولىدۇ.

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىدىن بىلەلەيمىزكى، $p=2$ ، $\frac{p}{2}=1$ ، فوكۇس F نىڭ كوئوردىناتى (1, 0)، يۆنەلدۈرگۈچى l نىڭ تەڭلىمىسى $x=-1$ بولىدۇ. 4.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ دەپ پەرەز قىلىپ، A ، B لاردىن يۆنەلدۈرگۈچىگىچە بولغان ئارىلىقلارنى ئايرىم ـ ئايرىم d_A ، d_B دەپ ئالساق، پارابولانىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن تۆۋەندىكىگە ئېگە بولىمىز:

$$|AF|=d_A=x_1+1,\quad |BF|=d_B=x_2+1,$$

شۇڭا

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

پارابولانىڭ فوكۇسى $F(1, 0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، شۇڭا تۈز سىزىق AB نىڭ تەڭلىمىسى:

$$y=x-1. \qquad ①$$

① نى تەڭلىمە $y^2=4x$ كە قويساق:

$$(x-1)^2=4x,$$

ئاددىيلاشتۇرساق:

$$x^2-6x+1=0.$$

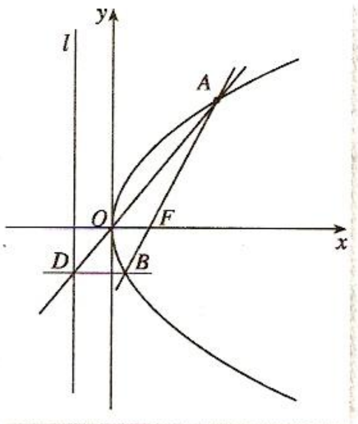
يىلتىزنى تېپىش فورمۇلىسىغا ئاساسەن:

$$x_1=3+2\sqrt{2},\quad x_2=3-2\sqrt{2},$$

شۇڭا

$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، AB كېسىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 8 بولىدۇ.



5.4.2 ـ رەسىم

5 ـ مىسال. پارابولانىڭ فوكۇسى F تىن ئۆتكەن تۈز سىزىق پارابولا بىلەن A ، B ئىككى نۇقتىدا، A نۇقتا ۋە پارابولانىڭ چوققىسىدىن ئۆتكەن تۈز سىزىق پارابولانىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى بىلەن D نۇقتىدا كېسىشسە، DB تۈز سىزىقنىڭ پارابولانىڭ سىممېترىك ئوقىغا پاراللېل بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

تەھلىل: كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايمىز، يەنى پارابولا بىلەن تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇپ، DB تۈز سىزىق بىلەن پارابولانىڭ سىممېترىك ئوقى ئارىسىدىكى ئورۇن مۇناسىۋەتنى تەڭلىمىدىن پايدىلىنىپ مۇھاكىمە قىلىمىز.

5.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇۋېلىپ، D نۇقتىنىڭ ئوردىناتى بىلەن B نۇقتىنىڭ ئوردىناتى تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ.

ئىسپات: 5.4.2 ـ رەسىمدىكىدەك، پارابولانىڭ سىممېترىك ئوقىنى x ئوق، ئۇنىڭ چوققىسىنى كوئوردىنات بېشى قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزىمىز. پارابولانىڭ تەڭلىمىسىنى

$$y^2=2px, \quad ①$$

A نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى $\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا OA تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى:

$$y=\frac{2p}{y_0}x \ (y_0 \neq 0), \quad ②$$

پارابولانىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى:

$$x=-\frac{p}{2}. \quad ③$$

② بىلەن ③ نى بىرلەشتۈرسەك، D نۇقتىنىڭ ئوردىناتىغا ئېگە بولىمىز:

$$y=-\frac{p^2}{y_0}. \quad ④$$

F نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ بولىدىغانلىقتىن، AF تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى مۇنداق بولىدۇ:

$$y=\frac{2py_0}{y_0^2-p^2}\left(x-\frac{p}{2}\right), \quad ⑤$$

بۇنىڭدا $y_0^2 \neq p^2$.

① بىلەن ⑤ نى بىرلەشتۈرسەك، B نۇقتىنىڭ ئوردىناتىغا ئېگە بولىمىز:

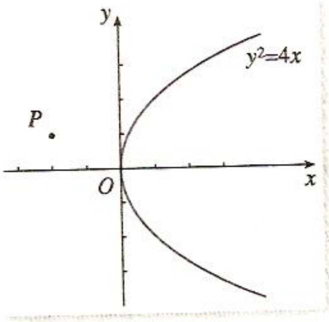
$$y=-\frac{p^2}{y_0}. \quad ⑥$$

يەنە باشقا ئىسپاتلاش ئۇسۇلىڭىز بارمۇ؟

④ ۋە ⑥ گە ئاساسەن، x ئوق // DB بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز. $y_0^2=p^2$ بولغاندا، روشەنكى، يەكۈن كۈچكە ئېگە بولىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن، DB تۈز سىزىق پارابولانىڭ سىممېترىك ئوقىغا پاراللېل بولىدۇ.

6 ـ مىسال. پارابولانىڭ تەڭلىمىسى $y^2=4x$ بولۇپ، مۇقىم نۇقتا $P(-2, 1)$ دىن ئۆتىدىغان تۈز سىزىق l نىڭ يانتۇلۇقى k ئېكەنلىكى بېرىلگەن. k قانداق قىممەتنى ئالغاندا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا $y^2=4x$ بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئېگە بولىدۇ؟ ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئېگە بولىدۇ؟ ئورتاق نۇقتىغا ئېگە بولمايدۇ؟



6.4.2 ـ رەسىم

تەھلىل: بۇ مەسىلىنى ئانالىتىك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىمىز. بۇنىڭ ئۈچۈن l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسى بىلەن پارابولانىڭ تەڭلىمىسىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىملىرىنىڭ ئەھۋالىنى مۇھاكىمە قىلساقلا، بۇنىڭغا ئاساسەن l تۈز سىزىق بىلەن پارابولانىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلغىلى بولىدۇ.

يېشىش: مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تۆۋەندىكىدەك دەپ پەرەز قىلىمىز:

$$y-1=k(x+2).$$

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ y^2=4x \end{cases} \quad (*)$$

نى تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$ky^2-4y+4(2k+1)=0. \quad ①$$

(1) $k=0$ بولغاندا، تەڭلىمە ① دىن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$y=1.$$

$y=1$ نى $y^2=4x$ كە قويساق:

$$x=\frac{1}{4}.$$

بۇ چاغدا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتا $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ گە ئىگە بولىدۇ.

(2) $k \neq 0$ بولغاندا، تەڭلىمە ① نىڭ ئېنىقلىغۇچىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\Delta=-16(2k^2+k-1).$$

(i) $\Delta=0$ بولغاندا،

$$2k^2+k-1=0$$

بولۇپ، بۇنى يەشسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$k=-1 \text{ ياكى } k=\frac{1}{2}.$$

شۇڭا، $k=-1$ ياكى $k=\frac{1}{2}$ بولغاندا، تەڭلىمە ① نىڭ پەقەت بىرلا يېشىمى بولۇپ، بۇنىڭ بىلەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسى (*) نىڭمۇ پەقەت بىرلا يېشىمى بولىدۇ. بۇ چاغدا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ.

(ii) $\Delta>0$ بولغاندا،

$$2k^2+k-1<0$$

بولۇپ، بۇنى يەشسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$-1<k<\frac{1}{2}.$$

شۇڭا، $-1<k<\frac{1}{2}$ ھەمدە $k \neq 0$ بولغاندا، تەڭلىمە ① نىڭ ئىككى يېشىمى بولۇپ، بۇنىڭ بىلەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسى (*) نىڭمۇ ئىككى يېشىمى بولىدۇ. بۇ چاغدا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ.

(iii) $\Delta<0$ بولغاندا،

$$2k^2+k-1>0$$

بولۇپ، بۇنى يەشسەك تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$k<-1 \text{ ياكى } k>\frac{1}{2}.$$

شۇڭا، $k<-1$ ياكى $k>\frac{1}{2}$ بولغاندا، تەڭلىمە ① نىڭ ھەقىقىي يېشىمى يوق بولۇپ، بۇنىڭ بىلەن

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى (*) نىڭمۇ يېشىمى يوق بولىدۇ. بۇ چاغدا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ.

يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق:

$k=-1$ ياكى $k=\frac{1}{2}$ ياكى $k=0$ بولغاندا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؛

$-1<k<\frac{1}{2}$ ھەمدە $k\neq 0$ بولغاندا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا ئىككى ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؛

$k<-1$ ياكى $k>\frac{1}{2}$ بولغاندا، l تۈز سىزىق بىلەن پارابولا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ.

بۇ يەكۈنلەرنى شەكىل سىزىش ئارقىلىق دەلىللىيەلەمسىز؟

ئىزدىنىش

1. يۇقىرىدا بايان قىلىنغان بىرنەچچە خىل ئورۇن مۇناسىۋىتىنى شەكىل سىزىپ ئىپادىلەڭ، شەكىلدىن تۈز سىزىق بىلەن پارابولا پەقەت بىرلا ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولغاندىكى ئەھۋال قانداق بولىدىغانلىقىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

2. تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ يېشىمىنىڭ سانى بىلەن ئورتاق نۇقتىنىڭ سانى قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا ياتىدۇ، x ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك ھەم $M(5, -4)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ؛

(2) چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا ياتىدۇ، فوكۇسى $F(0, 5)$؛

(3) چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا ياتىدۇ، يۆنەلدۈرگۈچىسى $x=4$؛

(4) فوكۇسى $F(0, -8)$، يۆنەلدۈرگۈچىسى $y=8$.

2. ئوخشاش بىر تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدا تۆۋەندىكى پارابولالارنى سىزىپ، ئۇلارنىڭ ئېچىلىش ئاغزىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى كۆزىتىڭ ھەم پارابولانىڭ ئېچىلىش ئاغزىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى بىلەن تەڭلىمىدىكى x نىڭ كوئېففىتسېنتى قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $y^2=\frac{1}{2}x$;　(2) $y^2=x$;　(3) $y^2=2x$;　(4) $y^2=4x$.

3. $M(2, 0)$ نۇقتىدىن ئۆتكەن l تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى 1 بولۇپ، ئۇ پارابولا $y^2=4x$ بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشسە، $|AB|$ نى تېپىڭ.

4. x ئوققا تىك بولغان تۈز سىزىق پارابولا $y^2=4x$ بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشسە ھەمدە $|AB|=4\sqrt{3}$ بولسا، AB تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

4.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى پارابولالارنىڭ فوكۇسىنىڭ كوئوردىناتى ۋە يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ:

(1) $x^2=2y$;　　(2) $4x^2+3y=0$;

(3) $2y^2+x=0$;　　(4) $y^2-6x=0$.

2. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ.

(1) يۆنەلدۈرگۈچىسىنىڭ تەڭلىمىسى $x=2$ بولغان پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى ________؛

(2) پارابولا $y^2=8x$ ئۈستىدىكى بىر نۇقتىدىن فوكۇسقىچە بولغان ئارىلىق 6 گە تەڭ بولسا، بۇ نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى ________.

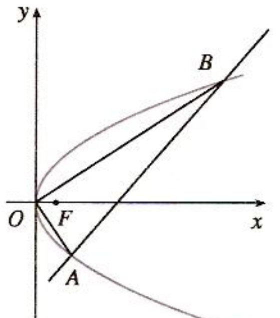
3. پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ ئۈستىدىكى M نۇقتىدىن فوكۇس F قىچە بولغان ئارىلىق $|MF|=2p$ بولسا، M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

4. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن، پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەمدە ئۇنىڭ شەكلىنى سىزىڭ:

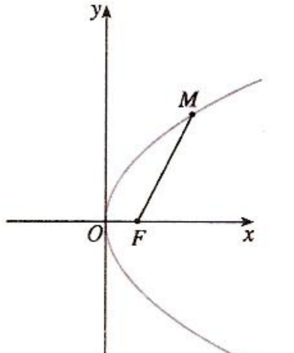
(1) چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا ياتىدۇ، سىممېترىك ئوقى x ئوق ھەمدە چوققىسى بىلەن فوكۇسىنىڭ ئارىلىقى 6 گە تەڭ؛

(2) چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا ياتىدۇ، سىممېترىك ئوقى y ئوق ھەمدە ئۇ $P(-6, -3)$ نۇقتىدىن ئۆتىدۇ.

5. رەسىمدىكىدەك، M پارابولا $y^2=4x$ نىڭ ئۈستىدىكى بىر نۇقتا، F پارابولانىڭ فوكۇسى بولۇپ، Fx نى باشلىنىش تەرىپى، FM نى ئاخىرقى تەرىپى قىلغان بۇلۇڭ $\angle xFM=60°$ بولسا، $|FM|$ نى تېپىڭ.



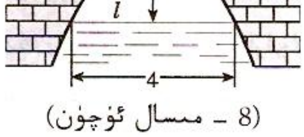
(6 ـ مىسال ئۈچۈن)



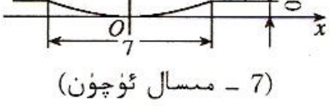
(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىق $y=x-2$ بىلەن پارابولا $y^2=2x$ ئۆزئارا A، B نۇقتىلاردا كېسىشسە، $OA \perp OB$ نى ئىسپاتلاڭ.

7. رەسىمدىكىدەك، كىران لىمىنىڭ AOB قىسمى بىر بۆلەك پارابولادىن ئىبارەت بولۇپ، ئۇنىڭ كەڭلىكى 7m، ئېگىزلىكى 0.7m بولسا، مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى قۇرۇپ، بۇ پارابولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.



(8 ـ مىسال ئۈچۈن)



(7 ـ مىسال ئۈچۈن)

8. رەسىمدىكىسى پارابولا شەكلىدىكى كۆۋرۈك ئەگمىسى بولۇپ، سۇ يۈزى l دا بولغاندا، ئەگمە چوققىسى بىلەن سۇ يۈزىنىڭ ئارىلىقى 2m، سۇ يۈزىنىڭ كەڭلىكى 4m بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، سۇ يۈزى 1m تۆۋەنلىگەندە، ئۇنىڭ كەڭلىكى قانچىلىك بولىدۇ؟

B گۇرۇپپا

1. پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ ئۈستىدىكى ھەرقايسى نۇقتىلار ئارقىلىق x ئوققا تىك كېسىك ئۆتكۈزۈلگەن بولسا، بۇ تىك كېسىكلەرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىلىرىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ ھەم بۇ ترايېكتورىيەنىڭ قانداق ئەگرى سىزىق بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

2. تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر چوققىسى كوئوردىنات بېشىدا، قالغان ئىككى چوققىسى پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ ئۈستىدە ياتسا، بۇ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

3. A، B نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-1, 0)$، $(1, 0)$ بولۇپ، AM، BM تۈز سىزىقلار M نۇقتىدا كېسىشسە ھەمدە AM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى بىلەن BM تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقىنىڭ ئايرىمىسى 2 بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$
نىڭ گرافىكى نېمە ئۈچۈن پارابولا بولىدۇ؟

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى پارابولا بولىدىغانلىقى بىزگە مەلۇم. بۇ پاراگرافتىكى ئۆگىنىشلەردىن بىلەلەيمىزكى، تەكشىلىكتىكى بىر مۇقىم نۇقتا F بىلەن بىر مۇقىم تۈز سىزىق l غىچە ئارىلىقلىرى ئۆزئارا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى پارابولا بولىدۇ، بۇ، پارابولانىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىدۇر. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ پارابولانىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرەلىسەكلا، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ نىڭ گرافىكى نېمە ئۈچۈن پارابولا بولىدۇ دېگەن مەسىلىنى ھەل قىلغان بولىمىز. يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئېيتقاندا، پارابولا بىلەن ئۇنىڭ تەڭلىمىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتتىن بىلەلەيمىزكى، ئەگەر $y=ax^2+bx+c$ نى مۇۋاپىق ئۆسۇلدىن پايدىلىنىپ پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى كۆرۈنۈشىگە ئايلاندۇرالىساق، ئۇ ھالدا ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى پارابولا بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. بۇ دېگەنلىك $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ بىلەن پارابولانىڭ ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى مۇھاكىمە قىلىش ئارقىلىق، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى بىلەن پارابولا ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش دېگەنلىكتۇر.

$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ ئوڭ تەرىپىنى كۋادراتقا كوتۈرسەك:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

فۇنكسىيە گرافىكىنى پاراللېل يۆتكەشنىڭ❶ خۇسۇسىيىتىدىن بىلەلەيمىزكى، فۇنكسىيە $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ نىڭ گرافىكىنى ۋېكتور $\boldsymbol{m}=\left(\frac{b}{2a},-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ نى بويلاپ پاراللېل يۆتكىسەك (1 ـ رەسىم)، فۇنكسىيە گرافىكىدا ھېچقانداق ئۆزگىرىش بولمايدۇ. پاراللېل يۆتكىگەندىن كېيىنكى گرافىك ماس كېلىدىغان فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى:

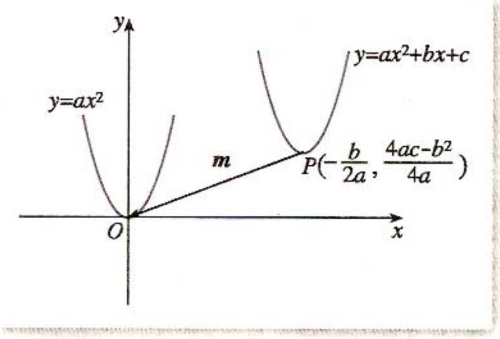
$$y=ax^2.$$

بۇ ئىپادىنى

$$x^2=\frac{1}{a}y$$

كۆرۈنۈش (تەڭلىمە) تە يازساق، بۇ، چوققىسى كوئوردېنات بېشىدا ياتقان، فوكۇسى $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ بولغان پارابولا بولىدۇ.

❶ ئادەتتە، F نى كوئوردېنات تەكشىلىكىدىكى بىر شەكىل دەپ پەرەز قىلىپ، F ئۈستىدىكى بارلىق نۇقتىلارنى ئوخشاش يۆنىلىش بويىچە ئوخشاش ئۇزۇنلۇقتا يۆتكىسەك، F' شەكىل كېلىپ چىقىدۇ. بۇ جەريان شەكىلنى پاراللېل يۆتكەش دەپ ئاتىلىدۇ.



1 ـ رەسىم

شۇنىڭ ئۈچۈن، ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى بىر پارابولادىن ئىبارەت.

ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نىڭ گرافىكى پارابولا بولىدىغانلىقىنى باشقا ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

I كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيىتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

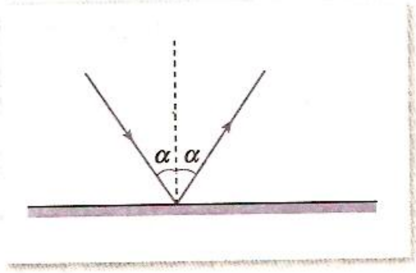
ئېللىپس، ھېپېربولا، پارابولا قاتارلىق كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ھەممىسىنىڭ فوكۇسى بار. فوكۇسنى ئەمەلىيەتتە يورۇقلۇق نۇرىنىڭ يىغىلىش نۇقتىسى دەپ چۈشىنىشكە بولىدۇ. بۇ، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ يورۇقلۇق بىلەن زىچ باغلىنىشى بارلىقىنى، شۇنداقلا ئۇلارنىڭ مول ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، بىر دەستە يورۇقلۇق نۇرى سىنئەينەك يۈزىگە چۈشكەندە، يورۇقلۇق نۇرى بەلگىلىك قانۇنىيەت بويىچە قايتۇرۇلىدۇ، يەنى چۈشۈش بۇلۇڭى قايتىش بۇلۇڭىغا تەڭ بولىدۇ (1 ـ رەسىم). يورۇقلۇق نۇرى ئەگرى سىرتقا چۈشكەندە، بولۇپمۇ كونۇس ئەگرى سىزىقنى ئۆزىنىڭ سىممېترىك ئوقىنى چۆرىدىتىپ ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان ئەگرى سىرتقا

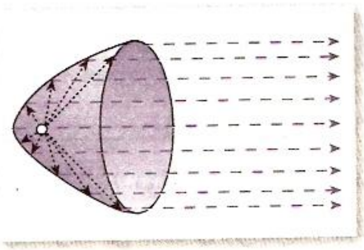
چۈشكەندە، قانداق ھادىسە يۈز بېرىدۇ؟

تۇرمۇشتىكى بىر ئەمەلىي مەسىلىنى كۆرۈپ باقايلى: كىچىك لامپۇچكىدىن چىققان يورۇقلۇق ھەممە تەرەپكە چېچىلىدۇ، ئەمما ئۇنى سىلىندىر شەكىللىك قولچىرىغىنىڭ ئىچىگە سېلىپ، مۇۋاپىق تەڭشىگەندىن كېيىن قولچىرىغىدىن بىرقەدەر كۈچلۈك ھەم پاراللېل بولغان يورۇقلۇق نۇرى چىقىدۇ، بۇنىڭ سەۋەبى نېمە؟

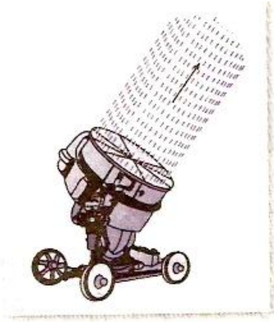
ئەسلىدە، قولچىرىغىنىڭ كىچىك لامپۇچكىسىنىڭ كەينىگە بىر يورۇقلۇق قايتۇرۇش سىنئەينىكى ئورنىتىلغان، سىنئەينەك يۈزىنىڭ شەكلى پارابولانى ئۆزىنىڭ ئوقىنى چۆرىدىتىپ ئايلاندۇرۇشتىن ھاسىل بولغان بىر ئەگرى سىرت (2 ـ رەسىم) بولۇپ، ئۇ پارابولائىد دەپ ئاتىلىدۇ. كىشىلەر پارابولانىڭ تۆۋەندىكىدەك بىر مۇھىم خۇسۇسىيىتىنى ئىسپاتلاپ چىققان: فوكۇستىن چىققان يورۇقلۇق نۇرى پارابولا ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ئارقىلىق قايتۇرۇلغاندىن كېيىن، قايتۇرۇلغان يورۇقلۇق نۇرى پارابولانىڭ ئوقىغا پاراللېل بولىدۇ. چارلاش چىرىغى (3 ـ رەسىم) مۇ دەل مۇشۇ پرىنسىپقا ئاساسەن لايىھەلەنگەن.



1 ـ رەسىم

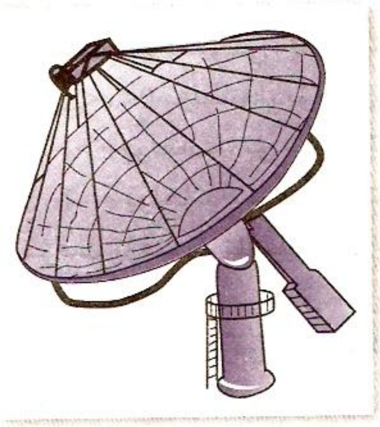


2 ـ رەسىم



3 ـ رەسىم

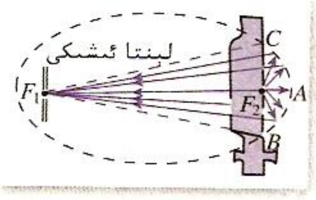
پارابولانىڭ بۇ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ، پارابولانىڭ ئوقىغا پاراللېل بولغان بىر دەستە يورۇقلۇق نۇرىنى پارابولائىدنىڭ قايتۇرۇشى ئارقىلىق ئۇنىڭ فوكۇسىغا يىغىشقىمۇ بولىدۇ. كىشىلەر بۇ پرىنسىپتىن پايدىلىنىپ سۇ ۋە يېمەكلىكلەرنى ئىسسىتىشتا ئىشلىتىلىدىغان بىر خىل قۇياش نۇرى ئوچىقىنى لايىھەلەپ چىققان (4 ـ رەسىم). بۇ خىل قۇياش نۇرى ئوچىقىدا ئايلانما پارابولائىد شەكىلدىكى بىر نۇر قايتۇرۇش سىنئەينىكى بار، ئۇنىڭ ئوقى قۇياش نۇرى بىلەن پاراللېل بولغاندا، قۇياش نۇرى قايتۇرۇلغاندىن كېيىن فوكۇسقا يىغىلىدۇ ـ دە، بۇ نۇقتىنىڭ تېمپېراتۇرىسى ناھايىتى يۇقىرى بولىدۇ.



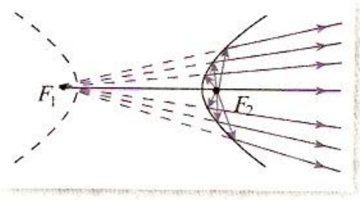
4 ـ رەسىم

ئېللىپس بىلەن ھىپېربولانىڭ ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيىتى پارابولانىڭكىگە ئوخشىمايدۇ. ئېللىپسنىڭ بىر فوكۇسىدىن چىققان يورۇقلۇق نۇرلىرى ئېللىپس ئارقىلىق قايتۇرۇلغاندىن كېيىن، قايتقان يورۇقلۇق نۇرلىرى ئېللىپسنىڭ يەنە بىر فوكۇسىدا كېسىشىدۇ (5 ـ رەسىم)؛ ھىپېربولانىڭ بىر فوكۇسىدىن چىققان يورۇقلۇق نۇرلىرى ھىپېربولا ئارقىلىق قايتۇرۇلغاندىن كېيىن، قايتقان يورۇقلۇق نۇرلىرى خۇددى يەنە بىر فوكۇستىن چېچىلىپ چىققاندەك ھالەتتە بولىدۇ (6 ـ رەسىم). كىشىلەر ئېللىپس، ھىپېربولانىڭ ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيىتىنىمۇ ھەر خىل لايىھەلەشلەردە كەڭ قوللىنىپ كەلمەكتە.

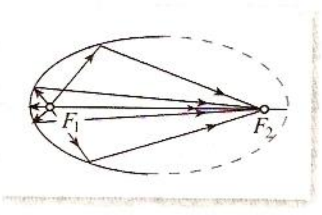
7 ـ رەسىمدىكىدەك، كىنو قويۇش ئاپپاراتىنىڭ يورۇقلۇق نۇرى يىغىش چىرىغىدا بىر نۇر قايتۇرۇش ئەينىكى بار بولۇپ، ئۇ ئايلانما ئېللىپسوئىد شەكلىدە بولىدۇ. لېنتا ئىشكى (كىنو لېنتىسى ئۆتكۈزۈلىدىغان ئورۇن) نى ئەڭ كۈچلۈك يورۇقلۇق نۇرىغا ئېرىشتۈرۈش ئۈچۈن، لامپۇچكا قىلى F_2 بىلەن لېنتا ئىشىكى F_1 ئېللىپسىنىڭ ئىككى فوكۇسىغا ئورۇنلاشتۇرۇلىدۇ. مانا بۇ، ئېللىپسىنىڭ ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىشقا دائىر بىر ئەمەلىي مىسالدۇر.



7 ـ رەسىم



6 ـ رەسىم



5 ـ رەسىم

II كوسىنۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى ۋە بىرلىككە كەلگەن تەڭلىمىسى

ئۈچۈر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ شەكىل سىزىش: F نۇقتا تەكشىلىكتىكى بىر مۇقىم نۇقتا، l تۈز سىزىق تەكشىلىكتىكى F نۇقتىدىن ئۆتمەيدىغان بىر مۇقىم تۈز سىزىق بولۇپ، M نۇقتىدىن F نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىق بىلەن بۇ نۇقتىدىن l تۈز سىزىققىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى بىر تۇراقلىق سان e غا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيەسىنى كۆزىتىڭ ھەم ترايېكتورىيىنىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلىڭ.

بايقاشقا بولىدۇكى، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى كونۇس ئەگرى سىزىقى بولىدۇ ھەم

1. $0<e<1$ بولغاندا، بۇ ترايېكتورىيە ئېللىپس بولىدۇ؛
2. $e>1$ بولغاندا، بۇ ترايېكتورىيە ھىپېربولا بولىدۇ؛
3. $e=1$ بولغاندا، بۇ ترايېكتورىيە پارابولا بولىدۇ.

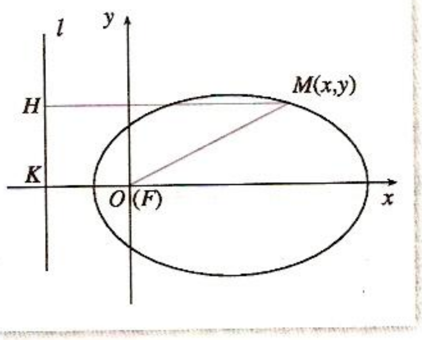
مۇقىم نۇقتا F ئۇنىڭ فوكۇسى، نىسبەت قىممەت e ئۇنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى بولىدۇ. مۇقىم تۈز سىزىق l نى ئۇنىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى دەيمىز.

شۇنىڭ بىلەن، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ تۆۋەندىكى بىرلىككە كەلگەن ئېنىقلىمىسىنى ئوتتۇرىغا قويالايمىز:

تەكشىلىكتە، بىر نۇقتىدىن بىر مۇقىم نۇقتا F كىچە بولغان ئارىلىق بىلەن ئۇنىڭدىن بىر مۇقىم تۈز سىزىق l غىچە بولغان ئارىلىقنىڭ نىسبىتى تۇراقلىق سان e غا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىسى كونۇس ئەگرى سىزىقى دەپ ئاتىلىدۇ، بۇنىڭدىكى F ئۇنىڭ فوكۇسى، l تۈز سىزىق ئۇنىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى، نىسبەت قىممەت e ئۇنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى بولىدۇ.

ئۇنداق بولسا، كونۇس ئەگرى سىزىقنىڭ بىرلىككە كەلگەن تەڭلىمىسىنى قانداق تېپىش كېرەك؟

1 ـ رەسىمدىكىدەك، M نۇقتا ئارقىلىق $MH \perp l$ (تىك ئاساسى H) نى ئۆتكۈزسەك، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ بىرلىككە كەلگەن ئېنىقلىمىسىدىن تۆۋەندىكىنى بىلىشكە بولىدۇ:



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

$$M \in \{M \mid |FM| = e|MH|\}.$$

فوكۇس F تىن ئۆتكەن ھەمدە يۆنەلدۈرگۈچى l غا تىك بولغان تۈز سىزىقنى x ئوق، $F(O)$ نۇقتىنى كوئوردىنات بېشى قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇۋالىمىز. M نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad ①$$

l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى $x = -p$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$|MH| = |x + p|. \qquad ②$$

① بىلەن② نى $|OM| = e|MH|$ قا قويساق:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x + p|.$$

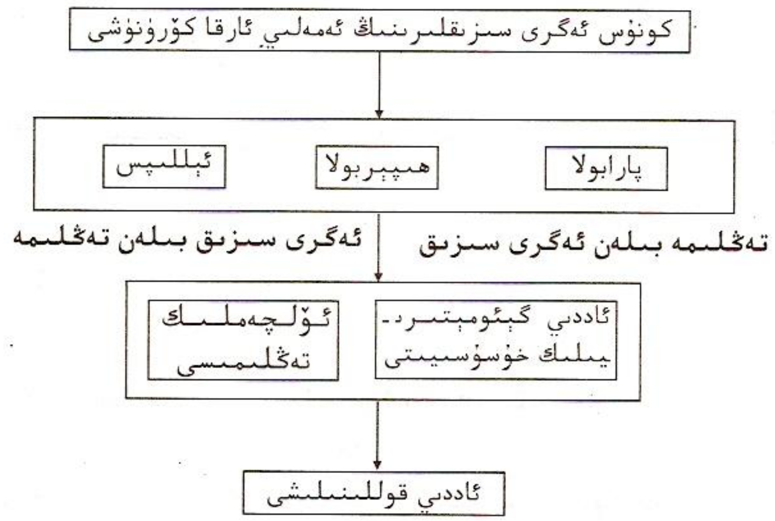
ئىككى تەرىپىنى كۋادراتقا كۆتۈرۈپ، ئاندىن ئاددىيلاشتۇرساق:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2pe^2x - p^2e^2 = 0.$$

مانا بۇ، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى (ئېللىپس، ھىپىربولا، پارابولا) نىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى بىرلىككە كەلگەن تەڭلىمىسىدۇر.

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى



Ⅱ ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. بىز ئەگرى سىزىقنى مەلۇم خىل شەرت p نى قانائەتلەندۈرىدىغان M نۇقتىنىڭ توپلىمى دەپ قارايمىز، يەنى

$$P=\{M|p(M)\}.$$

كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇۋېلىنغاندىن كېيىن، P توپلامدىكى خالىغان بىر M ئېلېمېنتقا بىردىنبىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) ماس كېلىدۇ، p شەرتنى قانائەتلەندۈرىدىغان (x, y) ئىككى نامەلۇملۇق تەڭلىمە $f(x, y)=0$ نى ھاسىل قىلىدۇ، باشقىچە ئېيتقاندا، بۇ (x, y) توپلام

$$Q=\{(x, y)|f(x, y)=0\}$$

دىكى بىر ئېلېمېنت بولىدۇ. ئەكسىچە، Q توپلامدىكى خالىغان بىر ئېلېمېنت (x, y) كە ھامان بىر M نۇقتا ماس كېلىدۇ ھەمدە M نۇقتا P توپلامدىكى بىر ئېلېمېنت بولىدۇ. P بىلەن Q نىڭ بۇ خىل ماسلىق مۇناسىۋىتى دەل ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمىنىڭ مۇناسىۋىتىدۇر.

ئەگرى سىزىق بىلەن تەڭلىمىنىڭ مۇناسىۋىتى بوشلۇق شەكلى بىلەن سانلىق مىقدارلار مۇناسىۋىتى ئارىسىدىكى باغلىنىشنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ.

2. كونۇسنى بىر تەكشىلىك بىلەن كېسىپ، تەكشىلىك بىلەن كونۇس ئوقىنىڭ ئارا بۇلۇڭىنى ئۆزگەرتسەك، كېلىپ چىققان كېسىش ئەگرى سىزىقى ئايرىم - ئايرىم چەمبەر، ئېللىپس، پارابولا ۋە ھىپېربولا بولىدۇ، بىز ئۇلارنى ئومۇملاشتۇرۇپ كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى دەپ ئاتايمىز. ئەمەلىيەتتە، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى ئاسترونومىيە، فىزىكا قاتارلىق پەنلەردىكى تەتقىقاتلار بىلەن، شۇنداقلا بىزنىڭ كۈندىلىك تۇرمۇشىمىز بىلەنمۇ زىچ باغلىنىشلىق. ئالاقىدار ماتېرىياللاردىن پايدىلىنىپ، بۇ جەھەتتىكى بىلىملەرنى ئىگىلەپ كۆرۈڭ.

3. تارىختا، كىشىلەر ساپ گېئومېترىيىلىك ئۇسۇللارنى قوللىنىپ، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ كۆپلىگەن خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقارغان. بۇ خۇسۇسىيەتلەر ئاسترونومىيە تەتقىقاتلىرىدا

قوللىنىلغان. دېكارت ئانالىتىك گېئومېترىيىنى كەشپ قىلغاندىن كېيىن، كىشىلەر كوئوردېنات سىستېمىسىدىن پايدىلىنىپ سان بىلەن شەكىلنى ئۆزئارا بىرلەشتۈردى. كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، مۇۋاپىق كوئوردېنات سىستېمىسىنى تاللاپ، ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسىنى تۇرغۇزۇشقا بولىدۇ، ئاندىن تەڭلىمىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ گېئومېترىيىلىك خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. مانا بۇ كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى كوئوردېنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش دېگەنلىكتۇر.

كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى كوئوردېنات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشنىڭ كونكرېت جەريانىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

4. تۆۋەندىكى جەدۋەلنى تاماملاڭ.

	ئېللىپس	ھىپېربولا	پارابولا
ئېنىقلىمىسى			
شەكلى			
ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى			
چوققىسىنىڭ كوئوردېناتى			
سىممېترىك ئوقى			
فوكۇسىنىڭ كوئوردېناتى			
مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسى			

5. ئېللىپس، ھىپېربولا، پارابولادىن ئىبارەت ئۈچ خىل كونۇس ئەگرى سىزىقنى مۇھاكىمە قىلىش ئۇسۇلى بىردەكلىككە ئىگە. مەسىلەن، ئېللىپسنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكى، ئېنىقلىمىسى، ئۆلچەملىك تەڭلىمىسى، ئاددىي خۇسۇسىيەتلىرى قاتارلىقلارنى تەتقىق قىلغاندىن كېيىن، تەققاسلاش ئارقىلىق ھىپېربولا ۋە پارابولاغا دائىر تەتقىقات تېمىسى ۋە ئاساسىي تەتقىقات ئۇسۇلىغا ئىگە بولالايمىز.

6. كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى بىردەكلىككە ئىگە:

(1) ئۇلارنىڭ ھەممىسى كونۇسنى تەكشىلىك بىلەن كەسكەندە ھاسىل بولغان كېسىش ئەگرى سىزىقلىرىدۇر؛

(2) ئۇلارنىڭ ھەممىسى تەكشىلىك ئىچىدىكى بىر مۇقىم نۇقتىغىچە بولغان ئارىلىقى بىلەن بىر مۇقىم تۈز سىزىق (ئاشۇ مۇقىم نۇقتىدىن ئۆتمىگەن) قىچە بولغان ئارىلىقىنىڭ نىسبەت قىممىتى بىر تۇراقلىق سانغا تەڭ بولغان نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيىلىرى بولۇپ، نىسبەت قىممەتنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنىڭ ئوخشاش بولماسلىقى ئوخشاش بولمىغان ئەگرى سىزىقلارنى ھاسىل قىلىدۇ؛

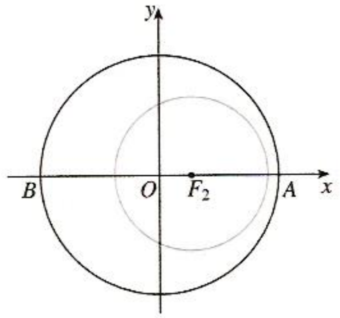
(3) ئۇلارنىڭ تەڭلىملىرىنىڭ ھەممىسى x، y كە دائىر ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىدۇر.

7. l تۈز سىزىق بىلەن كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنىڭ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولۇش - بولماسلىقى ئۇلارنىڭ تەڭلىمىسىدىن تۈزۈلگەن تەڭلىمىلەر سىستېمىسىنىڭ ھەقىقىي يېشىمگە ئىگە بولۇش - بولماسلىقى بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولىدۇ. تەڭلىمىلەر سىستېمىسى قانچە گۇرۇپپا ھەقىقىي يېشىمگە ئىگە بولسا، l تۈز سىزىق بىلەن كونۇس ئەگرى سىزىقى شۇنچە ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولىدۇ؛ تەڭلىمىلەر سىستېمىسى ھەقىقىي يېشىمگە ئىگە بولمىسا، l تۈز سىزىق بىلەن C ئەگرى سىزىق ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمايدۇ.

8. كونۇس ئەگرى سىزىقلىرى تەتقىقاتىدا، ئۇچۇر تېخنىكىسى ناھايىتى ياخشى رول ئوينايدۇ. مەسىلەن، ئەگرى سىزىقنىڭ شەكلىنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ ناھايىتى ئاسانلا سىزىپ چىققىلى بولىدۇ؛ بەزى مىقدارلار (مەسىلەن، ئېللىپسنىڭ ئۇزۇن، قىسقا ئوقلىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ياكى فوكۇسلار ئارىلىقى قاتارلىقلار)نى ئۆزگەرتىش ئارقىلىق، ئەگرى سىزىقلارنىڭ گېئومېترىيىلىك ئالاھىدىلىكى ۋە ئاساسىي خۇسۇسىيەتلىرى (ئۆزگىرىش جەريانىدا ئۆزگەرمەيدىغان ئالاھىدىلىكلىرى) نى ئاسانلا بايقاشقا بولىدۇ ۋە باشقىلار. ئومۇمەن، كونۇس ئەگرى سىزىقلىرىنى تەتقىق قىلىشتا، ئۇچۇر تېخنىكىسى مەسىلىلەرنى بايقاش، پىكىر قىلىش ئۇسۇلىنى شەكىللەندۈرۈش، يەكۈنگە ئىگە بولۇش قاتارلىقلارنىڭ ھەممىسىدە ئۆز رولىنى جارى قىلدۇرىدۇ.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا



(1 ـ مەسال ئۈچۈن)

1. رەسىمدىكىدەك، دۆلىتىمىز قويۇپ بەرگەن تۇنجى يەر شارى سۈنئىي ھەمراھىنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسى يەر مەركىزى (يەر شارىنىڭ مەركىزى) F_2 نى بىر فوكۇس قىلغان ئېللىپستىن ئىبارەت. ئۇنىڭ يەرگە يېقىن نۇقتىسى (يەر يۈزىگە ئەڭ يېقىن نۇقتىسى) A دىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئارىلىق 439 km، يەردىن يىراق نۇقتىسى (يەر يۈزىدىن ئەڭ يىراق نۇقتىسى) B دىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئارىلىق 2384 km بولۇپ، F_2، A، B لار ئوخشاش بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ھەمدە يەر شارىنىڭ رادىئۇسى تەخمىنەن 6371 km ئىكەنلىكى بېرىلگەن. سۈنئىي ھەمراھىنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ (1 km غىچە ئېنىقلىقتا).

2. يەر شارى سۈنئىي ھەمراھىنىڭ ئايلىنىش ئوربىتىسى يەر شارى مەركىزىنى بىر فوكۇس قىلغان ئېللىپستىن ئىبارەت. يەر شارىنىڭ رادىئۇسىنى R، سۈنئىي ھەمراھىنىڭ يەرگە يېقىن نۇقتىسى ۋە يەرگە يىراق نۇقتىسىدىن يەر يۈزىگىچە بولغان ئارىلىقلارنى ئايرىم ـ ئايرىم r_1، r_2 دەپ پەرەز قىلىپ، سۈنئىي ھەمراھ ئوربىتىسىنىڭ مەركەزدىن قېچىش دەرىجىسىنى تېپىڭ.

3. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) ئەگرى سىزىق $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ بىلەن $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ $(k<9)$ نىڭ ( ).

(A) ئۇزۇن ئوقلىرى ئۆزئارا تەڭ　　(B) قىسقا ئوقلىرى ئۆزئارا تەڭ

(C) مەركەزدىن قېچىش دەرىجىلىرى ئۆزئارا تەڭ　　(D) فوكۇسلار ئارىلىقى ئۆزئارا تەڭ

(2) چەمبەر $x^2+y^2=1$ ۋە $x^2+y^2-8x+12=0$ بىلەن ئوخشاشلا سىرتتىن ئۇرۇنىدىغان چەمبەرنىڭ مەركىزى ( ) ئۈستىدە ياتىدۇ.

(A) بىر ئېللىپس　　(B) ھىپېربولانىڭ بىر تارمىقى

(C) بىر پارابولا　　(D) بىر چەمبەر

4. α نىڭ قىممىتى 0° تىن 180° قىچە ئۆزگەرگەندە، تەڭلىمە $x^2+y^2\cos\alpha=1$ ئىپادىلىگەن ئەگرى سىزىقنىڭ شەكلى قانداق ئۆزگىرىدۇ؟

5. تۈز سىزىق $y=kx-1$ بىلەن ھىپېربولا $x^2-y^2=4$ ئورتاق نۇقتىغا ئىگە بولمىسا، k نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

6. پارابولانىڭ چوققىسى O بولۇپ، فوكۇستىن ئۆتۈپ سىممېترىك ئوققا تىك بولغان تۈز سىزىق پارابولا بىلەن B، C ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ، پارابولا ئۈستىدىكى P نۇقتىدىن ئۆتۈپ سىممېترىك ئوققا تىك بولغان تۈز سىزىق بۇ ئوق بىلەن Q نۇقتىدا كېسىشىدۇ. $|BC|$ بىلەن $|OQ|$ نىڭ تاناسىپلىق ئوتتۇرا ئەزاسى $|PQ|$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

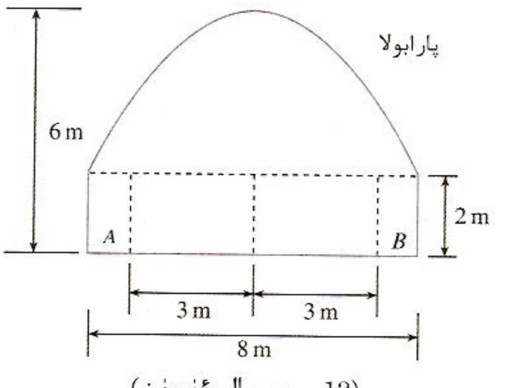
7. تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ بىر چوققىسى پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ فوكۇسى ئۈستىدە، قالغان ئىككى چوققىسى پارابولانىڭ ئۈستىدە ياتسا، بۇ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

8. يانتۇلۇقى 2 بولغان l تۈز سىزىق ھىپېربولا $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ بىلەن A، B نۇقتىلاردا كېسىشسە ھەمدە $|AB|=4$ بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

9. $M(2, 1)$ نۇقتا ئارقىلىق ئۆتكۈزۈلگەن l تۈز سىزىق ھىپېربولا $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ بىلەن A، B نۇقتىلاردا كېسىشسە ھەمدە M نۇقتا AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، l تۈز سىزىقنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

10. $\triangle ABC$ نىڭ A، B ئىككى چوققىسىنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-5, 0)$، $(5,0)$ ھەمدە AC، BC لار ياتقان تۈز سىزىقلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ كۆپەيتمىسى m $(m\neq 0)$ غا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. C چوققىنىڭ تراييېكتورىيىسىنى تېپىڭ.

11. پارابولا $y^2=4x$ نىڭ ئۈستىدىن تۈز سىزىق $y=x+3$ كىچە ئارىلىقى ئەڭ قىسقا بولغان بىر P نۇقتىنى تېپىڭ.

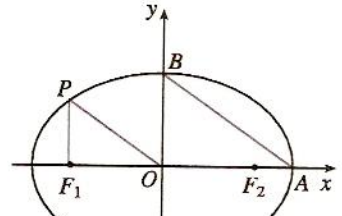


(12 ـ مىسال ئۈچۈن)

12. رەسىمدىكىدەك، بىر تونېلنىڭ كەسمە يۈزى بىر تىك تۆتبۇلۇڭ ۋە بىر پارابولادىن تەركىب تاپقان بولۇپ، ئۇنىڭ ئىچىگە قوش لىنىيىلىك تاشيول ياتقۇزۇلغان. بىخەتەرلىككە كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن، بۇ تونېلدىن ئۆتىدىغان ئاپتوموبىللارنىڭ ئۈستى (بۇ يەردە ئۈستى تەكشى دەپ پەرەز قىلىنىدۇ) بىلەن تونېل چوققىسىنىڭ ۋېرتىكال يۆنىلىشتىكى ئارىلىق پەرقىنىڭ كەم دېگەندە 0.5m بولۇشى تەلەپ قىلىنىدۇ. ئەگەر تاشيولنىڭ ئومۇمىي كەڭلىكى $|AB|=6$m بولسا، تونېلدىن ئۆتىدىغان ئاپتوموبىللارنىڭ چەكلەنگەن ئېگىزلىكى قانچە مېتىر (0.1m غىچە ئېنىقلىقتا)؟

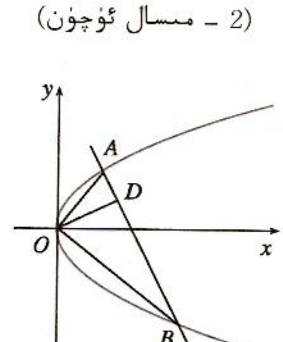
B گۇرۇپپا

1. P نۇقتا ئېللىپس $16x^2+25y^2=1600$ ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ھەمدە ئۇ x ئوقنىڭ ئۈستۈنكى تەرىپىدە ياتىدۇ، F_1، F_2 لەر ئايرىم ـ ئايرىم ئېللىپسنىڭ سول ۋە ئوڭ فوكۇسلىرى بولۇپ، PF_2 تۈز سىزىقنىڭ يانتۇلۇقى $-4\sqrt{3}$ كە تەڭ بولسا، $\triangle PF_1F_2$ نىڭ يۈزىنى تېپىڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، ئېللىپس $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ نىڭ ئۈستىدىكى بىر P نۇقتا ئارقىلىق x ئوققا تىك سىزىق ئۆتكۈزۈلگەن (تىك ئاساسى سول فوكۇس F_1 بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدۇ)، ئېللىپس بىلەن x ئوقنىڭ مۇسبەت يېرىم ئوقى A نۇقتىدا، ئېللىپس بىلەن y ئوقنىڭ مۇسبەت يېرىم ئوقى B نۇقتىدا كېسىشىدۇ ھەمدە $AB \,//\, OP$، $|F_1A|=\sqrt{10}+\sqrt{5}$. بۇ ئېللىپسنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

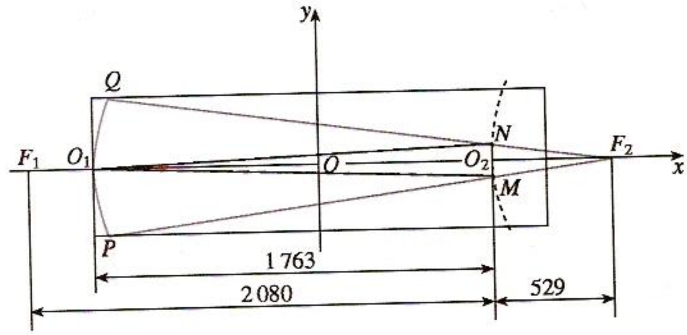


(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىق بىلەن پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ A، B نۇقتىلاردا كېسىشىدىغانلىقى ھەمدە $OA\perp OB$، $OD\perp AB$ (تىك ئاساسى D)، D نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $(2, 1)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. p نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

4. پارابولا ۋە ھىپېربولانىڭ ئوپتىكىلىق خۇسۇسىيەتلىرىنى ئومۇملاشتۇرۇپ قوللىنىپ، رېفلېكتورلۇق تېلېسكوپنى لايىھەلەپ چىققىلى بولىدۇ. بۇ خىل تېلېسكوپ نەيچىسى قىسقا ھەمدە ئاسمان جىسىملىرىنىڭ ھەرىكىتىنى ئېنىق كۆزەتكىلى بولۇشتەك ئالاھىدىلىككە ئىگە. مەسىلەن، مەلۇم ئاسترونومىيە ئەسۋابلىرى زاۋۇتى لايىھەلەپ ئىشلەپچىقارغان بىر خىل رېفلېكتورلۇق تېلېسكوپنىڭ نەيچىسىنىڭ دىئامېتىرى 0.6m، ئۇزۇنلۇقى 2m بولۇپ، ئۇنىڭ ئوپتىكىلىق سىستېمىسىنىڭ پرىنسىپى رەسىمدە كۆرسىتىلگەندەك (مەركىزىي ئوق كەسمە-

سىنىڭ سىخېمىسى). ئۇنىڭدا، بىر نۇر قايتۇرۇش سىنئەينىكىنىڭ PO_1Q يايى ياتقان ئەگرى سىزىق پارابولا، يەنە بىر نۇر قايتۇرۇش سىنئەينىكىنىڭ MO_2N يايى ياتقان ئەگرى سىزىق ھىپېربولانىڭ بىر تارمىقىدىن ئىبارەت. ئەگەر F_1، F_2 لەر ھىپېربولانىڭ ئىككى فوكۇسى بولۇپ، F_2 يەنە پارابولانىڭمۇ فوكۇسى بولسا، رەسىمدىكى ئۆلچەملەر (بىرلىكى: mm) گە ئاساسەن، ئايرىم ـ ئايرىم پارابولا ۋە ھىپېربولانىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.



(4 ـ مىسال ئۇچۇن)

5. A، B نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتى ئايرىم ـ ئايرىم $(-1, 0)$، $(1, 0)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. AM، BM تۈز سىزىقلار M نۇقتىدا كېسىشسە ھەمدە ئۇلارنىڭ يانتۇلۇقلىرىنىڭ يىغىندىسى 2 گە تەڭ بولسا، M نۇقتىنىڭ ترايېكتورىيە تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

6. m نىڭ ئوخشاش بولمىغان قىممەتلىرىگە نىسبەتەن، تەڭلىمە $(m-1)x^2+(3-m)y^2=(m-1)(3-m)$ ئىپادىلەيدىغان ئەگرى سىزىقلارنىڭ شەكلىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ ھەم يەكۇنىڭىزنى ئۇچۇر تېخنىكىسىدىن پايدىلىنىپ كۆرسىتىلىك ھالدا دەلىللەڭ.

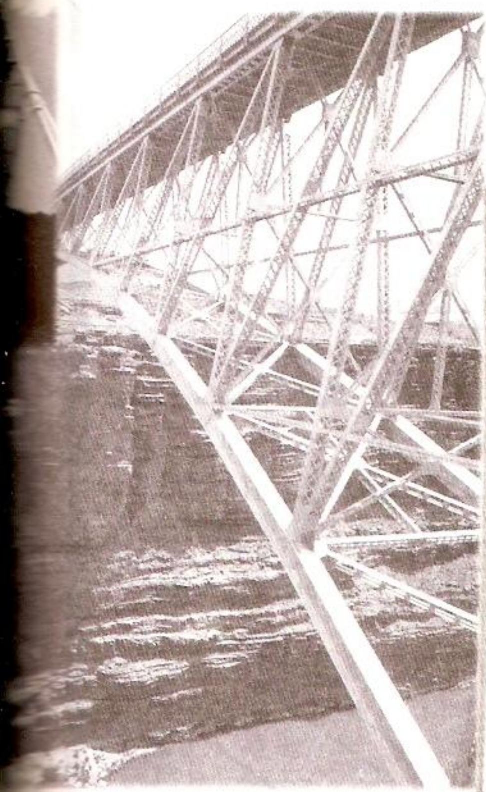
7. پارابولا $y^2=2px$ $(p>0)$ نىڭ فوكۇسى F ئارقىلىق ئۆتكۈزۈلگەن تۈز سىزىق پارابولا بىلەن A، B ئىككى نۇقتىدا كېسىشىدۇ. AB نى دىئامېتىر قىلىپ چەمبەر سىزىپ، بۇ چەمبەر بىلەن پارابولانىڭ يۆنەلدۈرگۈچىسى l ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئۇچۇر تېخنىكىسى قوراللىرىدىن پايدىلىنىپ كۆزىتىڭ. قانداق يەكۇنگە ئىگە بولدىڭىز؟ ئەگەر دېيىلگىنى ئېللىپس، ھىپېربولا بولسا ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟ يەكۇنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

3 - باب

بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ستېرېئومېترىيە

3-1 بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئەمەللىرى

3-2 ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى



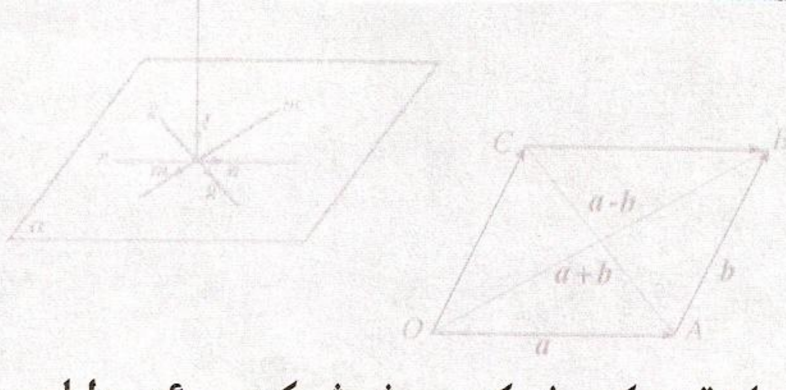
ۋېكتور بىر خىل مۇھىم ماتېماتىكىلىق قورال، ئۇ گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا كەڭ قوللىنىلىپلا قالماي، فىزىكا، قۇرۇلۇش ئىلمى قاتارلىقلاردىمۇ كەڭ قوللىنىلىدۇ. ۋېكتور يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسىدىكى ئاساسىي ئۇقۇملارنىڭ بىرى بولۇپ، ۋېكتورغا دائىر دەسلەپكى بىلىم ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى خېلى بۇرۇنلا يېقىنقى زامان ماتېماتىكىسىنىڭ ئاساسىي قىسمىغا كىرگۈزۈلگەن.

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، تەكشىلىكتىكى نۇقتا، تۈز سىزىقلارنى ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئەمەللىرىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەپ، ئۇلار ئارىسىدىكى پاراللېل بولۇش، تىك بولۇش، ئارا بۇلۇڭ، ئارىلىق دېگەندەك مۇناسىۋەتلەرنى ۋېكتور ئەمەللىرىگە تايىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا ۋە بۇ ئارقىلىق تەكشىلىكتىكى شەكىللەرگە دائىر مەسىلىلەرنى تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلاردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا بولىدىغانلىقىنى بىلىۋالدۇق. بۇ بابتا، بىز تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنى بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا كېڭەيتىپ، بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئۇقۇمى، ۋېكتور ئەمىلى، ۋېكتورنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى ۋە ستېرېئومېترىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئەمەللىرىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشنى ئۆگىنىمىز.

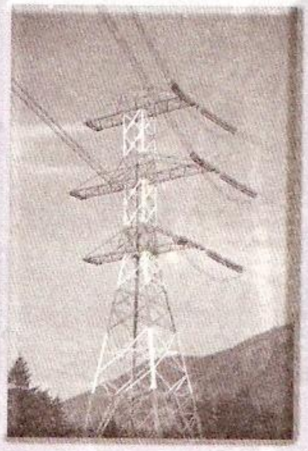
بوشلۇقتىكى ۋېكتور بىلەن تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنىڭ ماھىيەتلىك پەرقى يوق، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسى چوڭ - كىچىكلىككە ۋە يۆنىلىشكە ئىگە مىقدارنى ئىپادىلەيدۇ، ئۇلار ئۈستىدىكى قوشۇش، ئېلىش، ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش، سكالىيار (سانلىق) كۆپەيتمە دېگەندەك ئەمەللەرمۇ پۈتۈنلەي ئوخشاش. شۇڭا، ستېرېئومېترىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتورلاردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشتىمۇ، ئالدى بىلەن بوشلۇقتىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىك قاتارلىق ئېلېمېنتلارنى بوشلۇقتىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەپ، ستېرېئومېترىيە بىلەن بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تۇرغۇزۇۋالىمىز؛ ئاندىن بوشلۇقتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدە ئەمەل بېجىرىمىز؛ ئۇنىڭدىن كېيىن ئەمەل بېجىرىش نەتىجىسىنىڭ گېئومېترىيىلىك چۈشەندۈرۈلۈشىنى ئوتتۇرىغا قويۇپ، بۇ ئارقىلىق گېئومېترىيىلىك يەكۈنگە ئىگە بولىمىز. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۆگىنىش جەريانىدا، بوشلۇقتىكى ۋېكتورنى تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا تەققاسلاش (ئانالوگىيە، ئوخشىتىش دەپمۇ ئاتىلىدۇ) قا دىققەت قىلىپ، بوشلۇقتىكى ۋېكتورنىڭ ستېرېئومېترىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتىكى رولىنى ھېس قىلىشىمىز كېرەك.

3

هەيۋەتلىك قۇرۇلۇشلار،
ئېگىز - ئېگىز كۆۋرۈكلەر، ئەگرى رې-
لىسلار، زور تىپتىكى قۇرۇلۇش ماشىنىلى-
رى ...... نى لايىھىلەشتە، ستېرېئومېتىرى-
يىگە دائىر نۇرغۇن مەسىلىلەرگە دۇچ كې-
لىمىز، بۇ مەسىلىلەر بوشلۇقتىكى ۋېك-
تورلار بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىك.

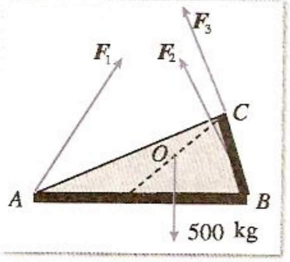


1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ۋېكتور ئەمەللىرى

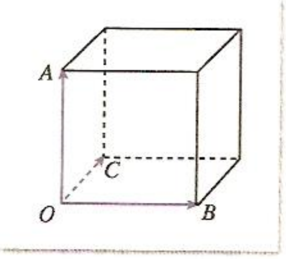


نۇرغۇنلىغان قۇرۇلۇشلارنىڭ پولات تىرەكلىرى ۋە ھەيكەلتىراشلىق ئەسەرلىرىدىن بوشلۇقتىكى ۋېكتورنىڭ ئىزناسىنى كۆرەلەيمىز.

1.1.3 - رەسىمدىكىدەك، مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك بىر پارچە تەكشى پولات تاختىنىڭ ماسسىسى 500 kg بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈچ چوققىسى ئايرىم - ئايرىم $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$، $\boldsymbol{F}_3$ كۈچنىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدۇ، ھەربىر كۈچ بىلەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ شۇ كۈچكە قوشنا ئىككى تەرىپى ئارىسىدىكى ئارا بۇلۇڭ ئوخشاشلا °60 ھەم $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|=200\,\text{kg}$. بۇ پولات تاختا مۇشۇ كۈچلەرنىڭ تەسىرىدە قانداق ھەرىكەت قىلىشى مۇمكىن؟ بۇ ئۈچ كۈچ كەم دېگەندە قانچىلىك چوڭلۇقتا بولغاندا، ئاندىن بۇ پولات تاختىنى كۆتۈرەلەيدۇ؟



1.1.3 - رەسىم

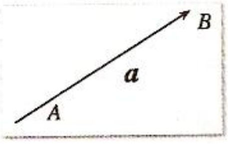


2.1.3 - رەسىم

1.1.3 - رەسىمدىكى $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$، $\boldsymbol{F}_3$ ئۈچ كۈچ ھەم چوڭ - كىچىكلىككە، ھەم يۆنىلىشكە ئىگە مىقدار بولسىمۇ، ئەمما ئۇلار ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئەمەس. شۇڭا، بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىشتا بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا دائىر بىلىملەر لازىم بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتمىغان ۋېكتورلارنى ھەممىلا يەردە ئۇچراتقىلى بولىدۇ. مەسىلەن، كۇبتىكى ئوخشاش بىر چوققىدىن ئۆتكەن ئۈچ قىر ئىپادىلىگەن $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ ئۈچ ۋېكتور ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتمىغان ۋېكتورلاردۇر (2.1.3 - رەسىم).

1-1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتور ۋە ئۇلارنى قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرى

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا ئوخشاش، بوشلۇقتا چوڭ - كىچىكلىككە ۋە يۆنىلىشكە ئىگە مىقدارنى **بوشلۇقتىكى ۋېكتور** (space vector)، ۋېكتورنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىنى ۋېكتورنىڭ **ئۇزۇنلۇقى** ياكى **مودۇلى** (modulus) دەپ ئاتايمىز. يۇقىرىقى مەسىلىدىكى ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك پولات تاختا ئۇچرىغان



3.1.3 ـ رەسىم

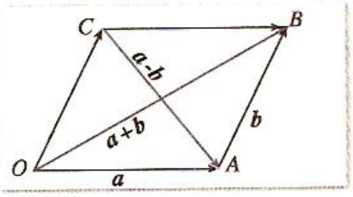
ئۈچ كۈچ $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$، $\boldsymbol{F}_3$ ۋە كۆبىنىڭ ئۈچ قىرى ئىپادىلىگەن ئۈچ ۋېكتور $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ لارنىڭ ھەممىسى بوشلۇقتىكى ۋېكتورلاردۇر.

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا ئوخشاش، بوشلۇقتىكى ۋېكتورنىمۇ يۆنىلىشلىك كېسىك بىلەن ئىپادىلەيمىز. يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋېكتورنىڭ مودۇلىنى ئىپادىلەيدۇ. 3.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ باش نۇقتىسى A، ئاخىرقى نۇقتىسى B بولسا، ئۇ ھالدا ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نى $\overrightarrow{AB}$ قىلىپ يېزىشقىمۇ بولىدۇ، ئۇنىڭ مودۇلى $|\boldsymbol{a}|$ ياكى $|\overrightarrow{AB}|$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

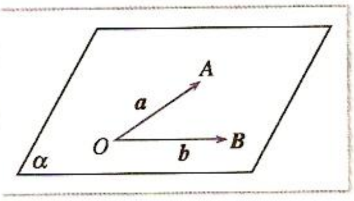
قۇلاي بولسۇن ئۈچۈن، بىز مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: ئۇزۇنلۇقى 0 بولغان ۋېكتورنى **نۆل ۋېكتور** (zero vector) دەپ ئاتاپ، $\mathbf{0}$ قىلىپ يازىمىز. يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ باش نۇقتىسى A بىلەن ئاخىرقى نۇقتىسى B ئۈستىمۇئۈست چۈشكەندە، $\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$ بولىدۇ. مودۇلى 1 بولغان ۋېكتور **بىرلىك ۋېكتور** (unit vector) دېيىلىدۇ. ئۇزۇنلۇقى $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن تەڭ، يۆنىلىشى $\boldsymbol{a}$ نىڭكى بىلەن قارىمۇقارشى بولغان ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ **قارىمۇقارشى ۋېكتورى** دەپ ئاتىلىپ، $-\boldsymbol{a}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

ۋېكتورنىڭ يۆنىلىشىنى قانداق چۈشىنىش كېرەك؟

يۆنىلىشلىرى ئوخشاش ھەمدە مودۇللىرى تەڭ بولغان ۋېكتورلار **تەڭ ۋېكتورلار** (equal vector) دېيىلىدۇ. شۇڭا، بوشلۇقتا يۆنىلىشلىرى ئوخشاش ھەمدە ئۇزۇنلۇقلىرى تەڭ بولغان يۆنىلىشلىك كېسىكلەر ئوخشاش بىر ۋېكتور ياكى تەڭ ۋېكتورلارنى ئىپادىلەيدۇ. بوشلۇقتىكى خالىغان ئىككى ۋېكتورنى ئوخشاش بىر تەكشىلىككە يۆتكەپ، ئوخشاش بىر تەكشىلىكتىكى ئىككى ۋېكتور قىلىۋېلىشقا بولىدۇ. 4.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بېرىلسە، بىز ئۇلارنى ئوخشاش بىر α تەكشىلىككە يۆتكىيەلەيمىز ۋە خالىغان O نۇقتىنى باش نۇقتا قىلىپ، ۋېكتور $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ نى سىزالايمىز.



5.1.3 ـ رەسىم



4.1.3 ـ رەسىم

ماتېماتىكىدا بىر خىل مىقدار كىرگۈزۈلگەندىن كېيىن، ئۇلار ئۈستىدىكى ئەمەلنى تەتقىق قىلىش مەسىلىسى تەبىئىيلا ئوتتۇرىغا چىقىدۇ. تەكشىلىكتىكى ۋېكتوردىكىگە ئوخشاش، بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنى قوشۇش ۋە ئېلىش ئەمىلىگە تۆۋەندىكىدەك ئېنىقلىما بېرىشكە بولىدۇ (5.1.3 ـ رەسىم):

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

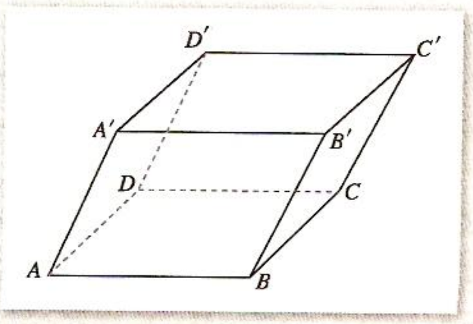
بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟ بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارغا دائىر گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى ئىسپاتلاش بىلەن تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى ئىسپاتلاشنىڭ قانداق ئوخشىمايدىغان يېرى بار؟

ئىزدىنىش

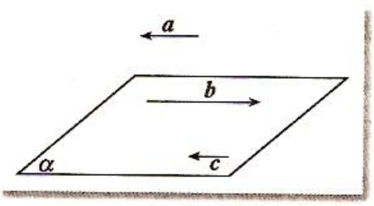


6.1.3 - رەسىم

6.1.3 - رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق (ئاساسى پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولغان تۆت قىرلىق پىرىزما) $ABCD-A'B'C'D'$ دا، ئايرىم - ئايرىم $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$ ۋە $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ ئىپادىلەيدىغان ۋېكتورلارنى كۆرسىتىڭ. بۇنىڭدىن ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلىنىڭ ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى ھېس قىلالامسىز؟ ئومۇمەن، تەكشىلىكداش بولمىغان ئۈچ ۋېكتورنىڭ يىغىندىسى بىلەن بۇ ئۈچ ۋېكتور قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

مەشىق

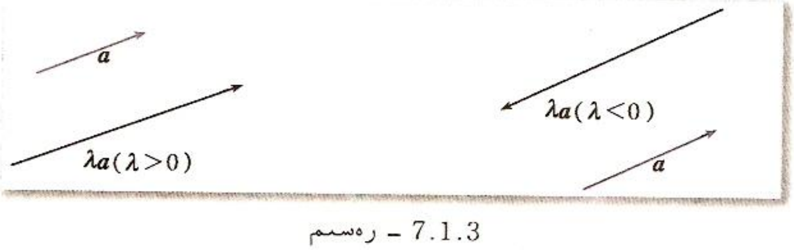
1. بىرقانچە ئەمەلىي مىسالنى كەلتۈرۈپ، ئوخشاش بىر تەكشىلىكتە ياتمايدىغان ئۈچ ۋېكتورنى ئىپادىلەڭ.
2. رەسىمدىكىدەك، ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لار ئۆزئارا پاراللېل بولسا، $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ نى سىزىڭ.
3. 6.1.3 - رەسىمدە، $\overrightarrow{A'C}$، $\overrightarrow{BD'}$ ۋە $\overrightarrow{DB'}$ نى $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AA'}$ لار ئارقىلىق ئىپادىلەڭ.



(2 - مىسال ئۈچۈن)

2-1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلى

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا ئوخشاش، ھەقىقىي سان λ بىلەن بوشلۇقتىكى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ كۆپەيتمىس $\lambda\boldsymbol{a}$ يەنىلا بىر ۋېكتور بولۇپ، بۇ ئەمەل **ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش** (ultiplication of vector by scalar) ئەمىلى دېيىلىدۇ. 7.1.3 - رەسىمدىكىدەك، $\lambda>0$ بولغاندا، $\lambda\boldsymbol{a}$ بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى ئو شاش؛ $\lambda<0$ بولغاندا، $\lambda\boldsymbol{a}$ بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ نىڭ يۆنىلىشى قارىمۇقارشى بولىدۇ؛ $\lambda\boldsymbol{a}$ نىڭ ئۇزۇنلۇقى نىڭ ئۇزۇنلۇقىنىڭ $|\lambda|$ ھەسسىسىگە تەڭ.



7.1.3 - رەسىم

> بۇ ئىككى ئەمەل قانۇنـ
> ـنى تەكشىلىكتىكى ۋېكتور ـ
> ـنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلى ـ
> ـنىڭ تارقىتىش قانۇنى ۋە
> گورۇپپىلاش قانۇنىغا سىـ
> ـلىشتۇرۇپ ئىسپاتلاڭ.

بوشلۇقتىكى ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلى تارقىتىش قا ـ نۇنى ۋە گورۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

تارقىتىش قانۇنى:

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

گورۇپپىلاش قانۇنى:

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

ئەگەر بوشلۇقتىكى يۆنىلىشلىك كېسىكلەر ياتقان تۈز سىـ ـزىقلار پاراللېل بولسا ياكى ئۈستمۇئۈست چۈشسە، ئۇ ھالدا بۇ يۆ ـ نىلىشلىك كېسىكلەر ئىپادىلىگەن ۋېكتورلار **سىزىقداش ۋېكتورلار** (colliner vectors) ياكى **پاراللېل ۋېكتورلار** (parallel vectors) دەپ ئاتىلىدۇ.

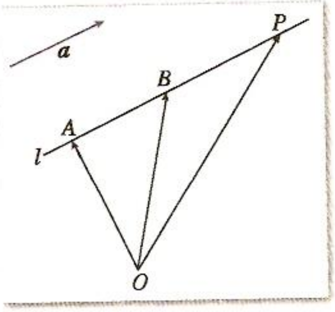
ئىزدىنىش

> بوشلۇقتىكى خالىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ ۋە $\boldsymbol{b}$ غا نىسبەتەن، ئەگەر $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ بولسا، $\boldsymbol{a}$ بىـ ـلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟ ئەكسىچە، $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئورۇن مۇناـ ـسىۋىتى قانداق بولغاندا، $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ بولىدۇ؟

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سىزىقداش بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتىگە ئوخشاش، بوش ـ لۇقتىكى خالىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ غا نىسبەتەن، $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى شۇنداق بىر ھەقىقىي سان λ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$$

بولۇشتىن ئىبارەت.



8.1.3 ـ رەسىم

8.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق بېرىلگەن A نۇقتىدىن ئۆ ـ تىدۇ ھەمدە ئۇ نۆل بولمىغان بېرىلگەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ غا پاراللېل. بوشلۇق ـ تىكى خالىغان بىر O نۇقتىغا نىسبەتەن، P نۇقتىنىڭ l تۈز سىزىق ئۈستىدە يېتىشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى شۇنداق بىر ھەقىقىي سان t مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a} \qquad ①$$

بولۇشتىن ئىبارەت. بۇنىڭدىكى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ تۈز سىزىق l نىڭ **يۆنىلىشلىك ۋېكتورى** (direction vectors) دەپ ئاتىلىدۇ.

l تۈز سىزىق ئۈستىدىن $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ نى ئالساق، ئۇ ھالدا ① ئىپادىنى تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}. \qquad ②$$

> ① ۋە ② نىڭ ھەر ئىككىسى بوشلۇقتىكى تۈز سىزىقنىڭ ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى دېيىلىدۇ. بۇنىڭدىن بوشلۇقتىكى خالىغان تۈز سىزىق بوشلۇقتىكى بىر نۇقتا ۋە تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىشلىك ۋېكتو ـ رى تەرىپىدىن بىردىنبىر ئېنىقلىنىـ ـدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ.
>
> سىز بۇ يەكۈننى بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سىزىقداش بولۇش شەرتىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىـ ـيالامسىز؟

بۇنىڭدىن كۆرۈشكە بولىدۇكى، بوشلۇقتىكى خالىغان ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولۇشىغا ۋېكتورلار ئارىسىدىكى مۇنا ـ سىۋەتتىن پايدىلىنىپ ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ. بۇ، تەكشىلىك ـ تىكى ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولۇشىغا تەكشىلىكتىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ھۆكۈم قىلغاندىكى بىلەن ئوخشاش.

ئوخشاش بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولغان ۋېكتورلار **تەكشىلىكداش ۋېكتورلار** (coplanar vectors) دەپ ئاتىلىدۇ. بىزگە مەلۇمكى، بوشلۇقتىكى خالىغان ئىككى ۋېكتور هامان تەكشىلىكداش بولىدۇ، ئەمما بوشلۇقتىكى خالىغان ئۈچ ۋېكتور تەكشىلىكداش بولۇشىمۇ، تەكشىلىكداش بولماسلىقىمۇ مۇمكىن (مەسىلەن، مۇشۇ پاراگرافنىڭ بېشىدا دېيىلگەن ۋېكتورلار). ئۇنداقتا، قانداق ئەھۋالدا ئۈچ ۋېكتور تەكشىلىكداش بولىدۇ؟

ئىزدىنىش

بوشلۇقتىكى سىزىقداش بولمىغان خالىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ غا نىسبەتەن، ئەگەر $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ بولسا، ئۇ هالدا ۋېكتور $\boldsymbol{p}$ بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟ ئەكسىچە، ۋېكتور $\boldsymbol{p}$ بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى قانداق بولغاندا، $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ بولىدۇ؟

ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ئىككى ۋېكتور سىزىقداش بولمىسا، ئۇ هالدا $\boldsymbol{p}$ ۋېكتور بىلەن $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلارنىڭ تەكشىلىكداش بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى بىردىنبىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ بولۇشتىن ئىبارەت.

9.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى بىر P نۇقتىنىڭ ABC تەكشىلىكتە يېتىشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

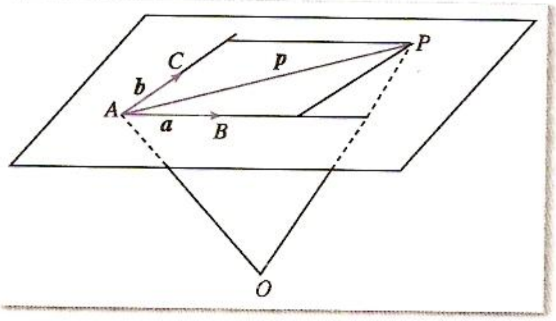
بولۇش ياكى بوشلۇقتىكى خالىغان بىر O نۇقتىغا نىسبەتەن

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \qquad ③$$

بولۇشتىن ئىبارەت.

③ ئىپادە بوشلۇقتىكى ABC تەكشىلىكنىڭ ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى دېيىلىدۇ. بۇنىڭدىن بوشلۇقتىكى خالىغان تەكشىلىك بوشلۇقتىكى بىر نۇقتا ۋە سىزىقداش بولمىغان ئىككى ۋېكتور تەرىپىدىن بىردىنبىر ئېنىقلىنىدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ.

سىز بۇ يەكۈننى بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ تەكشىلىكداش بولۇشىنىڭ شەرتىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالامسىز؟



9.1.3 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

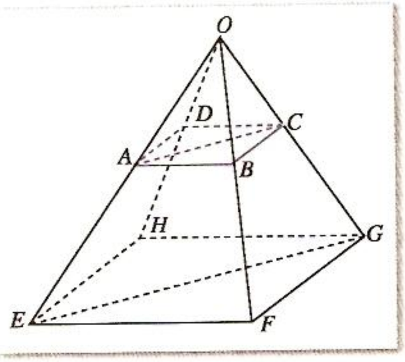
1. ئۈچ نۇقتىنىڭ سىزىقداش بولۇشىغا ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ھۆكۈم قىلغاندىكىگە ئوخشاش، تۆت نۇقتىنىڭ تەكشىلىكداش بولۇشىغا ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ قانداق ھۆكۈم قىلىش كېرەك؟

2. بوشلۇقتىكى خالىغان بىر O نۇقتا ۋە سىزىقداش بولمىغان A، B، C ئۈچ نۇقتا بېرىلگەن بولسا، مۇناسىۋەت ئىپادىسى

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\ (x+y+z=1 \text{ بۇنىڭدا})$$

نى قانائەتلەندۈرىدىغان P نۇقتا بىلەن A، B، C نۇقتىلار تەكشىلىكداش بولامدۇ ـ يوق؟

1 ـ مىسال. 10.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېل تۆت تەرەپلىك $ABCD$ بېرىلگەن، AC تەكشىلىكنىڭ سىرتىدىكى بىر O نۇقتا ئارقىلىق OA، OB، OC، OD نۇرلار يۈرگۈزۈلۈپ، بۇ تۆت نۇر ئۈستىدىن $\frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OB}=\frac{OG}{OC}=\frac{OH}{OD}=k$ بولىدىغان قىلىپ ئايرىم ـ ئايرىم E، F، G، H نۇقتىلار ئېلىنغان. E، F، G، H تۆت نۇقتىنىڭ تەكشىلىكداش بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.



10.1.3 ـ رەسىم

تەھلىل: E، F، G، H تۆت نۇقتىنىڭ تەكشىلىكداش بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت $\overrightarrow{EH}$، $\overrightarrow{EF}$، $\overrightarrow{EG}$ لارنىڭ تەكشىلىكداش ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ. بۇنى $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ لارنىڭ تەكشىلىكداشلىقىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايمىز.

ئىسپات:

$$\because\quad \frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OB}=\frac{OG}{OC}=\frac{OH}{OD}=k,$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}.$$

تۆت تەرەپلىك $ABCD$ پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولغانلىقتىن، $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ بولىدۇ.

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{EG}&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}\\&=k\overrightarrow{OC}-k\overrightarrow{OA}\\&=k\overrightarrow{AC}\\&=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\\&=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OE}\\&=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\end{aligned}$$

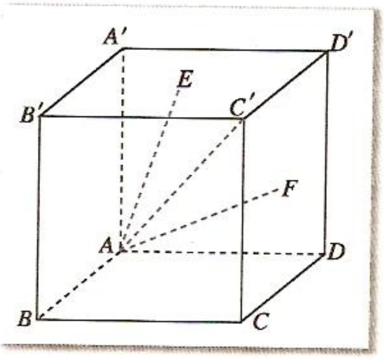
ۋېكتورلارنىڭ تەكشىلىكداش بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتىگە ئاساسەن، E، F، G، H تۆت نۇقتىنىڭ تەكشىلىكداش بولىدىغانلىقىنى بىلىمىز.

مەسىلىدىكى گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنتلارنى مۇۋاپىق ۋېكتور بىلەن ئىپادىلىۋېلىپ، گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنتلارنىڭ مۇناسىۋىتىنى ۋېكتور ئەمەللىرىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىشتىن ئىبارەت بۇ خىل ئۇسۇل ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا دائىم ئىشلىتىلىدىغان ئۇسۇلدۇر.

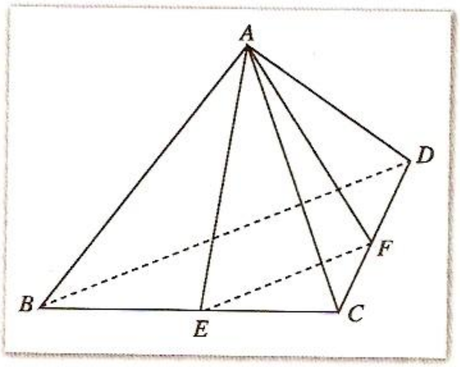
مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ بېرىلگەن بولۇپ، A بىلەن C ، B بىلەن D تۇتاشتۇرۇلغان، E ، F ئايرىم - ئايرىم BC ، CD نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ ھەم ئاددىيلاشتۇرغاندىن كېيىنكى ۋېكتورنى سىزىڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;　(2) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$;　(3) $\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.



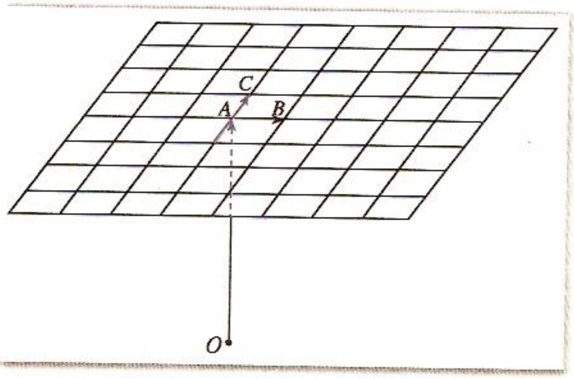
(2 - مىسال ئۈچۈن)



(1 - مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ بېرىلگەن، E ، F نۇقتىلار ئايرىم - ئايرىم ئۈستۈنكى ياق $A'C'$ ۋە يان ياق CD' نىڭ مەركىزى. تۆۋەندە بېرىلگەن ئىپادىلەردىكى x ، y نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $\overrightarrow{AC'}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$;
(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$;
(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA'}$.



(1 - مىسال ئۈچۈن)

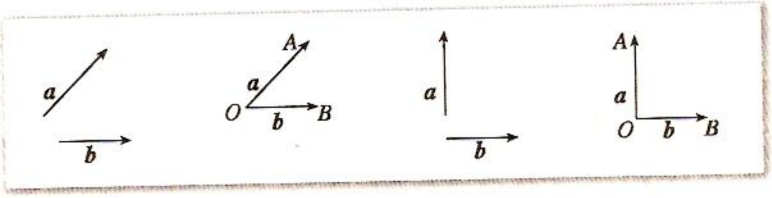
3. رەسىمدىكىدەك، A ، B ، C نۇقتىلار سىزىقداش ئەمەس، O نۇقتا تەكشىلىك ABC نىڭ سىرتىدىكى خالىغان بىر نۇقتا ھەمدە ABC تەكشىلىكتىكى كىچىك كاتەكچىلەر بىرلىك كۋادرات ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆۋەندىكىلەرنى قانائەتلەندۈرىدىغان P ، Q ، R ، S نۇقتىلارنى تېپىڭ:

(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$;
(2) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$;
(3) $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$;
(4) $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

3-1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ئەمىلى

گېئومېترىيىدە، ئارا بۇلۇڭ بىلەن ئۇزۇنلۇق ئەڭ ئاساسىي ئىككى گېئومېترىيىلىك مىقداردۇر. تۆۋەندە، بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ ئارا بۇلۇڭى ۋە بوشلۇقتىكى كېسىكلەرنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار (سانلىق) كۆپەيتمىسىدىن پايدىلىنىپ قانداق ئىپادىلەشنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

11.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن. بوشلۇقتا خالىغان بىر O نۇقتىنى ئېلىپ، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ نى سىزساق، ئۇ ھالدا $\angle AOB$ ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى دەپ ئاتىلىپ، $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ قىلىپ يېزىلىدۇ.



11.1.3 ـ رەسىم

ئادەتتە مۇنداق بەلگىلىۋالىمىز: $0\leqslant\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$. بۇنداق بولغاندا، ئىككى ۋېكتورنىڭ ئارا بۇلۇڭى بىردىنبىر ئېنىقلىنىدۇ ھەمدە $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$ بولىدۇ.

ئەگەر $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ بولسا، ئۇ ھالدا ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ تىك بولۇپ، $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

نۆل بولمىغان ئىككى ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ ۋېكتور $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\boldsymbol{b}$ نىڭ **سكالىيار كۆپەيتمىسى** (inner product) دەپ ئاتىلىپ، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

نۆل ۋېكتور بىلەن ھەرقانداق بىر ۋېكتورنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى 0 بولىدۇ.

ئالاھىدە ئەھۋالدا، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2$ بولىدۇ.

بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى تۆۋەندىكى ئەمەل قانۇنلىرىنى قانائەتلەندۈرىدۇ:

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى);

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (تارقىتىش قانۇنى).

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى تەكشىلىكتىكى ۋېكتوردىكىسىگە تەققاسلاپ ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

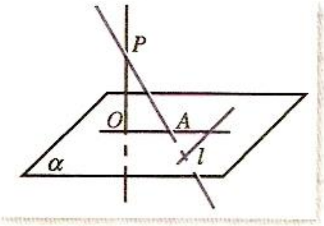
سىز بۇ ئەمەل قانۇنلىرىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟ بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىگە دائىر تارقىتىش قانۇنىنى ئىسپاتلاش بىلەن تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىگە دائىر تارقىتىش قانۇنىنى ئىسپاتلاشنىڭ قانداق ئوخشىمايدىغان يېرى بار؟

مۇلاھىزە ؟

1. نۆل بولمىغان ئۈچ سان a، b، c لارغا نىسبەتەن، ئەگەر $ab=ac$ بولسا، ئۇ ھالدا $b=c$ بولىدۇ. ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارغا نىسبەتەن، $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ دىن $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ نى كەلتۈرۈپ چىقارغىلى بولامدۇ؟ ئەگەر كەلتۈرۈپ چىقارغىلى بولمىسا، ئەكس مىسال كەلتۈرۈڭ.

2. نۆل بولمىغان ئۈچ سان a، b، c لارغا نىسبەتەن، ئەگەر $ab=c$ بولسا، ئۇ ھالدا $a=\frac{c}{b}$ (ياكى $b=\frac{c}{a}$) بولىدۇ. ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لارغا نىسبەتەن، ئەگەر $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$ بولسا، ئۇنى $\boldsymbol{a}=\frac{k}{\boldsymbol{b}}$ (ياكى $\boldsymbol{b}=\frac{k}{\boldsymbol{a}}$) قىلىپ يېزىشقا بولامدۇ؟ باشقىچە ئېيتقاندا، ۋېكتورلارنى بۆلۈش ئەمەلى بارمۇ؟

3. نۆل بولمىغان ئۈچ سان a، b، c لارغا نىسبەتەن $(ab)c=a(bc)$ بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارغا نىسبەتەن $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ كۈچكە ئىگىمۇ؟ ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرەمدۇ؟



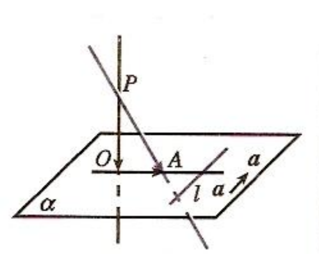
12.1.3 - رەسىم

2 - مىسال. ئەگەر تەكشىلىكتىكى بىر تۈز سىزىق مۇشۇ تەكشىلىككە چۈشۈرۈلگەن بىر ئاغمىنىڭ پروييېكسىيىسىگە تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق مۇشۇ ئاغمىغىمۇ تىك بولىدۇ.❶

بېرىلگىنى: 12.1.3 - رەسىمدىكىدەك، PO، PA ئايرىم - ئايرىم α تەكشىلىككە چۈشۈرۈلگەن تىك سىزىق ۋە ئاغما، AO بولسا PA نىڭ α تەكشىلىكتىكى پروييېكسىيىسى، $l\subset\alpha$ ھەمدە $l\perp OA$.

ئىسپات تەلەپ: $l\perp PA$.

تەھلىل: بۇ ھۆكۈملۈكنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىغاندا، پەقەت l تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىشلىك ۋېكتورى $\boldsymbol{a}$ بىلەن $\overrightarrow{PA}$ نىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى 0 بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىساقلا بولىدۇ. $\overrightarrow{PA}$ بىلەن $\overrightarrow{PO}$، $\overrightarrow{OA}$ لار بىر ئۈچبۇلۇڭ ھاسىل قىلىدۇ، يەنە كېلىپ $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PA}$ ھەم $l\perp OA$، $PO\perp\alpha$ بولغانلىقى ئۈچۈن، ھۆكۈملۈكنى ئاسانلا ئىسپاتلىغىلى بولىدۇ.



13.1.3 - رەسىم

ئىسپات: 13.1.3 - رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىشلىك ۋېكتورى $\boldsymbol{a}$ بىلەن ۋېكتور $\overrightarrow{PO}$، $\overrightarrow{OA}$ نى سىزىۋالىمىز.

$\because l\perp OA,\ \therefore \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OA}=0.$

$\because PO\perp\alpha,\ l\subset\alpha,\ \therefore l\perp PO,$

$\because \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PO}=0.$

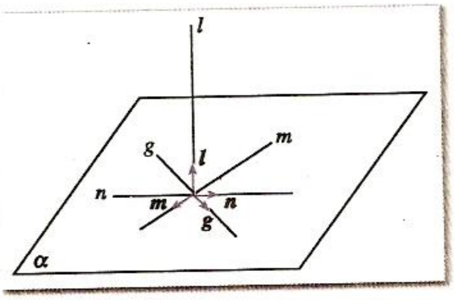
$\because \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PO}+\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OA}=0,$

$\therefore l\perp PA.$

«ئەگەر تەكشىلىكتىكى بىر تۈز سىزىق مۇشۇ تەكشىلىككە چۈشۈرۈلگەن بىر ئاغمىغا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق مۇشۇ ئاغمىنىڭ تەكشىلىكتىكى پروييېكسىيىسىگىمۇ تىك بولىدۇ»❷ دېگەن ھۆكۈملۈكنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالامسىز؟

❶ بۇ ھۆكۈملۈك ئۈچ تىك تېئورېمىسى دەپ ئاتىلىدۇ.

❷ بۇ ھۆكۈملۈك ئۈچ تىك تېئورېمىسىنىڭ تەتۈر تېئورېمىسى دەپ ئاتىلىدۇ.



14.1.3 ـ رەسىم

3 ـ مىسال. 14.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، m، n لار α تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق. ئەگەر $l \perp m$، $l \perp n$ بولسا، $l \perp \alpha$ نى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: $l \perp \alpha$ نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، l نىڭ α تەكشىلىكتىكى ھەرقانداق بىر g تۈز سىزىققا تىك بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش كېرەك (تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىك بولۇشىنىڭ ئېنىقلىمىسى). ئەگەر بىز g بىلەن m، n لار ئارىسىدا مەلۇم خىل باغلىنىشنى تۇرغۇزۇۋېلىپ، $l \perp m$، $l \perp n$ گە ئاساسەن $l \perp g$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرالىساق، ئۇ ھالدا بۇ مەسىلىنى ئاسانلا ھەل قىلالايمىز.

ئىسپات: α تەكشىلىكتە خالىغان بىر g تۈز سىزىقنى سىزىپ، l، m، n، g لار ئۈستىدىن ئايرىم ـ ئايرىم نۆل بولمىغان $\boldsymbol{l}$، $\boldsymbol{m}$، $\boldsymbol{n}$، $\boldsymbol{g}$ ۋېكتورلارنى ئالىمىز.

> بىز «تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسى» نى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىدۇق، يەنى بىر تۈز سىزىق بىر تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىققا تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ تۈز سىزىق ئاشۇ تەكشىلىككە تىك بولىدۇ.

> تۈز سىزىقنى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەش ۋە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىك بولۇش مۇناسىۋىتىنى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ئەملىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاش جەريانىنى چۈشىنىۋېلىڭ.

m بىلەن n ئۆزئارا كېسىشىدىغانلىقتىن، ۋېكتور $\boldsymbol{m}$، $\boldsymbol{n}$ لار پاراللېل بولمايدۇ. ۋېكتورلارنىڭ تەكشىلىكداش بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتىگە ئاساسەن بىلىشكە بولىدۇكى، بىردىنبىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}.$$

يۇقىرىقى ئىپادىنىڭ ئىككى تەرىپى بىلەن ۋېكتور l نىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنى ئالساق، تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}.$$

$\because \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0,\ \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$ (نېمە ئۈچۈن؟),

$\therefore \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0,$

$\therefore \boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{g}.$

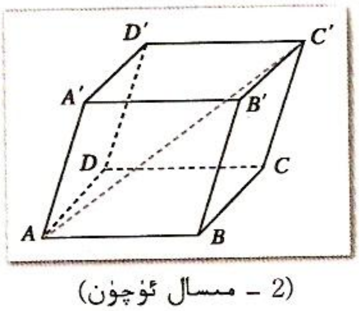
يەنى $l \perp g$.

شۇنىڭ بىلەن، l تۈز سىزىقنىڭ α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىققا تىك بولىدىغانلىقى ئىسپاتلاندى. شۇنىڭ ئۈچۈن $l \perp \alpha$.

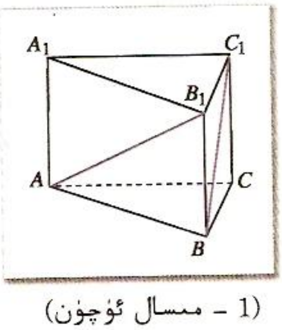
مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، مۇنتىزىم ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A_1B_1C_1$ دا، ئەگەر $AB=\sqrt{2}\,BB_1$ بولسا، ئۇ ھالدا AB_1 بىلەن C_1B دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى (   ) بولىدۇ.

(A) 60°　(B) 90°　(C) 105°　(D) 75°



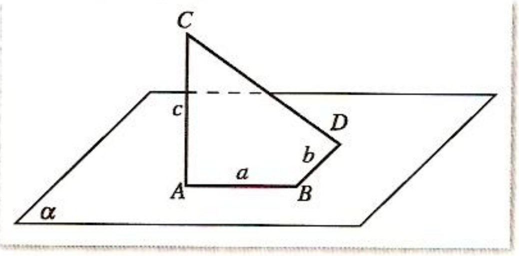
(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $AB=4$، $AD=3$، $AA'=5$، $\angle BAD=90°$، $\angle BAA'=\angle DAA'=60°$ بولسا، AC' نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

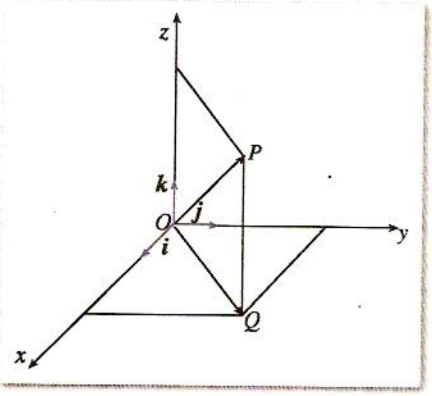
3. رەسىمدىكىدەك، AB، BD كېسىكلەر α تەكشىلىكتە ياتىدۇ، $BD \perp AB$، AC كېسىك α تەكشىلىككە تىك ھەمدە $AB=a$، $BD=b$، $AC=c$. C بىلەن D نىڭ ئارىلىقىنى تېپىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

4-1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ ئورتوگونال ئاجرىلىشى ۋە ئۇنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر $\boldsymbol{p}$ ۋېكتورنى سىزىقداش بولمىغان $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ ئىككى ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ (تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېما). ئۇنداق بولسا، بوشلۇقتىكى خالىغان بىر ۋېكتورغا نىسبەتەن، مۇشۇنىڭغا ئوخشاش يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولامدۇ؟



15.1.3 ـ رەسىم

15.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ لار بوشلۇقتىكى ئىككى ـ ئىككىدىن تىك بولغان ۋېكتورلار ھەمدە ئۇلار ئورتاق باش نۇقتا O غا ئىگە بولسۇن. بوشلۇقتىكى خالىغان بىر ۋېكتور $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$ غا نىسبەتەن، Q نۇقتىنى P نۇقتىنىڭ $\boldsymbol{i}$ بىلەن $\boldsymbol{j}$ بەلگىلىگەن تەكشىلىكتىكى تىك پروييېكسىيىسى دەپ پەرەز قىلساق، تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، $\overrightarrow{OQ}$ بىلەن $\boldsymbol{k}$ بەلگىلىگەن تەكشىلىكتە شۇنداق بىر ھەقىقىي سان z مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{i}$ بىلەن $\boldsymbol{j}$ بەلگىلىگەن تەكشىلىكتە، تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، شۇنداق بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

بۇنىڭدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ لار بوشلۇقتىكى ئىككى ـ ئىككىدىن تىك بولغان ۋېك-

تورلار بولسا، ئۇ هالدا بوشلۇقتىكى خالىغان بىر $\boldsymbol{p}$ ۋېكتورغا نىسبەتەن، شۇنداق بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى $\{x, y, z\}$ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

بىز $x\boldsymbol{i}$ ، $y\boldsymbol{j}$ ، $z\boldsymbol{k}$ لارنى ۋېكتور $\boldsymbol{p}$ نىڭ $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ لاردىكى تارماق ۋېكتورى دەيمىز.

ئىزدىنىش

بوشلۇقتا، ئەگەر ئىككى ـ ئىككىدىن تىك بولغان $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ ۋېكتورلارنىڭ ئورنىغا تەكشىلىكداش بولمىغان خالىغان ئۈچ ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ نى ئالماشتۇرساق، سىز يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

تەكشىلىكتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىغا ئوخشاش، بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىنىمۇ ئوتتۇرىغا قويالايمىز.

تېئورېما: ئەگەر $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ ئۈچ ۋېكتور تەكشىلىكداش بولمىسا، ئۇ هالدا بوشلۇقتىكى خالىغان بىر $\boldsymbol{p}$ ۋېكتورغا نىسبەتەن شۇنداق بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى $\{x, y, z\}$ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېما بىلەن 101 ـ بەتتىكى «مۇلاھىزە»دىكى 2 ـ مەسىلىنىڭ قانداق باغلىنىشى بار؟ سىز قانداق چۈشەنچە ھاسىل قىلدىڭىز؟

بۇنىڭدىن بىلىشكە بولىدۇكى، ئەگەر $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ ئۈچ ۋېكتور تەكشىلىكداش بولمىسا، ئۇ هالدا بوشلۇقتىكى بارلىق ۋېكتورلاردىن تەركىب تاپقان توپلام $\{\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},\ x, y, z\in \mathbf{R}\}$ بولۇپ، بۇ توپلامنى $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ ۋېكتورلاردىن ھاسىل بولغان دەپ قاراشقا بولىدۇ. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ نى بوشلۇقنىڭ بىر **بازىسى** (base)، $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ ، $\boldsymbol{c}$ لارنى **بازىس ۋېكتور** (base vectors) دەپ ئاتايمىز. بوشلۇقتىكى تەكشىلىكداش بولمىغان ھەرقانداق ئۈچ ۋېكتور بوشلۇقنىڭ بىر بازىسىنى ھاسىل قىلىدۇ.

ئالاھىدە ئەھۋالدا، $\boldsymbol{e}_1$ ، $\boldsymbol{e}_2$ ، $\boldsymbol{e}_3$ لەرنى ئىككى ـ ئىككىدىن تىك ھەم ئورتاق باش نۇقتا O غا ئىگە بىرلىك ۋېكتور (بىز ئۇلارنى بىرلىك ئورتوگونال بازىس دەپ ئاتايمىز) دەپ پەرەز قىلىپ، $\boldsymbol{e}_1$ ، $\boldsymbol{e}_2$ ، $\boldsymbol{e}_3$ لەرنىڭ ئورتاق باش نۇقتىسى O نى كوئوردىنات بېشى، $\boldsymbol{e}_1$ ، $\boldsymbol{e}_2$ ، $\boldsymbol{e}_3$ لەرنىڭ يۆنىلىشىنى ئايرىم ـ ئايرىم x ئوق، y ئوق، z ئوقنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى قىلىپ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزساق، ئۇ هالدا بوشلۇقتىكى خالىغان بىر $\boldsymbol{p}$ ۋېكتورنى ئۇنىڭ باش نۇقتىسى كوئوردىنات بېشى O بىلەن ئۈستمۇئۈست چۈشىدىغان قىلىپ پاراللېل يۆتكەش ئارقىلىق، ۋېكتور $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ غا ئېرىشكىلى بولىدۇ. بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىغا ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، شۇنداق بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى $\{x, y, z\}$ مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

بىرلىك ئورتوگونال بازىستىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنى ھېسابلاڭ:

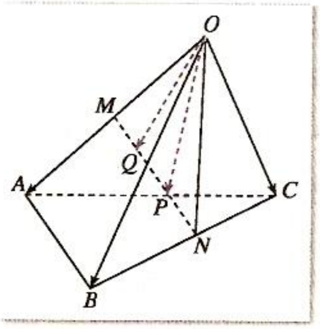
$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3.$

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

x، y، z لارنى $\boldsymbol{p}$ ۋېكتورنىڭ بىرلىك ئورتوگونال بازىس $\boldsymbol{e}_1$، $\boldsymbol{e}_2$، $\boldsymbol{e}_3$ تىكى كوئوردېناتى دەپ ئاتاپ، $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$ قىلىپ يازىمىز.

بۇ چاغدا، ۋېكتور $\boldsymbol{p}$ نىڭ كوئوردېناتى دەل P نۇقتىنىڭ بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى $Oxyz$ تىكى كوئوردېناتى (x, y, z) تىن ئىبارەت بولىدۇ (ئويلاپ بېقىڭ، نېمە ئۈچۈن؟). شۇنىڭ بىلەن، ئورتوگونال بازىستىن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىغا بولغان ئالماشتۇرۇشقا ئىگە بولىمىز.

بوشلۇقتىكى ۋېكتورغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىدىن بىلىشكە بولىدۇكى، بوشلۇقتىكى خالىغان بىر ۋېكتورنى ھامان تەكشىلىكداش بولمىغان ئۈچ ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ، بۇ، بىزنىڭ مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشىمىزغا قۇلايلىق ئېلىپ كېلىدۇ.



16.1.3 - رەسىم

4 - مىسال. 16.1.3 - رەسىمدىكىدەك، M، N ئايرىم - ئايرىم تۆت ياقلىق $OABC$ نىڭ OA، BC تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، P، Q بولسا MN نى تەڭ ئۈچ بۆلەككە بۆلگۈچى نۇقتىلار بولسا، $\overrightarrow{OP}$ بىلەن $\overrightarrow{OQ}$ نى $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ ۋېكتورلار ئارقىلىق ئىپادىلەيلى.

يېشىش:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC};$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

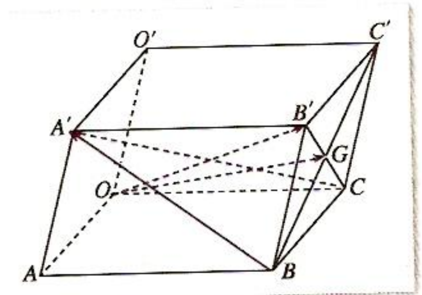
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}.$$

مەشىق

1. ۋېكتور $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ بوشلۇقنىڭ بىر بازىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لارنىڭ ئىچىدىن قايسى ۋېكتور- نى تاللىساق، ئۇنىڭ بىلەن $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ۋېكتورلار بوشلۇقنىڭ يەنە بىر بازىسىنى ھاسىل قىلىدۇ؟

2. O، A، B، C لار بوشلۇقتىكى تۆت نۇقتا بولۇپ، $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ ۋېكتورلار بوشلۇقتا بىر بازىس ھاسىل قىلمايدىغانلىقى بېرىل- گەن بولسا، ئۇ ھالدا O، A، B، C نۇقتىلار تەكشىلىكداش بولامدۇ؟

3. پاراللېل ئالتە ياقلىق $OABC-O'A'B'C'$ بېرىلگەن. ئەگەر G نۇقتا يان ياق $BB'CC'$ نىڭ مەركىزى ھەمدە $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$ بولسا، تۆۋەندىكى ۋېكتورلارنى $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ ئارقىلىق ئىپادىلەڭ:



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

(1) $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{BA'}$، $\overrightarrow{CA'}$; (2) $\overrightarrow{OG'}$.

5-1-3 بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئەمەللىرىنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشى

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتە $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) بىلەن، بوشلۇقتا بولسا تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گورۇپپىسى $\{x, y, z\}$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بىز تەكشىلىك ۋېك- تورلىرى ئۈستىدىكى كوئوردىنات ئەمىلىگە تەقلىد قىلىپ، بوشلۇق ۋېكتورلىرىنى قوشۇش، ئېلىش، سانغا كۆپەيتىش ۋە ئۇلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى قاتارلىق ئەمەللەرنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادى- لىنىشىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز.

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3),$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

تۆۋەندە ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىنى ئىسپاتلايمىز.

$\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، $\boldsymbol{k}$ لارنى بىرلىك ئورتوگونال بازىس دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}).$$

> قالغان ئەمەللەرنىڭ كو- ئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلى- نىشىنىمۇ ئوخشاش ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاشقا بولى- دۇ، بۇنى ئۆزۈڭلار ئىسپاتلاپ كۆرۈڭلار.

ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىگە دائىر تارقىتىش قانۇنى ۋە

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

دىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

تەكشىلىكتىكى ۋېكتور ئەمەللىرىنىڭ كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىگە تەقلىد قىلىپ، بىز يەنە تۆۋەندىكىلەرنى كەلتۈ-

رۇپ چىقىرالايمىز:

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3\ (\lambda \in \mathbf{R});$$

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};$$

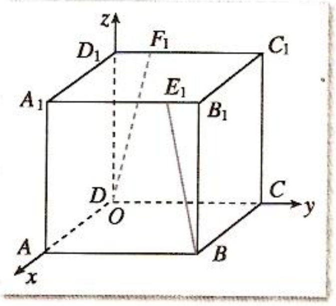
$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، $A(a_1, b_1, c_1)$ ، $B(a_2, b_2, c_2)$ نۇقتىلار بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا A ، B ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىق:

$$d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}.$$

بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئەمەللىرى بىلەن ۋېكتورلارنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىنى بىرلەشتۈرگەندە، ئارا بۇلۇڭ ۋە ئارىلىقنى ھېسابلاش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلغىلى بولۇپلا قالماي، يەنە بەزى مەسىلىلەرنىڭ ھەل قىلىنىشىنى ئاددىيلاشتۇرغىلىمۇ بولىدۇ.



17.1.3 ـ رەسىم

5 ـ مىسال. 17.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E_1 بىلەن F_1 ئايرىم ـ ئايرىم A_1B_1 ، C_1D_1 نى تەڭ تۆت بۆلەككە بۆلگۈچى نۇقتىلارنىڭ بىرى بولسا، BE_1 بىلەن DF_1 دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: BE_1 بىلەن DF_1 دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ دەل $\overrightarrow{BE_1}$ بىلەن $\overrightarrow{DF_1}$ دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ياكى ئۇنىڭ تولدۇرغۇچى بۇلۇڭى بولىدۇ. شۇڭا، $\overrightarrow{BE_1}$ بىلەن $\overrightarrow{DF_1}$ نىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ۋە مودۇلىنى ئۇلارنىڭ كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلىنىشىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ چىقىپ، بۇ ئارقىلىق ئۇلاردىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى تاپالايمىز.

يېشىش: 17.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقىنى 1 دەپ پەرەز قىلايلى. ئاندىن $\overrightarrow{DA}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{DD_1}$ نى بىرلىك ئورتوگونال بازىس قىلىپ بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزساق، ئۇ ھالدا

$$B(1, 1, 0),\ E\left(1, \frac{3}{4}, 1\right),\ D(0, 0, 0),\ F_1\left(0, \frac{1}{4}, 1\right).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{BE_1}=\left(1, \frac{3}{4}, 1\right)-(1, 1, 0)=\left(0, -\frac{1}{4}, 1\right),$$

$$\overrightarrow{DF_1}=\left(0, \frac{1}{4}, 1\right)-(0, 0, 0)=\left(0, \frac{1}{4}, 1\right),$$

$$|\overrightarrow{BE_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4},\ |\overrightarrow{DF_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4},$$

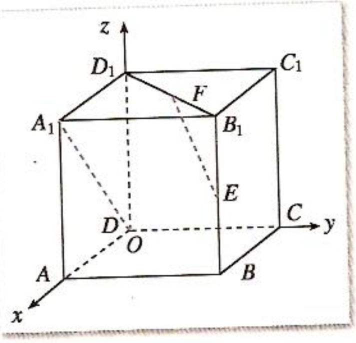
$$\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}=0\times0+\left(-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+1\times1=\frac{15}{16}.$$

$$\therefore\ \cos\langle \overrightarrow{BE_1}, \overrightarrow{DF_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}|\cdot|\overrightarrow{DF_1}|}$$

$$=\frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4}}=\frac{15}{17}.$$

شۇڭا، BE_1 بىلەن DF_1 دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتى $\frac{15}{17}$ بولىدۇ.

6 ـ مىسال. 18.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E، F نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم BB_1، D_1B_1 نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، $EF\perp DA_1$ نى ئىسپاتلايلى.



18.1.3 ـ رەسىم

ئالاقىدار ئېلېمېنتلارنى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەش ۋە مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئەمەللىرى (كوئوردىنات كۆرۈنۈشىدىكى ئەمەللەرنىمۇ ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) دىن پايدىلىنىپ يېشىشتىكى پىكىر يولىنى چۈشىنىۋېلىڭ.

ئىسپات: 18.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقىنى 1 دەپ پەرەز قىلايلى. ئاندىن $\overrightarrow{DD_1}$، $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{DA}$ نى بىرلىك ئورتوگونال بازىس قىلىپ بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى $Oxyz$ نى تۇرغۇزساق، ئۇ ھالدا

$$E\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right),\ F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right),$$

$$\therefore\ \overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

$$\because\ A_1(1,\ 0,\ 1),\ D(0,\ 0,\ 0),$$

$$\therefore\ \overrightarrow{DA_1}=(1,\ 0,\ 1).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\cdot(1,\ 0,\ 1)=0.$$

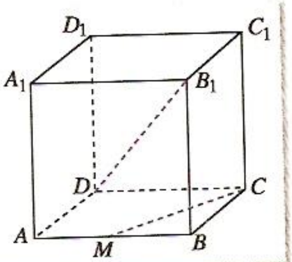
شۇڭا، $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$، يەنى $EF\perp DA_1$.

مەشىق

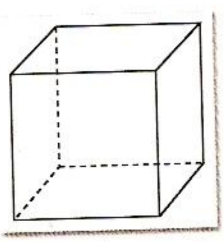
1. $a=(-3,\ 2,\ 5)$، $b=(1,\ 5,\ -1)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) $a+b$; (2) $3a-b$; (3) $6a$; (4) $a\cdot b$.

2. رەسىمدىكىدەك، كۇبنىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى 2 ئىكەنلىكى بېرىلگەن. مۇۋاپىق بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، كۇبنىڭ ھەربىر چوققىسىنىڭ كوئوردىناتىنى يېزىڭ ھەم ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن پىكىر ئالماشتۇرۇڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

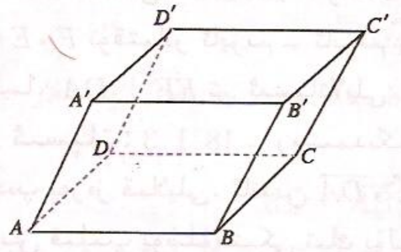


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، M نۇقتا AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، DB_1 بىلەن CM دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى تېپىڭ.

1.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

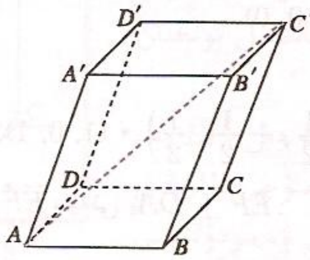
1. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A'B'C'D'$ بېرىلگەن. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى ئاددىيلاشتۇرۇڭ ھەم ئاددىيلاشتۇرۇش نەتىجىسىگە ماس كېلىدىغان ۋېكتورنى سىزىڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;　　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$;

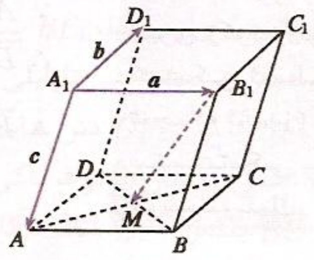
(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$;　　(4) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$;

2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، AC، BD لار M نۇقتىدا كېسىشىدۇ. ئەگەر $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$ بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى ۋېكتورلار ئىچىدە $\overrightarrow{B_1M}$ بىلەن تەڭ بولىدىغان ۋېكتور (　).

(A) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(B) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　(D) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

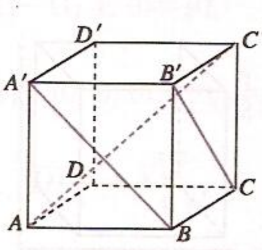


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

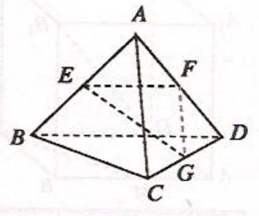
3. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $AB=5$، $AD=3$، $AA'=7$، $\angle BAD=60°$، $\angle BAA'=\angle DAA'=45°$ بولسا، AC' نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

4. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ ھەربىر تەرىپى ۋە AC، BD لارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا a غا تەڭ ھەم E، F، G لار ئايرىم ـ ئايرىم AB، AD، DC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$;　(3) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AC}$;
(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$;　(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}$;　(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$.



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

5. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى a ئىكەنلىكى بېرىلگەن.
(1) $A'B$ بىلەن $B'C$ نىڭ ئارا بۇلۇڭىنى تېپىڭ؛　(2) $A'B\perp AC'$ نى ئىسپاتلاڭ.

6. ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لار ئايرىم ـ ئايرىم x ئوق، y ئوق، z ئوققا پاراللېل ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇلار ـ نىڭ كوئوردىناتلىرى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟

7. $\boldsymbol{a}=(2,\ -3,\ 1)$، $\boldsymbol{b}=(2,\ 0,\ 3)$، $\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ 2)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

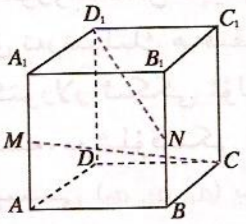
(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (2) $\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$.

8. $\boldsymbol{a}=(2,\ -1,\ 3)$، $\boldsymbol{b}=(-4,\ 2,\ x)$ ھەمدە $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. x نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

9. $A(3,\ 5,\ -7)$، $B(-2,\ 4,\ 3)$ لار بېرىلگەن. $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BA}$ لارنى، AB كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتى ۋە AB كېسىكنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

10. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، M، N لار ئايرىم ـ ئايرىم A_1A ۋە B_1B قىرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، CM بىلەن D_1N دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى تېپىڭ.

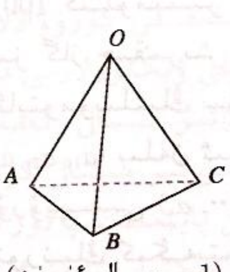
11. ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لار بوشلۇقنىڭ يەنە بىر بىرلىك ئورتوگونال بازىسى، ۋېكتور $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ لار بوشلۇقنىڭ يەنە بىر بازىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئەگەر ۋېكتور $\boldsymbol{p}$ نىڭ بازىس $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ دىكى كوئوردىناتى $(1,\ 2,\ 3)$ بولسا، $\boldsymbol{p}$ نىڭ بازىس $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$ دىكى كوئوردىناتىنى تېپىڭ.



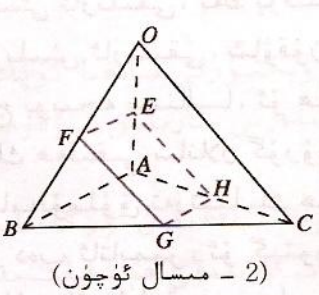
(10 ـ مىسال ئۈچۈن)

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $OABC$ دا، $OA\perp BC$، $OB\perp AC$ بولسا، $OC\perp AB$ نى ئىسپاتلاڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $OABC$ دا، $OA=OB$، $CA=CB$ بولۇپ، E، F، G، H لار ئايرىم ـ ئايرىم OA، OB، BC، CA نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆت تەرەپلىك $EFGH$ نىڭ تىك تۆتبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

3. ئىسپاتلاڭ: ئەگەر ئىككى تۈز سىزىق ئوخشاش بىر تەكشىلىككە تىك بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولىدۇ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

ۋېكتور ئۇقۇمىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە قوللىنىلىشى

بىزگە مەلۇمكى، تەكشىلىكتە ئورتوگونال بازىس بېكىتىلىپ، كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغاندىن كېيىن، كوئوردېنات تەكشىلىكىدىكى خالىغان بىر ۋېكتورنى ئىككى نامەلۇملۇق تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (a_1, a_2) بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئىككى ئۆلچەملىك ۋېكتور دەپمۇ ئاتىلىدۇ. بوشلۇقتا بىر ئورتوگونال بازىس بېكىتىلسە، بوشلۇقتىكى خالىغان بىر ۋېكتورنى ئۈچ نامەلۇملۇق تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى (a_1, a_2, a_3) بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بوشلۇقتىكى ۋېكتورلار ئۈچ ئۆلچەملىك ۋېكتور دەپمۇ ئاتىلىدۇ. ئىككى ئۆلچەملىك ۋېكتور بىلەن ئۈچ ئۆلچەملىك ۋېكتور ئومۇملاشتۇرۇلۇپ گېئومېترىيىلىك ۋېكتور دەپ ئاتىلىدۇ.

ئەمەلىي مەسىلىلەردە، بىز كۆپ ھاللاردا تېخىمۇ كۆپ ھەقىقىي سانلار بىلەن ئىپادىلەشكە توغرا كېلىدىغان مىقدارلارنى ئۇچرىتىمىز. مەسىلەن، مەۋسۇم ئاخىرىدا بەش پەندىن ئىمتىھان ئېلىنغان بولسا، ھەربىر ئوقۇغۇچىنى تەرتىپ بويىچە تىزىلغان بەش پەننىڭ نەتىجىسى بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ؛ ئاپتوموبىل ئىشلەپچىقىرىش لىنىيىسىدە، قۇراشتۇرۇلۇپ بولغان ئاپتوموبىل تورمۇزلىنىش ئارىلىقى، ئەڭ يۇقىرى تېزلىك، ھەر 100 كىلومېتىر ماڭغاندىكى ماي سەرپىياتى، سىيرىلىش ئارىلىقى، شاۋقۇن ئاۋازى، كېرەكسىز گاز چىقىرىش مىقدارى قاتارلىق ئالتە كۆرسەتكۈچ بويىچە سىنالسا، ئۇ ھالدا ھەربىر يېڭى ئاپتوموبىلنىڭ سۈپىتىنى ئالتە نامەلۇملۇق تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

ئومۇمەن، n نامەلۇملۇق تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسى $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ نى n ئۆلچەملىك ۋېكتور دەپ ئاتايمىز، ئۇ گېئومېترىيىلىك ۋېكتورنىڭ كېڭەيتىلىشىدۇر. n ئۆلچەملىك ۋېكتورلارنىڭ بارلىقىدىن ھاسىل بولغان توپلامغا ماس قۇرۇلما بېرىلگەندىن كېيىن، ئۇ n ئۆلچەملىك ئېۋكلىد بوشلۇقى دەپ ئاتىلىدۇ. n ئۆلچەملىك ئېۋكلىد بوشلۇقىنىڭ ھەربىر ئېلېمېنتىنى n ئۆلچەملىك ۋېكتورلار بوشلۇقىدىكى بىر نۇقتا دەپ قاراشقا بولىدۇ.

ئىككى ئۆلچەملىك ۋېكتوردىكىگە ئوخشاش، n ئۆلچەملىك ئىككى ۋېكتورنى قوشۇش ئەمىلى، ئېلىش ئەمىلى، ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلى، ئىككى ۋېكتورنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى، ۋېكتورنىڭ ئۇزۇنلۇقى (مودۇلى)، ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى «ئارىلىق» قاتارلىقلارغىمۇ تۆۋەندىكىدەك ئېنىقلىما بېرىشكە بولىدۇ:

$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ، $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\pm(b_1, b_2, \cdots, b_n)=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \cdots, a_n\pm b_n);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),\ \lambda\in\mathbf{R};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

n ئۆلچەملىك ۋېكتورلار بوشلۇقىدىكى ئىككى نۇقتا $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ، $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ ئارىسىدىكى «ئارىلىق»:

$$d_{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}\ .$$

ۋېكتور ئەمەللىرىدىن پايدىلىنىپ نۇرغۇنلىغان ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشقا بولىدۇ.

مەسىلەن، مەلۇم خىل تاۋارنىڭ سېتىلىش مىقدارىدا پەسىل ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ قانۇنىيەتلىك ئۆزگىرىش بولۇش ـ بولماسلىقنى تەتقىق قىلىش ئۈچۈن، مۇشۇ خىل تاۋارنىڭ بەش يىل ئىچىدىكى ھەر ئايلىق سېتىلىش مىقدارىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلار توپلانغان بولسا، ئۇ ھالدا بۇ خىل تاۋارنىڭ ھەر يىللىق سېتىلىش مىقدارىنى 12 ئايدىكى سېتىلىش مىقدارىدىن ھاسىل بولغان 12 ئۆلچەملىك ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. بەش يىل ئىچىدىكى سېتىلىش مىقدارىنى ئايرىم ـ ئايرىم

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{12}),$$
$$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{12}),$$
$$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{12}),$$
$$\boldsymbol{d}=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{12}),$$
$$\boldsymbol{e}=(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{12})$$

دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ بەش يىل ئىچىدىكى ئايلىق ئوتتۇرىچە سېتىلىش ۋېكتورى

$$\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e})$$

نى ھېسابلىساق، بۇ ۋېكتورنىڭ 12 تارماق مىقدارىنى كۆزىتىش ئارقىلىق مۇشۇ بەش يىل ئىچىدىكى ئايلىق ئوتتۇرىچە سېتىلىش مىقدارىنىڭ پەسىل ئۆزگىرىشى بىلەن مۇناسىۋەتلىك بولۇش ـ بولماسلىقىنى كۆرۈۋالايمىز.

يۇقىرىدىكىسى ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلى ۋە ۋېكتورنى سانغا كۆپەيتىش ئەمىلىنىڭ قوللىنىلىشىغا دائىر مىسال، ئەمدى ئەمەلىي مەسىلىلەرنى «ئارىلىق» ئۇقۇمىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا دائىر بىر مىسال كۆرەيلى.

«ئارىلىق» تىن پايدىلىنىپ تۈرگە ئايرىش كۆپ قوللىنىلىدىغان تۈرگە ئايرىش ئۇسۇلىدۇر. بۇنىڭدا، ھەربىر ۋېكتور بىلەن ئۆلچەملىك نۇقتىنىڭ ئارىلىقى ھېسابلىنىدۇ، ۋېكتور بىلەن قايسى ئۆلچەملىك نۇقتىنىڭ ئارىلىقى ئەڭ يېقىن بولسا، ئۇ شۇ تۈرگە تەۋە بولىدۇ.

جاغالماي بىلەن لاچىننىڭ ھەر ئىككىسى لاچىنسىمانلار ئەترىتىدىكى لاچىن ئائىلىسىگە تەۋە قۇشلاردۇر. ئۇلارنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكى كەپتەرچىلىك كېلىدۇ، شەكلى قارىغاچقا ئوخشاشراق بولۇپ، بەدىنىنىڭ مورفولوگىيىلىك ئالاھىدىلىكى بىر ـ بىرىگە ئوخشىشىپ كېتىدۇ، ئەمما لاچىن جاغالمايدىن سەل چوڭراق كېلىدۇ. ئەۋرىشكە ئېلىپ ئۆلچەش ئارقىلىق جاغالماينىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقى تەخمىنەن 31 cm، ئوتتۇرىچە قانات ئۇزۇنلۇقى تەخمىنەن 27 cm؛ لاچىننىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقى تەخمىنەن 35 cm، ئوتتۇرىچە قانات ئۇزۇنلۇقى تەخمىنەن 25 cm ئىكەنلىكى ئېنىقلانغان.

يېقىندا مەلۇم جايدا بەدەن شەكلى جاغالماي ياكى لاچىنغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئىككى قۇش بايقالدى. ئۆلچەش ئارقىلىق بۇ ئىككى قۇشنىڭ بەدەن ئۇزۇنلۇقى بىلەن قانات ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم $A(32.65,\ 25.2)$، $B(33.4,\ 26.9)$ ئىكەنلىكى ئېنىقلانغان بولسا، مۇشۇ سانلىق مەلۇماتلارغا ئاساسەن بۇ ئىككى قۇشنىڭ جاغالماي ياكى لاچىن ئىكەنلىكىگە ھۆكۈم قىلالامسىز؟

يېشىش: جاغالماينىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقىنى x_1، ئوتتۇرىچە قانات ئۇزۇنلۇقىنى y_1، لاچىننىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقىنى x_2، ئوتتۇرىچە قانات ئۇزۇنلۇقىنى y_2 دەپ پەرەز قىلايلى.

ھۆكۈم قىلماقچى بولغان قۇشنىڭ بەدەن ئۇزۇنلۇقىنى x ، قانات ئۇزۇنلۇقىنى y دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ قۇش بىلەن جاغالماي ۋە لاچىن ئارىسىدىكى «ئارىلىق» قا ئايرىم - ئايرىم تۆۋەندىكىدەك ئېنىقلىما بېرىمىز:

$$D_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\ ,$$

$$D_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\ .$$

بۇنداق ئېنىقلىما بېرىلگەن «ئارىلىق» ھۆكۈم قىلماقچى بولغان قۇشنىڭ بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلار بىلەن جاغالماي ۋە لاچىننىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقىغا دائىر سانلىق مەلۇماتلار ئارىسىدىكى ئارىلىقنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى ئەكس ئەتتۈرۈپ بېرەلەيدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ھۆكۈم قىلىش ئۇسۇلى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

ئەگەر $D_1>D_2$ بولسا، بۇ، ھۆكۈم قىلماقچى بولغان قۇشنىڭ بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقى لاچىننىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقىغا يېقىنلىشىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ، شۇڭا بۇ قۇش لاچىن بولىدۇ.

ئەگەر $D_1<D_2$ بولسا، بۇ، ھۆكۈم قىلماقچى بولغان قۇشنىڭ بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقى جاغالماينىڭ ئوتتۇرىچە بەدەن ئۇزۇنلۇقى ۋە قانات ئۇزۇنلۇقىغا يېقىنلىشىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ، شۇڭا بۇ قۇش جاغالماي بولىدۇ.

ئەگەر $D_1=D_2$ بولسا، بۇ، پەقەت يۇقىرىقى سانلىق مەلۇماتلارغىلا ئاساسلىنىپ ھۆكۈم چىقىرىشقا بولمايدىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

بېرىلگەن شەرتلەردىن بىلەلەيمىزكى:

$$x_1=31,\ \ y_1=27,\ \ x_2=35,\ \ y_2=25;$$

ئۇنىڭدىن باشقا:

$$x_A=32.65,\ \ y_A=25.2,\ \ x_B=33.4,\ \ y_B=26.9.$$

ھېسابلاش ئارقىلىق تۆۋەندىكى نەتىجىلەرگە ئېرىشىمىز:

$$D_{A1}=\sqrt{(x_A-x_1)^2+(y_A-y_1)^2}=\sqrt{5.9625}\approx 2.44,$$

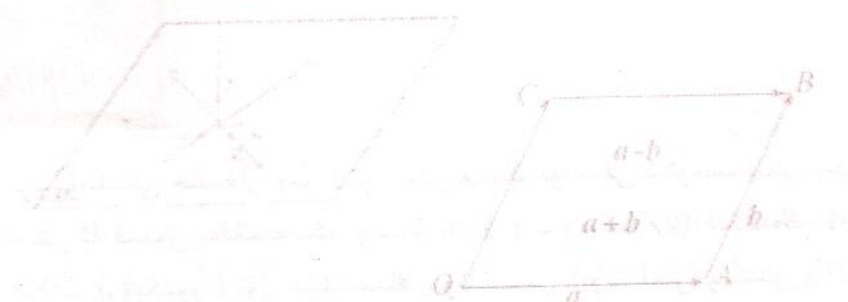
$$D_{A2}=\sqrt{(x_A-x_2)^2+(y_A-y_2)^2}=\sqrt{5.5625}\approx 2.36,$$

$$D_{B1}=\sqrt{(x_B-x_1)^2+(y_B-y_1)^2}=\sqrt{5.77}\approx 2.40,$$

$$D_{B2}=\sqrt{(x_B-x_2)^2+(y_B-y_2)^2}=\sqrt{6.17}\approx 2.48.$$

$D_{A1}>D_{A2}$ بولغانلىقتىن، A نىڭ لاچىن ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز؛ $D_{B1}<D_{B2}$ بولغانلىقتىن، B نىڭ جاغالماي ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز.

يۇقىرىقى ئىككى مىسالدىن تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسىدىن ھاسىل قىلىنغان ۋېكتورنىڭ قوللىنىلىشى گېئومېتىرىيىلىك ۋېكتورغا قارىغاندا تېخىمۇ كەڭ ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز. كۈندىلىك تۇرمۇش ۋە ئىلمىي تەتقىقاتلاردا، نۇرغۇن مىقدارلارنى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار گۇرۇپپىسىدىن ھاسىل قىلىنغان ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەشكە ھەم بۇ مىقدارلارنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ۋېكتور نەزەرىيىسىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ.



CHAPTER 3

2-3 ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى

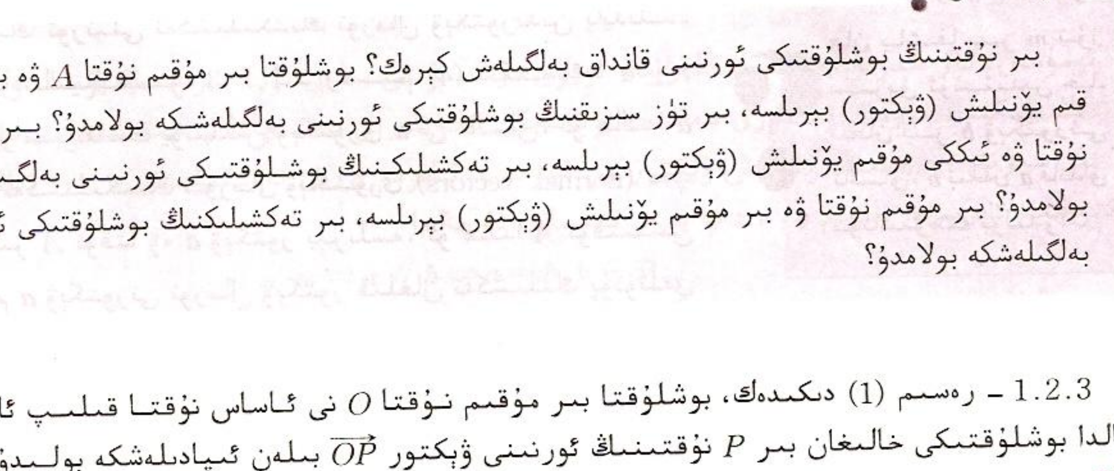
ئالدىنقى پاراگرافتا، بىز ۋېكتورنى تەكشىلىكتىن بوشلۇققا كېڭەيتتۇق ھەم بەزى ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلدۇق. سىز بوشلۇقتىكى ۋېكتورنىڭ ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتىكى رولىنى دەسلەپكى قەدەمدە ھېس قىلدىڭىزمۇ؟ بۇ پاراگرافتا بىز يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلىنى ئۆگىنىمىز.

ستېرېئومېترىيىنىڭ ئاساسىي تەتقىق قىلىش ئوبيېكتى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىك ۋە ئۇلاردىن ھاسىل بولغان بوشلۇقتىكى شەكىللەر. ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن نۇقتا، تۈز سىزىق ۋە تەكشىلىكنىڭ ئورنىنى چوقۇم ۋېكتور ئارقىلىق ئىپادىلىۋېلىش كېرەك.

مۇلاھىزە؟

بىر نۇقتىنىڭ بوشلۇقتىكى ئورنىنى قانداق بەلگىلەش كېرەك؟ بوشلۇقتا بىر مۇقىم نۇقتا A ۋە بىر مۇقىم يۆنىلىش (ۋېكتور) بېرىلسە، بىر تۈز سىزىقنىڭ بوشلۇقتىكى ئورنىنى بەلگىلەشكە بولامدۇ؟ بىر مۇقىم نۇقتا ۋە ئىككى مۇقىم يۆنىلىش (ۋېكتور) بېرىلسە، بىر تەكشىلىكنىڭ بوشلۇقتىكى ئورنىنى بەلگىلەشكە بولامدۇ؟ بىر مۇقىم نۇقتا ۋە بىر مۇقىم يۆنىلىش (ۋېكتور) بېرىلسە، بىر تەكشىلىكنىڭ بوشلۇقتىكى ئورنىنى بەلگىلەشكە بولامدۇ؟

1.2.3 - رەسىم (1) دىكىدەك، بوشلۇقتا بىر مۇقىم نۇقتا O نى ئاساس نۇقتا قىلىپ ئالساق، ئۇ ھالدا بوشلۇقتىكى خالىغان بىر P نۇقتىنىڭ ئورنىنى ۋېكتور $\overrightarrow{OP}$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ۋېكتور $\overrightarrow{OP}$ نى P نۇقتىنىڭ ئورۇن ۋېكتورى دەپ ئاتايمىز.



1.2.3 - رەسىم

بوشلۇقتىكى خالىغان بىر l تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى l ئۈستىدىكى بىر مۇقىم نۇقتا A ۋە بىر مۇقىم يۆنىلىش ئارقىلىق بەلگىلەشكە بولىدۇ. 1.2.3 ـ رەسىم (2) دىكىدەك، A نۇقتا l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى نۇقتا، $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور l تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىشى (يۆنىلىش ۋېكتورى) نى ئىپادىلەيدۇ. l تۈز سىزىق ئۈستىدىن $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ نى ئالساق، ئۇ ھالدا l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى خالىغان بىر P نۇقتىغا نىسبەتەن، شۇنداق بىر ھەقىقىي سان t چوقۇم مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}.$$

شۇنداق قىلىپ، A نۇقتا بىلەن $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور l تۈز سىزىقنىڭ ئورنىنى بەلگىلەپلا قالماستىن، يەنە l تۈز سىزىق ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىمۇ كونكرېت ئىپادىلەپ بېرەلەيدۇ.

بوشلۇقتا α تەكشىلىكنىڭ ئورنىنى α دىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق ئارقىلىق بەلگىلەشكە بولىدۇ. 1.2.3 ـ رەسىم (3) دىكىدەك، بۇ ئىككى تۈز سىزىقنى O نۇقتىدا كېسىشىدۇ، ئۇلارنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورلىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{a}$ ۋە $\boldsymbol{b}$، P نى α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر نۇقتا دەپ پەرەز قىلساق، تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلارغا دائىر ئاساسىي تېئورېمىدىن بىلەلەيمىزكى، تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (x, y) مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

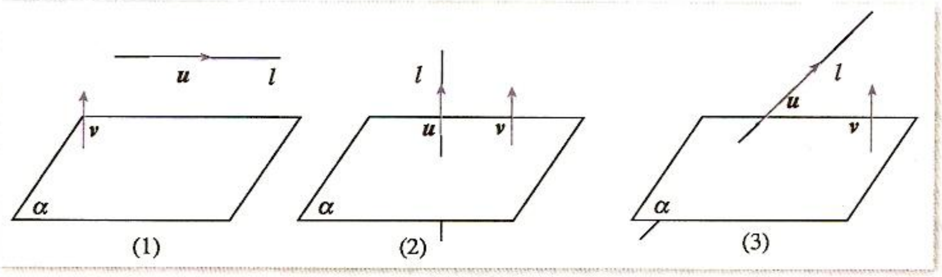
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

شۇنداق قىلىپ، O نۇقتا بىلەن ۋېكتور $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$ لار α تەكشىلىكنىڭ ئورنىنى بەلگىلەپلا قالماي، يەنە α دىكى خالىغان بىر نۇقتىنىمۇ كونكرېت ئىپادىلەپ بېرەلەيدۇ. بۇ خىل ئىپادىلەش گېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ.

ئەگەر $m\perp\alpha$ بولغان باشقا بىر m تۈز سىزىق ئۈستىدىن خالىغان بىر $\boldsymbol{b}$ ۋېكتورنى ئالساق، $\boldsymbol{b}$ بىلەن $\boldsymbol{a}$ قانداق مۇناسىۋەتتە بولىدۇ؟

تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورىغا ئوخشاش، بىز بوشلۇقتىكى تەكشىلىكنىڭ ئورنىنى تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورىدىن پايدىلىنىپمۇ ئىپادىلىيەلەيمىز. 1.2.3 ـ رەسىم (4) دىكىدەك، $l\perp\alpha$ بولغان l تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورى $\boldsymbol{a}$ نى ئالساق، ئۇ ھالدا $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور α تەكشىلىكنىڭ **نورمال ۋېكتورى** (normal vectors) دەپ ئاتىلىدۇ. بىر A نۇقتا ۋە $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور بېرىلسە، ئۇ ھالدا A نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەم $\boldsymbol{a}$ ۋېكتورنى نورمال ۋېكتور قىلغان تەكشىلىك پۈتۈنلەي بەلگىلەنگەن بولىدۇ.

يۆنىلىش ۋېكتورى ۋە نورمال ۋېكتور تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئورنىنى بەلگىلەيدىغانلىقتىن، بىز بوشلۇقتىكى تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەر ئارىسىدىكى پاراللېللىق، تىكلىك، ئارا بۇلۇڭ قاتارلىق ئورۇن مۇناسىۋەتلىرىنى تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورى ۋە تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورلىرىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەيمىز.



2.2.3 ـ رەسىم

مەسىلەن، 2.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورىنى $\boldsymbol{u}=(a_1, b_1, c_1)$، α تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورىنى $\boldsymbol{v}=(a_2, b_2, c_2)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$l \mathbin{/\!/} \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$ (2.2.3 ـ رەسىم (1))؛

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}$$
$$\Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1)=k(a_2, b_2, c_2)$$
$$\Leftrightarrow a_1=ka_2,\ b_1=kb_2,\ c_1=kc_2$$ (2.2.3 ـ رەسىم (2)).

بىز ۋېكتور ئەمەللىرىنىڭ رولىنى ھەر ۋاقىت، ھەر جايدا كۆرەلەيمىز. سىز «ۋېكتور ئادەمنىڭ گەۋدىسى، ئەمەل بولسا ئادەمنىڭ روھى»، «ئەمىلى بولمىغان ۋېكتور پەقەت يول بەلگىسىنىڭ رولىنىلا ئوينىيالايدۇ» دېگەن قاراشقا قوشۇلامسىز؟

ئىزدىنىش

1. 2.2.3 ـ رەسىم (3) دىكىدەك، ئەگەر l تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ ئارا بۇلۇڭى θ بولسا، θ نى $\boldsymbol{u}$، $\boldsymbol{v}$ لار بىلەن ئىپادىلىيەلەمسىز؟

2. ئوخشاشلا، بوشلۇقتىكى ئىككى تۈز سىزىقنىڭ پاراللېل بولۇش، تىك بولۇشتىن ئىبارەت ئورۇن مۇناسىۋىتىنى ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىنى تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟ بوشلۇقتىكى ئىككى تەكشىلىكنىڭ پاراللېل بولۇش، تىك بولۇشتىن ئىبارەت ئورۇن مۇناسىۋىتىنى ۋە ئۇلاردىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانىنى تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟

ئومۇمەن، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى بىلەن تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورى ۋە تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورى ھەققىدە تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنى يىغىنچاقلاپ چىقىشقا بولىدۇ.

تۈز سىزىق l، m نىڭ يۆنىلىش ۋېكتورىنى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، تەكشىلىك α، β نىڭ نورمال ۋېكتورىنى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{u}$، $\boldsymbol{v}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$l \mathbin{/\!/} m \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b},\ k \in \mathbf{R};$$
$$l \perp m \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0;$$
$$l \mathbin{/\!/} \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}=0;$$
$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u},\ k \in \mathbf{R};$$
$$\alpha \mathbin{/\!/} \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v},\ k \in \mathbf{R};$$
$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}=0.$$

ئەمدى «ماتېماتىكا ②» دىكى «تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسى» نى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايمىز.

تېئورېما: بىر تەكشىلىكتىكى ئۆزئارا كېسىشكۈچى ئىككى تۈز سىزىق ئىككىنچى بىر تەكشىلىككە پاراللېل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىككى تەكشىلىك پاراللېل بولىدۇ.

بېرىلگىنى: l، m تۈز سىزىق ۋە α، β تەكشىلىك، بۇنىڭدىكى $m \subset \alpha$، $l \subset \alpha$، l بىلەن m ئۆزئارا كېسىشىدۇ، $l \mathbin{/\!/} \beta$، $m \mathbin{/\!/} \beta$. ئىسپات تەلىپى: $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.

ئىسپات: ئۆزئارا كېسىشكۈچى تۈز سىزىق l، m نىڭ يۆنىلىش ۋېكتورىنى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، تەكشىلىك α، β نىڭ نورمال ۋېكتورىنى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{u}$، $\boldsymbol{v}$ دەپ پەرەز قىلىمىز.

$\because l \parallel \beta, m \parallel \beta, \quad \therefore \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{v}.$

$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}=0, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}=0.$

$m \subset \alpha$ ، $l \subset \alpha$ ھەمدە l ، m لار ئۆزئارا كېسىشىدىغانلىقتىن، α دىكى خالىغان بىر تۈز سىزىقنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورى $\boldsymbol{p}$ نى تۆۋەندىكى كۆرۈنۈشتە ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b},\ x, y \in \mathbf{R}.$$

ئۇنىڭ ئۈستىگە

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}=(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{v}=x\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}+y\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}=0,$$

يەنى β تەكشىلىكنىڭ نورمالى α تەكشىلىكتىكى خالىغان بىر تۈز سىزىققا تىك بولغانلىقتىن، β تەكشىلىكنىڭ نورمال ۋېكتورى α تەكشىلىكنىڭمۇ نورمال ۋېكتورى بولىدۇ، يەنى $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$.

$\therefore \alpha \parallel \beta.$

ئوخشاشلا، بىز «ماتېماتىكا ②» دىكى تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقىغا ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسى، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش تېئورېمىسىنىمۇ ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالايمىز. قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار بۇلارنى ئۆزلىرى ئىسپاتلاپ باقسا بولىدۇ.

مەشىق

1. $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{b}$ نى ئايرىم ـ ئايرىم l_1 ، l_2 تۈز سىزىقلارنىڭ يۆنىلىش ۋېكتورى دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن l_1 ، l_2 تۈز سىزىقلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $\boldsymbol{a}=(2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b}=(6, -3, -6)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(1, 2, -2)$, $\boldsymbol{b}=(-2, 3, 2)$;

(3) $\boldsymbol{a}=(0, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}=(0, 0, -3)$.

2. $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ نى ئايرىم ـ ئايرىم α ، β تەكشىلىكلەرنىڭ نورمال ۋېكتورى دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئاساسەن α ، β تەكشىلىكلەرنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىگە ھۆكۈم قىلىڭ:

(1) $\boldsymbol{u}=(-2, 2, 5)$, $\boldsymbol{v}=(6, -4, 4)$;

(2) $\boldsymbol{u}=(1, 2, -2)$, $\boldsymbol{v}=(-2, -4, 4)$;

(3) $\boldsymbol{u}=(2, -3, 5)$, $\boldsymbol{v}=(-3, 1, -4)$.

ستېرېئومېترىيىدە ھەل قىلىنىدىغان ئاساسىي مەسىلىلەر بوشلۇقتىكى شەكىللەرنىڭ كۆرۈنۈشى، چوڭ ـ كىچىكلىكى ۋە ئۇلارنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتىدۇر. بۇنىڭدىكى نۇقتىدىن تۈز سىزىققىچە، نۇقتىدىن تەكشىلىككىچە بولغان ئارىلىق مەسىلىسى ۋە تۈز سىزىق بىلەن تۈز سىزىق، تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىك، تەكشىلىك بىلەن تەكشىلىكنىڭ ئارا بۇلۇڭ مەسىلىسى ستېرېئومېترىيىدە تەتقىق قىلىنىدىغان مۇھىم مەسىلە ھېسابلىنىدۇ. بوشلۇقتىكى ۋېكتور ئەمەللىرى (بولۇپمۇ سكالىيار كۆپەيتمە) ۋېكتورلارنىڭ مودۇلى ۋە ۋېكتورلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا چېتىلىدۇ. ئالدىدا ئېيتىلغاندىكىگە ئوخشاش، بىز نۇقتا، تۈز سىزىق ۋە تەكشىلىكنى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەپ، ئاندىن نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنىڭ ئارا بۇلۇڭى ۋە ئۇزۇنلۇق قاتارلىق مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئەمەللىرى (بولۇپمۇ سكالىيار كۆپەيتمە) دىن پايدىلىنىپ ھەل قىلالايمىز.

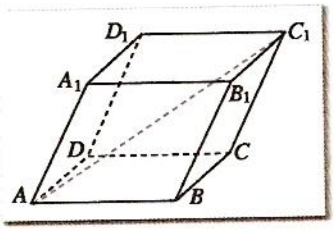
تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى مەسىلىلەرنى تەكشىلىك ۋېكتورىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغاندىكى «ئۈچ باسقۇچلۇق ئۇسۇل» غا ئوخشاش، ستېرېئومېترىيىدىكى مەسىلىلەرنى بوشلۇق ۋېكتورىدىن پايدى-

لىنىپ ھەل قىلىشنىڭ «ئۈچ باسقۇچلۇق ئۇسۇلى» نى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

(1) ستېرېئو شەكىللەر بىلەن بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ باغلىنىشىنى تۇرغۇزۇپ، مەسىلىگە چېتىلىدىغان نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەپ، ستېرېئومېتىرىيىگە دائىر مەسىلىلەرنى ۋېكتورغا دائىر مەسىلىلەرگە ئايلاندۇرۇش؛

(2) ۋېكتور ئەمەللىرىدىن پايدىلىنىپ، نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكلەر ئارىسىدىكى ئورۇن مۇناسىۋىتىنى ۋە ئۇلار ئارىسىدىكى ئارىلىق، ئارا بۇلۇڭ قاتارلىق مەسىلىلەرنى تەتقىق قىلىش؛

(3) ۋېكتورلارنى ھېسابلاش نەتىجىسىنىڭ ماس گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى بېرىش.



3.2.3 ـ رەسىم

1 ـ مىسال. 3.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، بىر كرىستال پاراللېل ئالتە ياقلىق شەكىلدە بولۇپ، ئۇنىڭ A چوققىسى ئۇچ نۇقتا قىلغان ئۈچ قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە بۇ ئۈچ قىرىنىڭ ئارا بۇلۇڭلىرى ئوخشاشلا 60° بولسا، ئۇ ھالدا كرىستالنىڭ مۇشۇ چوققىسىنى ئۇچ نۇقتا قىلغان دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن قىر ئۇزۇنلۇقىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

تەھلىل: 3.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ قىرلىرى ئارىسىدا پاراللېللىق مۇناسىۋەت بولغانلىقتىن، ھەرقايسى قىرلارنى A نى باش نۇقتا قىلغان ئۈچ ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. مىسالدا بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، بۇ ئۈچ ۋېكتورنىڭ مودۇلىنى ئوخشاشلا 1 گە تەڭ دەپ پەرەز قىلىمىز. AC_1 دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىش ئۈچۈن، $\overrightarrow{AC_1}$ نى قىرلارغا مۇناسىۋەتلىك ۋېكتور بىلەن ئىپادىلىۋېلىش كېرەك.

بوشلۇقتىكى ئىككى نۇقتا ئارىسىدىكى ئارىلىقنى بۇ ئىككى نۇقتىنى باش نۇقتا ۋە ئاخىرقى نۇقتا قىلغان ۋېكتورنىڭ مودۇلى بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ۋېكتور $\boldsymbol{u}$ نىڭ مودۇلى مۇناسىۋەت ئىپادىسى $|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^2$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ.

ستېرېئومېتىرىيىدە، ئارىلىققا دائىر مەسىلىلەرنى كۆپ ھاللاردا بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ.

يېشىش: 3.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، $AB=AA_1=AD=1$، $\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60^\circ$ دەپ پەرەز قىلىمىز.

ۋېكتور مەسىلىسىگە ئايلاندۇرىمىز

ۋېكتورلارنى قوشۇش قائىدىسىگە ئاساسەن،

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}.$$

ۋېكتور ئەمىلىنى بېجىرىمىز

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1}^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2\\&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+\\&\quad 2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1})\\&=1+1+1+2(\cos 60^\circ+\cos 60^\circ+\cos 60^\circ)\\&=6.\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}.$$

شەكىل مەسىلىسىگە قايتىمىز

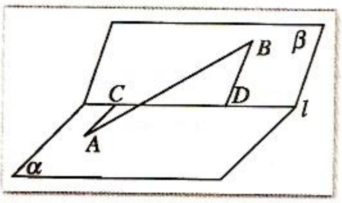
بۇ كرىستالنىڭ AC_1 دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى قىر ئۇزۇنلۇقىنىڭ $\sqrt{6}$ ھەسسىسىگە تەڭ.

مۇلاھىزە ؟

1. يۇقىرىقى مەسىلىدىكى پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ BD_1 دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بىلەن قىر ئۇزۇنلۇقىنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟

2. ئەگەر بىر پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ ھەرقايسى قىر ئۇزۇنلۇقلىرى ئۆزئارا تەڭ ھەم مەلۇم بىر چوققىنى ئۇچ قىلغان قىرلارنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئوخشاشلا α گە تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا بۇ پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقىغا ئاساسەن قىر ئۇزۇنلۇقىنى ئېنىقلىغىلى بولامدۇ؟

3. بۇ مەسىلىدىكى كرىستالنىڭ قارىمۇقارشى ئىككى يېقىنىڭ ئارىلىقى قانچە بولىدۇ؟ (كۆرسەتمە: ئىككى پاراللېل تەكشىلىكنىڭ ئارىلىقىنى تېپىش ئادەتتە ئىككى نۇقتىنىڭ ئارىلىقىنى تېپىشقا يىغىنچاقلىنىدۇ)



4.2.3 - رەسىم

2 - مىسال. 4.2.3 - رەسىمدىكىدەك، «ئا» بېكەتنىڭ ئورنى سۇ ئامبىرىنىڭ ئاستى يۈزى ياتقان تەكشىلىكتىكى A نۇقتىدا، «ب» بېكەتنىڭ ئورنى توسمىنىڭ يان يۈزىدىكى B نۇقتىدا. B، A دىن l تۈز سىزىق (ئامبارنىڭ ئاستى يۈزى بىلەن توسمىنىڭ كېسىشىش سىزىقى) قىچە بولغان ئارىلىق AC ۋە BD نىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم - ئايرىم a ۋە b، CD نىڭ ئۇزۇنلۇقى c، AB نىڭ ئۇزۇنلۇقى d بولسا، ئامبارنىڭ ئاستى يۈزى بىلەن توسمىدىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ كوسىنوس قىممىتىنى تاپايلى.

تەھلىل: تاپماقچى بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى دەل 4.2.3 - رەسىمدىكى AC، BD تۈز سىزىقلاردىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ياكى ئۇنىڭ تولدۇرغۇچى بۇلۇڭى بولىدۇ (ئويلاپ بېقىڭ، نېمە ئۈچۈن؟). شۇڭا، بىز ئاۋۋال مىسالدا بېرىلگەن شەرتكە ئاساسەن، AC ۋە BD كېسىكىنىڭ يۆنىلىشىنى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلىۋالىمىز، ئاندىن بۇ بۇلۇڭنى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىدىن پايدىلىنىپ تاپىمىز.

يېشىش: 4.2.3 - رەسىمدىكىدەك، $AC=a$، $BD=b$، $CD=c$، $AB=d$.

ۋېكتور مەسىلىسىگە ئايلاندۇرىمىز

ۋېكتورلارنى قوشۇش قائىدىسىگە ئاساسەن،

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}.$$

ۋېكتور ئەمەلىنى بېجىرىمىز

$$d_2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})^2$$
$$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DB}^2+2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB})$$
$$=a^2+c^2+b^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$$
$$=a^2+c^2+b^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=a^2+b^2+c^2-d^2.$$

ۋېكتور $\overrightarrow{CA}$ بىلەن $\overrightarrow{DB}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭىنى θ دەپ پەرەز قىلساق، θ ئامبارنىڭ ئاستى يۈزى بىلەن توسمىدىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ بولىدۇ.

$$\therefore\ 2ab\cos\theta=a^2+b^2+c^2-d^2.$$

ستېرېئومېترىيىدىكى ئارا بۇلۇڭلارنى ھامان ئىككى ۋېكتورنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا ئايلاندۇرۇۋېلىشقا بولىدۇ. ۋېكتور $\boldsymbol{u}$ ۋە $\boldsymbol{v}$ نىڭ ئارا بۇلۇڭى θ مۇناسىۋەت ئىپادىسى $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ.

ستېرېئومېترىيىدە، ئارا بۇلۇڭغا دائىر مەسىلىلەرنى كۆپ ھاللاردا بوشلۇقتىكى ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ.

$\therefore \cos\theta=\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ab}$.

شەكىل مەسىلىسىگە قايتىمىز

ئامبارنىڭ ئاستى يۈزى بىلەن توسمىدىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتى $\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ab}$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

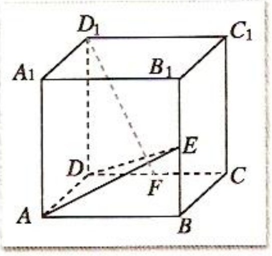
1. ئەگەر يۇقىرىقى مىسالدا AB نامەلۇم بولۇپ، ئارا بۇلۇڭ θ نى ئۆلچىگىلى بولسا ھەم قالغان شەرتلەر ئۆزگەرمىسە، AB نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاپ چىقىشقا بولامدۇ؟

2. ئەگەر بىر پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ ھەرقايسى قىرلىرىنىڭ ۋە بىر دىئاگونالىنىڭ ئۇزۇنلۇقى بېرىلسە ھەم ئۇنىڭ ئوخشاش بىر چوققىنى ئۇچ نۇقتا قىلغان ھەرقايسى قىرلىرىنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئۆزئارا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا ھەرقايسى قىرلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى ئېنىقلىغىلى بولامدۇ؟

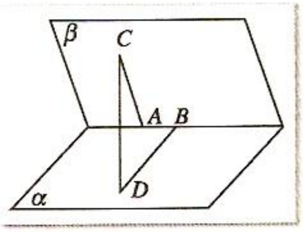
3. ئەگەر بىر پاراللېل ئالتە ياقلىقنىڭ ھەرقايسى قىرلىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا a غا تەڭ ھەم ئۇنىڭ مەلۇم بىر چوققىنى ئۇچ نۇقتا قىلغان ھەرقايسى قىرلىرىنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئوخشاشلا θ غا تەڭ بولسا، ئۇ ھالدا قوشنا ئىككى ياقنىڭ ئارا بۇلۇڭىنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى ئېنىقلىغىلى بولامدۇ؟

مەشىق

1. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، F، E لار ئايرىم ـ ئايرىم CD، BB_1 لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، ADE تەكشىلىك $\perp D_1F$ نى ئىسپاتلاڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

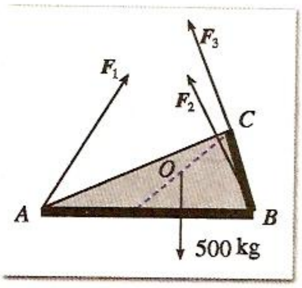


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، B، A لار $60°$ لۇق ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ قىرى ئۈستىدىكى ئىككى نۇقتا بولۇپ، تۈز سىزىق BD، AC لار ئايرىم ـ ئايرىم بۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ ئىككى دانە يېرىم تەكشىلىكى ئۈستىدە ياتىدۇ ھەمدە ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسى AB غا تىك، ئەگەر $AB=4$، $AC=6$، $BD=8$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، CD نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.

ئەمدى 1.3 ـ پاراگرافنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلىنى ھەل قىلىمىز.

3 ـ مىسال. 5.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ شەكىللىك بىر پارچە تەكشى پولات تاختىنىڭ ماسسىسى 500 kg بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈچ چوققىسى ئايرىم ـ ئايرىم $\boldsymbol{F}_1$، $\boldsymbol{F}_2$، $\boldsymbol{F}_3$ كۈچلەرنىڭ تەسىرىگە ئۇچرايدۇ، ھەربىر كۈچ بىلەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ شۇ كۈچكە قوشنا بولغان ئىككى تەرىپىنىڭ ئارا



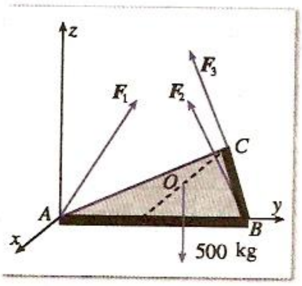
5.2.3 - رەسىم

بۇلۇڭى ئوخشاشلا 60° ھەمدە $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|=200\,\text{kg}$. بۇ پولات تاختا مۇشۇ كۈچلەرنىڭ تەسىرىدە قانداق ھەرىكەت قىلىدۇ؟ بۇ ئۈچ كۈچ كەم دېگەندە قانچىلىك بولغاندا، ئاندىن بۇ پولات تاختىنى كۆتۈرەلەيدۇ؟

تەھلىل: پولات تاختا ئۇچرايدىغان ئېغىرلىق كۈچى 500 kg بولۇپ، ئۈچبۇلۇڭنىڭ مەركىزى O غا تىك ھالدا تەسىر قىلىدۇ. ئەگەر ھەرقايسى چوققىلار ئۇچرىغان $\boldsymbol{F}_1$ ، $\boldsymbol{F}_2$ ، $\boldsymbol{F}_3$ كۈچلەرنى ۋېكتور كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلەپ، بۇ ئۈچ كۈچنىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچىنى تاپالىساقلا، پولات تاختىنىڭ ھەرىكەت ھالىتىگە ھۆكۈم قىلالايمىز.

يېشىش: 6.2.3 - رەسىمدىكىدەك، A نۇقتىنى كوئوردېنات بېشى، تەكشىلىك ABC نى xAy كوئوردېنات تەكشىلىكى، $\overrightarrow{AB}$ نىڭ يۆنىلىشىنى y ئوقىنىڭ ئوڭ يۆنىلىشى، $|\overrightarrow{AB}|$ نى y ئوقىنىڭ بىرلىك ئۇزۇنلۇقى قىلىپ بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى $Axyz$ نى تۇرغۇزساق، ئۇ ھالدا مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭنىڭ چوققىلىرىنىڭ كوئوردېناتى ئايرىم - ئايرىم

$$A(0,\ 0,\ 0),\quad B(0,\ 1,\ 0),\quad C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right).$$



6.2.3 - رەسىم

$\boldsymbol{F}_1$ كۈچنىڭ يۆنىلىشى ئۈستىدىكى بىرلىك ۋېكتورنىڭ كوئوردېناتىنى $(x,\ y,\ z)$ دەپ پەرەز قىلساق، $\boldsymbol{F}_1$ بىلەن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ لارنىڭ ئارا بۇلۇڭى ئوخشاشلا 60° بولغانلىقتىن، ۋېكتورلارنىڭ سكالىيار كۆپەيتمىسى ئەمەلىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=(x,\ y,\ z)\cdot(0,\ 1,\ 0), \qquad ①$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=(x,\ y,\ z)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right). \qquad ②$$

①، ② لەرنى يېشىپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$x=-\sqrt{\frac{1}{12}},\quad y=\frac{1}{2}.$$

ۋېكتور $(x,\ y,\ z)$ نىڭ بىرلىك ۋېكتور ئىكەنلىكىگە دىققەت قىلساق، $x^2+y^2+z^2=1$ بولىدۇ، شۇڭا

$$z=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$\boldsymbol{F}_3$ ۋە $\boldsymbol{F}_2$ نى كونكرېت ھېسابلاپ، ۋېكتورنى كوئوردېنات ئارقىلىق ئىپادىلەش بىلەن ۋېكتور ئەمەللىرىنىڭ قۇلايلىق تەرەپلىرىنى ھېس قىلىڭ.

$$\therefore\ \boldsymbol{F}_1=200\left(-\sqrt{\frac{1}{12}},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

ئوخشاش يول بىلەن، تۆۋەندىكىلەرنى تاپالايمىز:

$$\boldsymbol{F}_2=200\left(-\sqrt{\frac{1}{12}},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$\boldsymbol{F}_3=200\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

شۇنىڭ بىلەن، بۇ ئۈچ كۈچنىڭ تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچى:

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$$
$$=200\left[\left(-\sqrt{\frac{1}{12}},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\left(-\sqrt{\frac{1}{12}},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\ 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right].$$
$$=200(0,\ 0,\ \sqrt{6}\,),$$

بۇ، پولات تاختىغا تەسىر قىلغان تەڭ تەسىر قىلغۇچى كۈچنىڭ يۆنىلىشى يۇقىرىغا قارايدىغانلىقى، ئۇنىڭ چوڭلۇقى $200\sqrt{6}$ kg بولۇپ، تەسىر قىلىش نۇقتىسى O ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرىدۇ.

$$200\sqrt{6}<500$$

بولغانلىقتىن، پولات تاختا مىدىرلىماي تىنچ ھالەتتە تۇرىدۇ.

بۇ پولات تاختىنى كۆتۈرۈش ئۈچۈن، $|F_1|$، $|F_2|$، $|F_3|$ لەرنى ئوخشاشلا x دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$\sqrt{6}\,x>500$$

بولۇشى كېرەك، بۇنى يەشسەك:

$$x>\frac{500}{\sqrt{6}}.$$

بۇ يېشىش ئۇسۇلىدا، تارماق كۈچ F_1، F_2، F_3 لەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتور كۆرۈنۈشىدە ئىپادىلىۋېلىش مۇھىم ھالقا بولۇپ، ۋېكتور ئەمەلى بىلەن ۋېكتورنى كوئوردىنات ئارقىلىق ئىپادىلەشنى ئۆزئارا بىرلەشتۈرۈش مەسىلىنى ھەل قىلىشىمىزغا قۇلايلىق يارىتىپ بەردى.

شۇڭا، بۇ پولات تاختىنى كۆتۈرۈش ئۈچۈن، $|F_1|$، $|F_2|$، $|F_3|$ لەرنىڭ ھەربىرى $\frac{500}{\sqrt{6}}$ kg دىن چوڭ بولۇشى كېرەك.

ئىزدىنىش

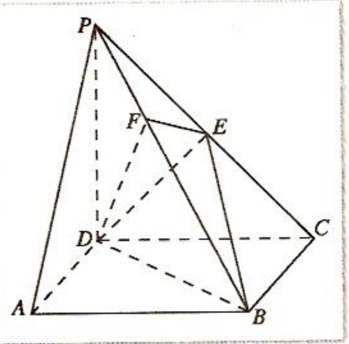
بۇ مەسىلىنى كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزماي قانداق ھەل قىلىش كېرەك؟

4 ـ مىسال. 7.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، تۆت قىرلىق پىرامىدا $P-ABCD$ نىڭ $ABCD$ ئاساسى كۋادرات، يان قىرى PD ئاساسى $ABCD$ غا تىك، $PD=DC$، E نۇقتا PC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، $EF \perp PB$ بولۇپ، ئۇ PB بىلەن F نۇقتىدا كېسىشىدۇ.

(1) PA // تەكشىلىك EDB نى ئىسپاتلايلى؛

(2) $PB \perp$ تەكشىلىك EFD نى ئىسپاتلايلى؛

(3) ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $C-PB-D$ نىڭ گرادۇس سانىنى تاپايلى.

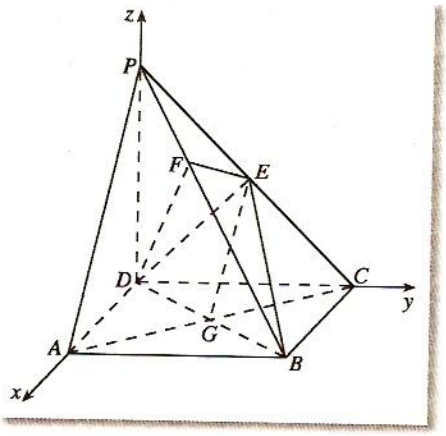


7.2.3 ـ رەسىم

تەھلىل: بۇ مىسالنى يېشىشتە تۈز سىزىق بىلەن تەكشىلىكنىڭ پاراللېللىقى ۋە تىكلىكىگە ھۆكۈم قىلىش ۋە ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانىنى ھېسابلىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ. بۇ مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ. مىسالدا تۆت قىرلىق پىرامىدانىڭ ئاساسى كۋادرات، ئۇنىڭ بىر يان قىرى ئاساسىغا تىك دەپ بېرىلگەنلىكتىن، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ ۋېكتورنى ئىپادىلىسەك ناھايىتى مۇۋاپىق بولىدۇ.

يېشىش: 8.2.3 ـ رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇپ، D نۇقتىنى كوئوردىنات بېشى قىلىپ ئالىمىز ھەم $DC=1$ دەپ پەرەز قىلىمىز.

(1) **ئىسپات:** A بىلەن C نى تۇتاشتۇرساق، AC بىلەن BD ئۆزئارا G نۇقتىدا كېسىشىدۇ، يەنە E



8.2.3 - رەسىم

بىلەن G نى تۇتاشتۇرىمىز.

مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن $A(1, 0, 0)$، $P(0, 0, 1)$، $E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ لارغا ئېرىشىمىز.

ئاساس $ABCD$ كۋادرات بولغانلىقى ئۈچۈن، G نۇقتا بۇ كۋادراتنىڭ مەركىزى بولىدۇ، شۇڭا G نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ھەمدە

$$\overrightarrow{PA}=(1, 0, -1), \overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

شۇڭا $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$، يەنى $PA \mathbin{/\!/} EG$.

EDB تەكشىلىك $\supset EG$ ھەمدە EDB تەكشىلىك $\not\supset PA$ بولغاچقا، EDB تەكشىلىك $\mathbin{/\!/} PA$ بولىدۇ.

(2) **ئىسپات:** مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن $B(1, 1, 0)$، $\overrightarrow{PB}=(1, 1, -1)$ غا ئېرىشىمىز.

يەنە $\overrightarrow{DE}=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$، شۇڭا

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DE}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

$\therefore PB \perp DE.$

بېرىلگەن شەرت $PB \perp EF$ ھەمدە $EF \cap DE=E$ گە ئاساسەن، EFD تەكشىلىك $\perp PB$ كە ئېرىشىمىز.

(3) **يېشىش:** $PB \perp EF$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، (2) دىن $PB \perp DF$ نى بىلىشكە بولىدۇ، شۇڭا $\angle EFD$ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $C-PB-D$ نىڭ سىزىقلىق بۇلۇڭى بولىدۇ.

F نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى (x, y, z) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{PF}=(x, y, z-1)$ بولىدۇ.

$\because \overrightarrow{PF}=k\overrightarrow{PB},$

$\therefore (x, y, z-1)=k(1, 1, -1)=(k, k, -k),$

يەنى $x=k$، $y=k$، $z=1-k$.

$\because \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DF}=0,$

$\therefore (1, 1, -1) \cdot (k, k, 1-k)=k+k-1+k=3k-1=0.$

شۇڭا، $k=\frac{1}{3}$ بولۇپ، F نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ بولىدۇ.

E نۇقتىنىڭ كوئوردىناتى $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ بولغانلىقتىن،

$$\overrightarrow{FE}=\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

$$\because \cos \angle EFD=\frac{\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}||\overrightarrow{FD}|}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن $\angle EFD=60^\circ$ ، يەنى ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $C-PB-D$ نىڭ گرادۇس سانى 60° بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

4 · 1 - مىسالدىكى ئۇسۇلدا كوئوردىنات ئۇسۇلى بىلەن ۋېكتور ئۇسۇلىنىڭ قانداق بىرلەشتۈرۈلگەنلىكىنى، كوئوردىنات سىستېمىسىنى تۇرغۇزۇشنىڭ مەسىلىنى يېشىشتە قانداق رول ئوينايدىغانلىقىنى ھېس قىلىڭ.

4 · 2 - مىسالنى سىنتېز ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ قانداق يېشىش كېرەك؟ سىنتېز ئۇسۇلى بىلەن 4 - مىسالدىكى ئۇسۇلنى سېلىشتۇرۇپ بېقىڭ.

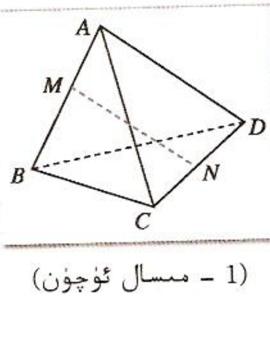
بۇ پاراگرافتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى ھەققىدە بەلگىلىك تونۇشقا ئىگە بولدىڭىزمۇ؟ دەرسلىكتە كەلتۈرۈلگەن مىساللار ۋە تۆۋەندىكى رامكىلىق سخېمىغا بىرلەشتۈرۈپ، چۈشەنچىڭىزنى سۆزلەپ بېرىڭ.

ستېرېئو شەكىللەردىكى نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىك قاتارلىق ئېلېمېنتلارنى بوشلۇقتىكى ۋېكتور بىلەن ئىپادىلەش ← بوشلۇقتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدە ئەمەل بېجىرىپ، نۇقتا، تۈز سىزىق ۋە تەكشىلىك ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى تەتقىق قىلىش ← ھېسابلاش نەتىجىسىنىڭ ماس گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى بېرىش

ستېرېئومېترىيىدىكى مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا، سىنتېز ئۇسۇلى، ۋېكتور ئۇسۇلى، كوئوردىنات ئۇسۇلىدىن ئىبارەت ئۈچ خىل ئۇسۇلنى قوللىنىشقا بولىدۇ. بۇ ئۇسۇللارنىڭ ھەرقايسىسىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

سىنتېز ئۇسۇلىدا مەسىلىلەرنى لوگىكىلىق خۇلاسە چىقىرىشنى قورال قىلىپ ھەل قىلىمىز؛ ۋېكتور ئۇسۇلىدا مەسىلىلەرنى ۋېكتور ئۇقۇمى ۋە ۋېكتور ئەمىلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىمىز، مەسىلەن، مۇشۇ پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 1 -، 2 - مىساللار؛ كوئوردىنات ئۇسۇلىدا مەسىلىلەرنى سان ۋە سانلارنى ھېسابلاشتىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىمىز؛ كوئوردىنات ئۇسۇلىنى كۆپ ھاللاردا ۋېكتور ئەمىلى بىلەن بىرلەشتۈرۈپ قوللىنىمىز، مەسىلەن، مۇشۇ پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 3 - مىسالدىكى كونكرېت مەسىلىنى يېشىشتە، مەسىلىنىڭ كونكرېت شەرتى ۋە ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن مۇۋاپىق ئۇسۇلنى تاللاش كېرەك.

مەشىق

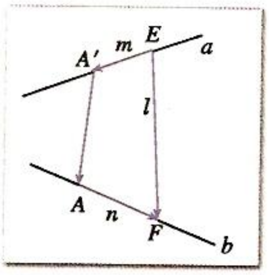


(1 - مىسال ئۈچۈن)

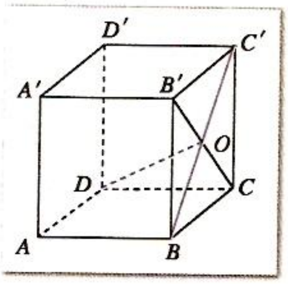
1. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ ھەربىر تەرىپى ۋە BD ، AC لارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا a غا تەڭ بولۇپ، M ، N لار ئايرىم - ئايرىم AB ۋە CD نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، $MN \perp AB$ ، $MN \perp CD$ نى ئىسپاتلاڭ.

2. رەسىمدىكىدەك، ئىككى ئۈچىراشماس تۈز سىزىق a ، b دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ θ بولۇپ، تۈز سىزىق a ، b نىڭ ئۈستىدىن ئايرىم - ئايرىم ($AA' \perp a$ ، $AA' \perp b$) AA' ئۈچىراشماس تۈز سىزىق a ، b نىڭ ئورتاق تىك

سىزىقى دېيىلىدۇ) بولىدىغان قىلىپ A'، E ۋە A، F نۇقتىلار ئېلىنغان ھەمدە $A'E=m$، $AF=n$، $EF=l$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئورتاق تىك سىزىق AA' نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ بېرىلگەن بولۇپ، BC'، CB' لار O نۇقتىدا كېسىشىدۇ، D بىلەن O تۇتاشتۇرۇلغان. $DO\perp BC'$ نى ئىسپاتلاڭ.

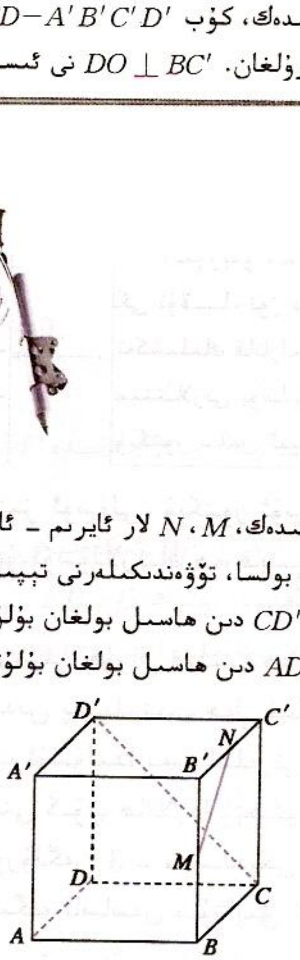
2.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

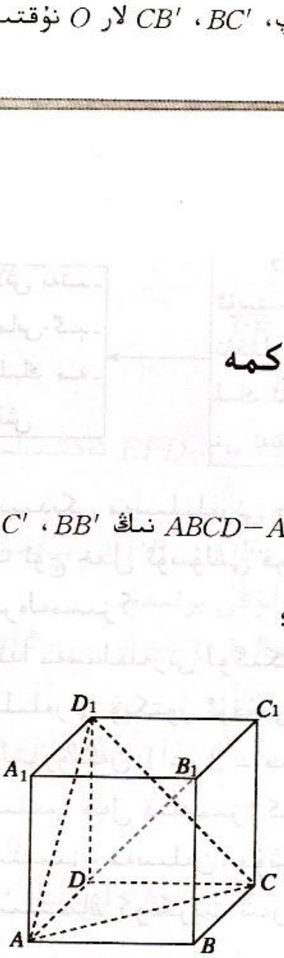
1. رەسىمدىكىدەك، M، N لار ئايرىم ـ ئايرىم كۇب $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ BB'، $B'C'$ قىرلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) MN ۋە CD' دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانى؛

(2) MN ۋە AD دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانى.



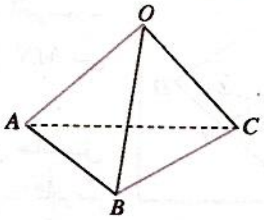
(1 ـ مىسال ئۈچۈن)



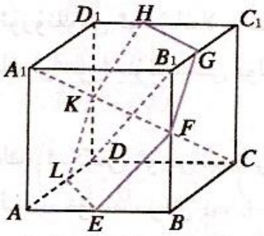
(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ بېرىلگەن. ACD_1 تەكشىلىك $\perp DB_1$ نى ئىسپاتلاڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $OABC$ دا، $OB=OC$، $\angle AOB=\angle AOC=\theta$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. $OA\perp BC$ نى ئىسپاتلاڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E، F، G، H، K، L لار ئايرىم ـ ئايرىم AB، BB_1، B_1C_1، C_1D_1، D_1D، DA قىرلارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

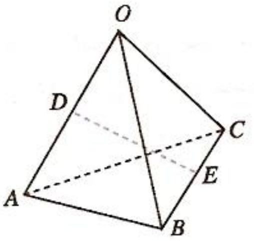
(1) $EFGHKL$ تەكشىلىك $\perp A_1C$ نى ئىسپاتلاڭ؛

(2) DB_1 بىلەن $EFGHKL$ تەكشىلىكتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنۇس قىممىتىنى تېپىڭ.

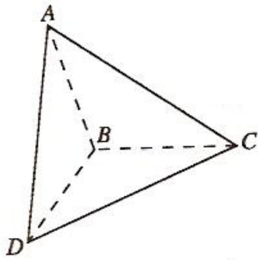
5. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $OABC$ نىڭ ھەرقايسى تەرەپلىرى ۋە AC، BO لارنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا 1 گە تەڭ، D، E لار ئايرىم ـ ئايرىم OA، BC تەرەپلەرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، D بىلەن E تۇتاشتۇرۇلغان.

(1) DE نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ھېسابلاڭ؛

(2) O نۇقتىدىن ABC تەكشىلىككىچە بولغان ئارىلىقنى تېپىڭ.



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)



(6 ـ مىسال ئۈچۈن)

6. $\triangle ABC$ ۋە $\triangle DBC$ ياتقان تەكشىلىكلەر ئۆزئارا تىك ھەمدە $AB=BC=BD$، $\angle CBA=\angle DBC=120°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) AD تۈز سىزىق بىلەن BCD تەكشىلىكتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانى؛

(2) AD تۈز سىزىق بىلەن BC تۈز سىزىقتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانى؛

(3) ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $A-BD-C$ نىڭ كوسىنۇس قىممىتى.

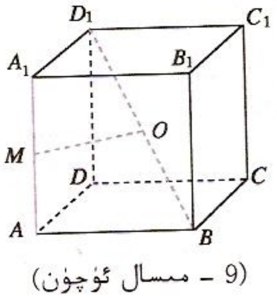
7. $A(1, -2, 0)$ نۇقتا ۋە ۋېكتور $\boldsymbol{a}=(-3, 4, 12)$ بېرىلگەن، ۋېكتور $\overrightarrow{AB} \parallel \boldsymbol{a}$ ھەمدە $|AB|=2|\boldsymbol{a}|$ نى كۆچكە ئىگە قىلىدىغان B نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

8. تەرەپ ئۇزۇنلۇقى $2a$ بولغان $ABCD$ كۋادراتنىڭ مەركىزى O ئارقىلىق $ABCD$ تەكشىلىكنىڭ تىك سىزىقى ئۆتكۈزۈلۈپ، بۇ تىك سىزىق ئۈستىدىن $OV=h$ بولىدىغان قىلىپ V نۇقتا ئېلىنغان، ئاندىن V بىلەن A، V بىلەن B، V بىلەن C، V بىلەن D تۇتاشتۇرۇلۇپ، VC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى E ئېلىنغان.

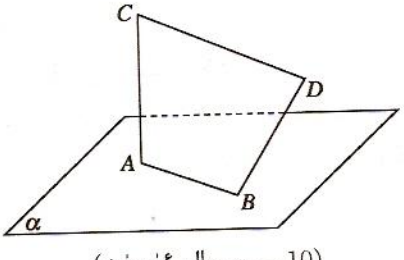
(1) $\cos\langle\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE}\rangle$ نى تېپىڭ؛

(2) ئەگەر $BE \perp VC$ بولسا، $\cos\langle\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE}\rangle$ نى تېپىڭ.

9. رەسىمدىكىدەك، كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ نىڭ قىر ئۇزۇنلۇقى 1، M نۇقتا AA_1 قىرنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، O بولسا BD_1 نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى. OM نىڭ ئۈچراشماس تۈز سىزىق AA_1 ۋە BD_1 نىڭ ئورتاق تىك سىزىقى ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاڭ ھەم OM نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.



(9 ـ مىسال ئۈچۈن)



(10 ـ مىسال ئۈچۈن)

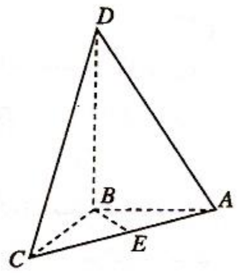
10. رەسىمدىكىدەك، AB كېسىنىك α تەكشىلىكتە ياتىدۇ، $AC \perp \alpha$، $BD \perp AB$ ھەمدە $AB=7$، $AC=BD=24$، $CD=25$. كېسىنىك BD بىلەن α تەكشىلىكتىن هاسىل بولغان بۇلۇڭنى تېپىڭ.

11. تاك ئۈچ قىرلىق پرىزما (يان قىرى ئاساسىغا تىك بولغان ئۈچ قىرلىق پرىزما) $ABO-A'B'O'$ دا، $OO'=4$ ، $OA=4$ ، $OB=3$ ، $\angle AOB=90°$ بولۇپ، D نۇقتا $A'B'$ كېسىكنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، P بولسا يان قىر BB' نىڭ ئۈستىدىكى نۇقتا ھەمدە $OP \perp BD$ بولسا، OP بىلەن AOB ئاساستىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ-نىڭ تانگېنس قىممىتىنى تېپىڭ.

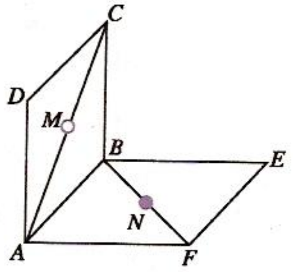
12. بىر كېسىك بىر تىك ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ ئىككى دانە يېرىم تەكشىلىكىنىڭ ئارىلىقىدا بولۇپ، ئۇ-نىڭ بىلەن بۇ ئىككى دانە يېرىم تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭلار ئوخشاشلا $30°$ لۇق بۇلۇڭ بولسا، بۇ كېسىك بىلەن مۇشۇ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ قىرىدىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. رەسىمدىكىدەك، تۆت ياقلىق $DABC$ دا، AB ، BC ، BD لار ئىككى - ئىككىدىن تىك ھەمدە $AB=BC=2$ ، E نۇقتا AC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى؛ θ بولسا ئۇچراشماس تۈز سىزىق AD ۋە BE دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭ ھەمدە $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$. تۆت ياقلىق $DABC$ نىڭ ھەجمىنى تېپىڭ.



(1 - مىسال ئۈچۈن)



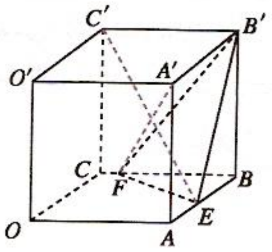
(2 - مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكى تەجرىبە قۇرۇلمىسىدا، كۋادرات شەكىللىك رامكىنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1 ھەمدە $ABCD$ تەكشىلىك بىلەن $ABEF$ تەكشىلىك ئۆزئارا تىك. ھەرىكەتچان شارىك M ، N لار ئايرىم - ئايرىم كۋادراتنىڭ AC ۋە BF دىئاگونالى ئۈستىدە يۆتكىلىدۇ ھەمدە ئىككى شارنىڭ يۆتكىلىش جەريانىدا CM ، BN لارنىڭ ئۇزۇن-لۇقى باشتىن - ئاخىر تەڭ بولىدۇ، بۇ ئۇزۇنلۇق $CM=BN=a$ ($0<a<\sqrt{2}$) دەپ خاتىرىلەنگەن.

(1) MN نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ؛

(2) a قانداق قىممەتنى ئالغاندا، MN نىڭ ئۇزۇنلۇقى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟

(3) MN نىڭ ئۇزۇنلۇقى ئەڭ كىچىك بولغان چاغدىكى MNA تەكشىلىك بىلەن MNB تەكشىلىكتىن ھا-سىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ كوسىنوس قىممىتىنى تېپىڭ.



(3 - مىسال ئۈچۈن)

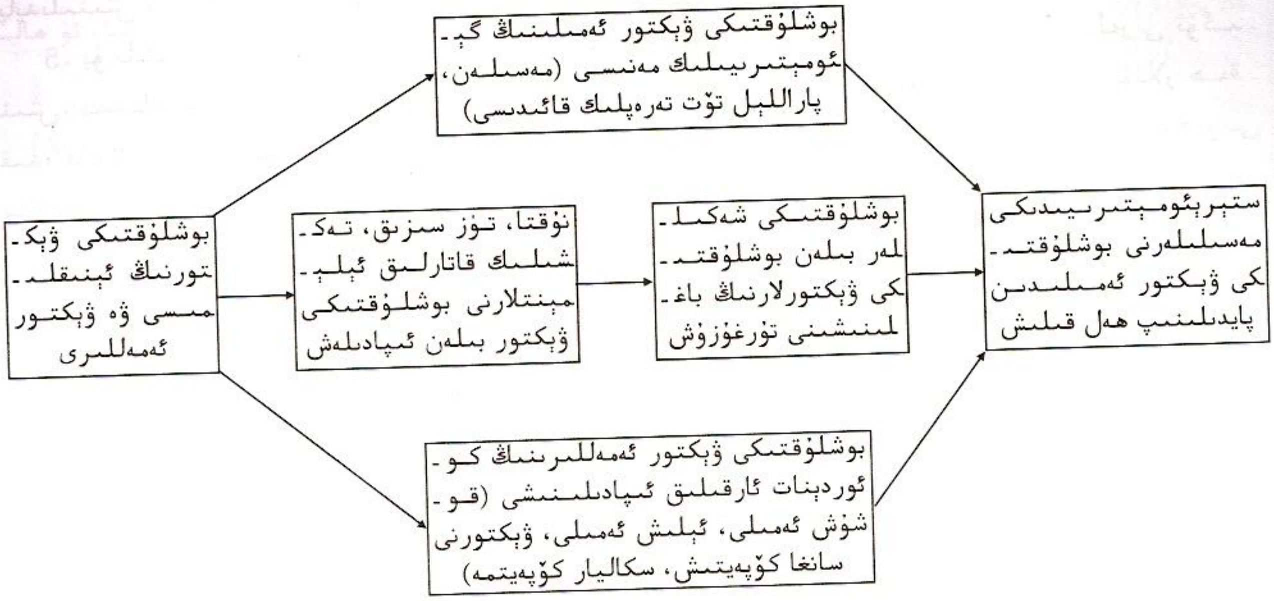
3. رەسىمدىكىدەك، قىر ئۇزۇنلۇقى a بولغان كۇب $OABC-O'A'B'C'$ دا، E ، F لار ئايرىم - ئايرىم AB ، BC قىرلارنىڭ ئۈستىدىكى ھەرىكەتچان نۇقتا ھەمدە $AE=BF$.

(1) $A'F \perp C'F$ نى ئىسپاتلاڭ؛

(2) ئۈچ قىرلىق پىرامىدا $B'-BEF$ نىڭ ھەجمى ئەڭ چوڭ قىممەت ئالغان چاغدىكى ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $B'-EF-B$ نىڭ تانگېنس قىممىتىنى تېپىڭ.

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. بوشلۇقتىكى ۋېكتور تەكشىلىكتىكى ۋېكتورنىڭ كېڭەيتىلىشىدىن بارلىققا كەلگەنلىكى ئۈچۈن، ئۇنىڭ بىلەن تەكشىلىكتىكى ۋېكتور نۇرغۇنلىغان ئورتاق خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە. ئەگەر تەكشىلىكنى ئىككى ئۆلچەملىك بوشلۇق، ئادەتتىكى بوشلۇقنى ئۈچ ئۆلچەملىك بوشلۇق دەپ قارىساق، ئۇ ھالدا ۋېكتور ئۇقۇمىنى توۋت ئۆلچەملىك (مەسىلەن، «ئۇزۇنلۇق»، «كەڭلىك»، «ئېگىزلىك»، «ۋاقىت» قاتارلىق توۋت ئۆلچەمدىن ھاسىل قىلىنغان بوشلۇق)، بەش ئۆلچەملىك.... قاتارلىق «بوشلۇق» لارغا كېڭەيتىشكە بولامدۇ؟

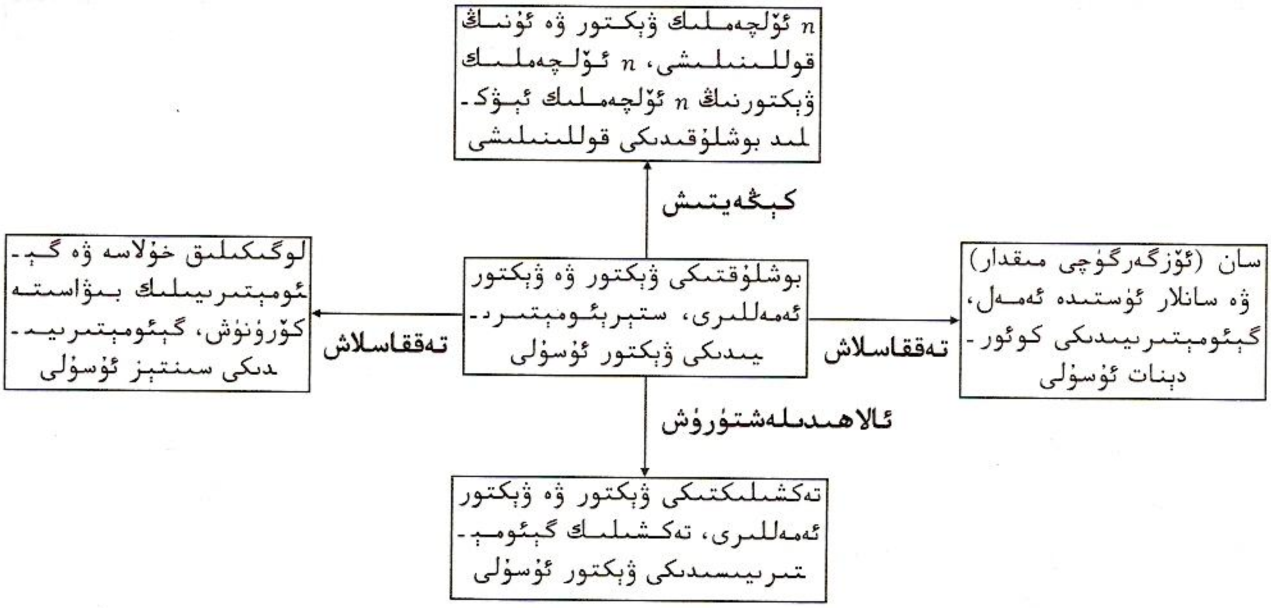
2. بوشلۇق ۋېكتورلىرى ئۈستىدىكى ئەمەل قائىدىسى گېئومېترىيىلىك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ كىرگۈزۈلگەن، مەسىلەن، ۋېكتورلارنى قوشۇشنىڭ پاراللېل توۋت تەرەپلىك قائىدىسى دېگەندەك. بوشلۇقتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، گېئومېترىيىلىك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ كىرگۈزۈلگەن ۋېكتور ئەمىلىنى يەنە ئالگېبرالىق ئەمەل (ھەقىقىي سانلار ئۈستىدە ئەمەل) گە ئايلاندۇرۇۋېلىشقا بولىدۇ. سىز بۇنىڭ بوشلۇقتىكى ۋېكتورلار ئۈستىدە ئەمەل بېجىرىشىمىزگە ئېلىپ كېلىدىغان قولايلىق تەرەپلىرىنى ھېس قىلالامسىز؟

3. ساۋاقداشلار سانلار ئۈستىدە ئەمەل بېجىرىشكە ئادەتلەنگەن، ۋېكتور سانغا ئوخشاش بولمىسىمۇ، لېكىن ئۇنىڭدىمۇ بىر ئەمەل سىستېمىسىنى ھاسىل قىلىشقا بولىدۇ، شۇڭا ۋېكتورنى «سان، مىقدار، ئەمەل» نىڭ تەرەققىيات تۇرغۇسىدىن چىقىپ چۈشىنىش كېرەك. سانلار ئۈستىدىكى ئەمەل قانۇنلىرىنىڭ قايسىلىرى ۋېكتور ئەمىلىگە نىسبەتەن يەنىلا كۈچكە ئىگە؟ قايسىلىرى كۈچكە ئىگە ئەمەس؟

4. ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشتا، ئالدى بىلەن نۇقتا، تۈز سىزىق، تەكشىلىكنىڭ بوشلۇقتىكى ئورنى ۋە ئۇلار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بوشلۇق-

تىكى ۋېكتوردىن پايدىلىنىپ قانداق ئىپادىلەش ئۇستىدە ئىزدىنىش كېرەك. باشقىچە ئېيتقاندا، ستېرېئو شەكىل بىلەن ۋېكتور ئارىسىدىكى باغلىنىشنى تۇرغۇزۇۋېلىپ، ئاندىن ستېرېئومېترىيىلىك مەسىلىلەرنى بوشلۇقتىكى ۋېكتور مەسىلىسىگە ئايلاندۇرۇش كېرەك. بۇ بابتىكى بىلىملەرنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ستېرېئومېترىيىدىكى ۋېكتور ئۇسۇلى ھەققىدە قانداق تونۇشقا ئىگە بولدىڭىز؟ تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرىدا بېرىلگەن كونكرېت مىساللارغا بىرلەشتۈرۈپ، چۈشەنچىڭىزنى سۆزلەپ بېقىڭ.

5. بۇ بابتىكى بىلىملەرنى ئۆگىنىش جەريانىنى ئەسلەڭ، ماتېماتىكىلىق يېڭى بىلىملەرنى ئۆگىنىش، مەسىلىلەرنى ماتېماتىكىلىق بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشتىكى ئىدىيە ۋە ئۇسۇللار ھەققىدە قانداق تونۇشقا ئىگە بولدىڭىز؟ تۆۋەندىكى لوگىكىلىق سخېمىغا بىرلەشتۈرۈپ، چۈشەنچىڭىزنى سۆزلەپ بېقىڭ.



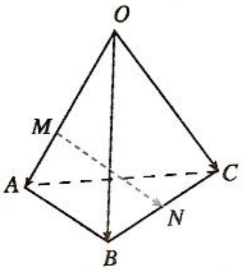
تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

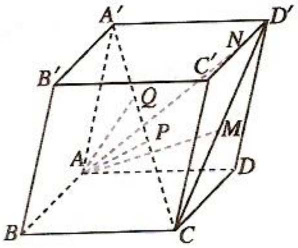
1. رەسىمدىكىدەك، بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $OABC$ دا، $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. ئەگەر M نۇقتا OA ئۈستىدىكى نۇقتا ھەمدە $OM=2MA$ بولۇپ، N نۇقتا BC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، ئۇ ھالدا $\overrightarrow{MN}=($ $)$ بولىدۇ.

(A) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ (B) $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$ (D) $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



(1 – مىسال ئۈچۈن)

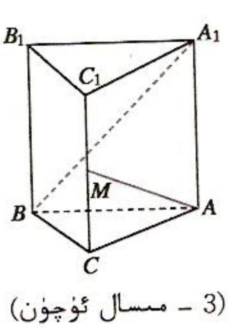


(2 – مىسال ئۈچۈن)

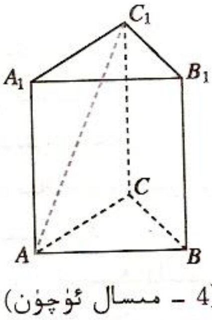
2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A'B'C'D'$ دا، $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$، $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$، $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$ بولۇپ، P، M، N لار ئايرىم - ئايرىم CA'، CD'، $C'D'$ لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، Q نۇقتا CA' نىڭ ئۈستىدىكى نۇقتا ھەمدە $CQ:QA'=4:1$ بولسا، تۆۋەندىكى ۋېكتورلارنى بازىس $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ بىلەن ئىپادىلەڭ.

(1) $\overrightarrow{AP}$; (2) $\overrightarrow{AM}$; (3) $\overrightarrow{AN}$; (4) $\overrightarrow{AQ}$.

3. رەسىمدىكىدەك، تىك ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A_1B_1C_1$ دا، $\angle ABC=90°$، $CB=1$، $CA=2$، $AA_1=\sqrt{6}$ بولۇپ، M نۇقتا CC_1 نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى بولسا، $AM\perp BA_1$ نى ئىسپاتلاڭ.



(3 – مىسال ئۈچۈن)



(4 – مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكىدەك، مۇنتىزىم ئۈچ قىرلىق پرىزما (ئاساسى مۇنتىزىم ئۈچبۇلۇڭ بولغان تىك پرىزما) $ABC-A_1B_1C_1$ نىڭ ئاساسىنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى a، يان قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\sqrt{2}\,a$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) مۇۋاپىق كوئوردىنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇپ، A، B، A_1، C_1 نۇقتىلارنىڭ كوئوردىناتىنى يېزىڭ؛

(2) AC_1 بىلەن يان ياق ABB_1A_1 دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنى تېپىڭ.

5. بوشلۇقتا $A(0, 2, 3)$، $B(-2, 1, 6)$، $C(1, -1, 5)$ ئۈچ نۇقتا بېرىلگەن.

(1) AB، AC لارنى تەرەپ قىلغان پاراللېل تۆت تەرەپلىكنىڭ يۈزىنى تېپىڭ؛

(2) ئەگەر $\boldsymbol{a}$ ۋېكتور ئايرىم - ئايرىم $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غا تىك ھەمدە $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$ بولسا، $\boldsymbol{a}$ نىڭ كوئوردىناتىنى تېپىڭ.

6. بوشلۇقتىكى ئىككى بىرلىك ۋېكتور $\overrightarrow{OA}=(m, n, 0)$، $\overrightarrow{OB}=(0, n, p)$ بىلەن ۋېكتور $\overrightarrow{OC}=(1, 1, 1)$ نىڭ ئارا بۇلۇڭلىرى ئوخشاشلا $\frac{\pi}{4}$ گە تەڭ بولسا، $\cos\angle AOB$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

7. ۋېكتور $\boldsymbol{a}=(1, 1, 0)$، $\boldsymbol{b}=(-1, 0, 2)$ ھەمدە $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ بىلەن $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ نىڭ ئۆزئارا تىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا $k=$(　　) بولىدۇ.

(A) 1　　(B) $\frac{1}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{7}{5}$

8. $\boldsymbol{a}=(1-t, 2t-1, 0)$، $\boldsymbol{b}=(2, t, t)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، ئۇ ھالدا $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ نىڭ ئەڭ كىچىك قىممىتى (　　) بولىدۇ.

(A) $\sqrt{5}$　　(B) $\sqrt{6}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

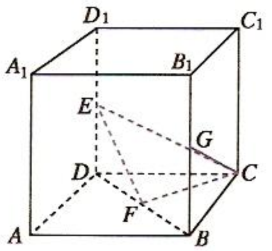
9. مۇنتىزىم ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A_1B_1C_1$ نىڭ يان قىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقى 2، ئاساسىنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1 بولۇپ، M نۇقتا BC نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۈز سىزىق CC_1 ئۈستىدىن $MN\perp AB_1$ بولىدىغان قىلىپ بىر N نۇقتىنى تېپىڭ.

10. رەسىمدىكىدەك، قىر ئۇزۇنلۇقى 1 بولغان كۇب $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E، F، G لار ئايرىم - ئايرىم DD_1، BD، BB_1 لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

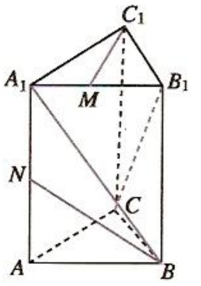
(1) $EF\perp CF$ نى ئىسپاتلاڭ؛

(2) EF بىلەن CG دىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنوس قىممىتىنى تېپىڭ؛

(3) CE نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ.



(10 - مىسال ئۈچۈن)



(11 - مىسال ئۈچۈن)

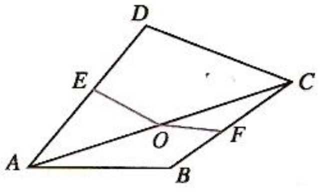
11. رەسىمدىكىدەك، تىك ئۈچ قىرلىق پرىزما $ABC-A_1B_1C_1$ نىڭ ئاساسى ABC دا، $CA=CB=1$، $\angle BCA=90^\circ$، $AA_1=2$ بولۇپ، M، N لار ئايرىم - ئايرىم A_1B_1، A_1A لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) BN نىڭ ئۇزۇنلۇقىنى تېپىڭ؛

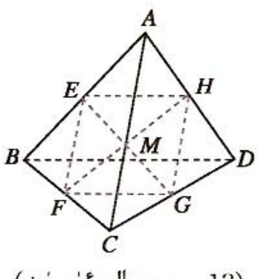
(2) $\cos\langle\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1}\rangle$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(3) $A_1B\perp C_1M$ نى ئىسپاتلاڭ.

12. رەسىمدىكىدەك، كۋادرات شەكىللىك بىر ۋاراق قەغەزنى $ABCD$ نى AC دىئاگونالى بويىچە قاتلاپ ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىنغان، E، F لار ئايرىم - ئايرىم AD، BC لارنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، O نۇقتا ئەسلىدىكى كۋادرات $ABCD$ نىڭ مەركىزى. قاتلانغاندىن كېيىنكى $\angle EOF$ نىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.



(12 - مىسال ئۈچۈن)



(13 - مىسال ئۈچۈن)

13. رەسىمدىكىدەك E، F، G، H لار ئايرىم ـ ئايرىم بوشلۇقتىكى تۆت تەرەپلىك $ABCD$ نىڭ AB، BC، CD، DA تەرەپلىرىنىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) E، F، G، H تۆت نۇقتىنىڭ تەكشىلىكداش بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ؛

(2) BD // تەكشىلىك $EFGH$ نى ئىسپاتلاڭ؛

(3) M نى EG بىلەن FH نىڭ كېسىشىش نۇقتىسى دەپ پەرەز قىلىپ، بوشلۇقتىكى خالىغان بىر O نۇقتىغا نىسبەتەن

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

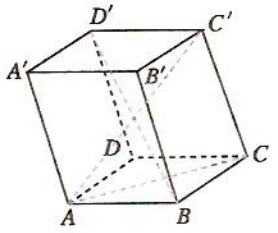
بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

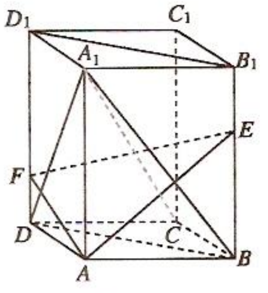
1. رەسىمدىكىدەك، پاراللېل ئالتە ياقلىق $ABCD-A'B'C'D'$ نىڭ ئاساسى $ABCD$ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى a بولغان كۋادرات بولۇپ، يان قىرى AA' نىڭ ئۇزۇنلۇقى b ھەمدە $\angle A'AB=\angle A'AD=120°$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن. تۆۋەندىكىلەرنى تېپىڭ:

(1) AC' نىڭ ئۇزۇنلۇقى؛

(2) تۈز سىزىق BD' بىلەن AC نىڭ ئارا بۇلۇڭىنىڭ كوسىنوس قىممىتى.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

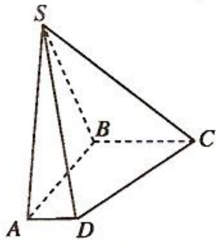


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. رەسىمدىكىدەك، پاراللېلېپىپېد $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ دا، E، F نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم BB_1، DD_1 لەرنىڭ ئۈستىدە ياتىدىغانلىقى ھەمدە $AE\perp A_1B$، $AF\perp A_1D$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) $A_1C\perp$ تەكشىلىك AEF نى ئىسپاتلاڭ؛

(2) $AB=4$، $AD=3$، $AA_1=5$ بولغان چاغدىكى AEF تەكشىلىك بىلەن D_1B_1BD تەكشىلىكتىن ھاسىل بولغان بۇلۇڭنىڭ كوسىنوس قىممىتىنى تېپىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. رەسىمدىكىدەك، تۆت قىرلىق پىرامىدا $S-ABCD$ نىڭ ئاساسى $ABCD$ تىك بۇلۇڭلۇق تراپېتسىيە بولۇپ، $AB\perp AD$، $AB\perp BC$، $ABCD$ ئاساس $\perp SA$ يان قىر، $SA=AB=BC=1$، $AD=0.5$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن.

(1) تۆت قىرلىق پىرامىدا $S-ABCD$ نىڭ ھەجمىنى تېپىڭ؛

(2) SCD ياق بىلەن SAB ياقتىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنىڭ گرادۇس سانىنى تېپىڭ.

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇميۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ، ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈر بويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىشۈن، شۇ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۇ شىگۇيى، ۋاڭ زىكۇن، لياڭ خېڭ، جىن چۇڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش ليۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشېڭ، لى جىلىن، ياڭ خۇەن-مىڭ،گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپى قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور ليۇ شاۋشۆنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ، تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىپ تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم – تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنىستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۈكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك، تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل – پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەردىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن ليۇ يىجۇ، سۇڭ لىلى، لى لۇڭسەي، جاڭ شۇمېي، لى يۇڭ، لى جيەنخۇا، شۇ يۇڭ، لۇ ۋېيچۇەن قاتارلىقلار بار.

بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلەرنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممەيلەن قول تۇتۇشۇپ ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇش خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى.

ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758321

E－mail: zhangjs@pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى

ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرسى ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات – ئېچىش مەركىزى

ISBN 978-7-5370-7295-3

9 787537 072953 >

باھاسى: 8.22 يۈەن