3-1 هاسىلىنىڭ فۇنكسىيە تەتقىقاتىدىكى قوللىنىلىشى

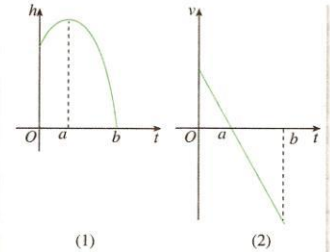
فۇنكسىيە ئوبيېكتىپ دۇنيادىكى ئۆزگىرىش قانۇنىيەتلىرىنى تەسۋىرلەپ بېرىدىغان مۇھىم ماتېما-تىكىلىق مودېلدۇر. فۇنكسىيىنى تەتقىق قىلغاندا، فۇنكسىيىنىڭ ئېشىش ـ كېمىيىشى، ئېشىش ـ كېمىيىشىنىڭ تېز ـ ئاستىلىقى ۋە ئەڭ چوڭ قىممىتى ياكى ئەڭ كىچىك قىممىتى قاتارلىق خۇسۇ-سىيەتلىرىنى ئىگىلەش ناھايىتى مۇھىم. فۇنكسىيىنىڭ بۇ خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق سانلىق مىقدارلارنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى ھەققىدە ئاساسىي چۈشەنچىگە ئىگە بولالايمىز. مۇشۇ باب-نىڭ كىرىش سۆزىدە دېيىلگەندىكىدەك، ئالىملارنىڭ سانلىق مىقدارلارنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى ئۈستىدىكى ئۇزاق مۇددەتلىك تەتقىقاتلىرى دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشىغا سەۋەب بولغان.

تۆۋەندە، فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيەتلىرىنى ھاسىلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىمىز، بۇنىڭدىن ھاسىلىنىڭ فۇنكسىيە تەتقىقاتىدىكى رولىنى ھېس قىلىۋالالايسىز.

1-3-1 فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى ۋە ھاسىلە

كۆزىتىش

1.3.1 - رەسىم (1) دە بېرىلگىنى ئې-گىز سۇپىدىن سۇغا سەكرەش تەنھەرىكەت-چىسىنىڭ سۇ يۈزىدىن ئېگىزلىكى h نىڭ ۋاقىت t غا ئەگىشىپ ئۆزگىرىشىگە دائىر فۇنكسىيە $h(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ نىڭ گرافىكى. 1.3.1 ـ رەسىم (2) دىكىسى بولسا ئېگىز سۇپىدىن سۇغا سەكرەش تەنھەرىكەتچىسىنىڭ تېزلىكى v نىڭ ۋاقىت t غا ئە-گىشىپ ئۆزگىرىشىگە دائىر فۇنكسىيە $v(t)=h'(t)=-9.8t+6.5$ نىڭ گرافىكى.



1.3.1 ـ رەسىم

تەنھەرىكەتچىنىڭ سەكرىگەندىن تارتىپ ئەڭ ئېگىز نۇقتىغا يەتكىچە ۋە ئەڭ ئېگىز نۇقتىدىن سۇغا كىرگىچە بولغان بۇ ئىككى ۋاقىت بۆلىكىدىكى ھەرىكەت ھالىتىدە قانداق پەرق بار؟

گرافىكلارنى كۆزىتىش ئارقىلىق بايقىيالايمىزكى:

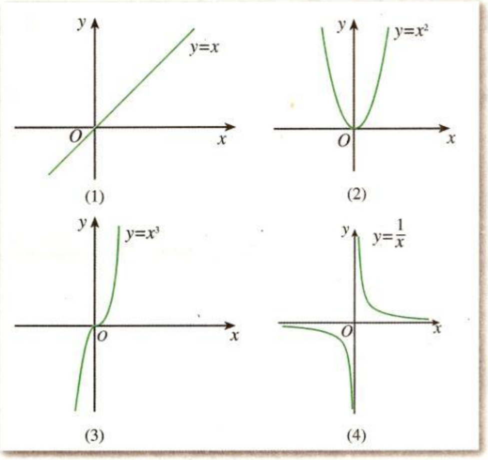
(1) تەنھەرىكەتچى سەكرىگەندىن تارتىپ ئەڭ ئېگىز نۇقتىغا يەتكىچە، ئۇنىڭ سۇ يۈزىدىن ئېگىزلىكى h ۋاقىت t نىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ ئاشىدۇ، يەنى $h(t)$ ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ. بۇنىڭغا ماس ھالدا، $v(t)=h'(t)>0$.

(2) ئەڭ ئېگىز نۇقتىدىن سۇغا كىرگىچە، تەنھەرىكەتچىنىڭ سۇ يۈزىدىن ئېگىزلىكى h ۋاقىت t نىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ كېمىيىدۇ، يەنى $h(t)$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ. بۇنىڭغا ماس ھالدا، $v(t)=h'(t)<0$.

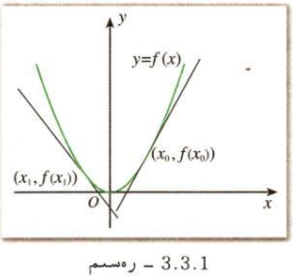
مۇلاھىزە؟

بۇنداق ئەھۋال ئومۇمىيلىققا ئىگىمۇ؟

ئەمدى تۆۋەندىكى فۇنكسىيە گرافىكلىرى (2.3.1 ـ رەسىم)نى كۆزىتىپ، فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى بىلەن ئۇنىڭ ھاسىلىۋى فۇنكسىيىسىنىڭ مۇسبەت ـ مەنپىيلىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى مۇھاكىمە قىلىمىز.



2.3.1 ـ رەسىم



3.3.1 ـ رەسىم

3.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، ھاسىلە $f'(x_0)$ فۇنكسىيە $f(x)$ نىڭ $(x_0, f(x_0))$ نۇقتىدىكى ئۇرۇنمىسىنىڭ يانتۇلۇقىنى ئىپادىلەيدۇ. $x=x_0$ دە، $f'(x_0)>0$ بولۇپ، ئۇرۇنما «سول تۆۋەندىن ئوڭ يۇقىرىغا» يۆنەلگەن شەكىلدە بولىدۇ، بۇ چاغدا $f(x)$ فۇنكسىيە x_0 ئەتراپىدا مونوتون ئاشىدۇ؛ $x=x_1$ دە، $f'(x_1)<0$ بولۇپ، ئۇرۇنما «سول يۇقىرىدىن ئوڭ تۆۋەنگە» يۆنەلگەن شەكىلدە بولىدۇ، بۇ چاغدا، $f(x)$ فۇنكسىيە x_1 ئەتراپىدا مونوتون كېمىيىدۇ.

ئومۇمەن، فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقى بىلەن ئۇنىڭ ھاسىلە فۇنكسىيىسىنىڭ مۇسبەت ـ مەنپىيلىكى ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك

1 ـ باب

مۇناسىۋەت بار:

مەلۇم ئىنتېرۋال (a, b) ئىچىدە، ئەگەر $f'(x)>0$ بولسا، ئۇ هالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيە بۇ ئىنتېرۋال ئىچىدە مونوتون ئاشىدۇ؛ ئەگەر $f'(x)<0$ بولسا، ئۇ هالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيە بۇ ئىنتېرۋال ئىچىدە مونوتون كېمىيىدۇ[1].

[1] ئەگەر مەلۇم ئىنتېرۋال ئىچىدە هامان $f'(x)=0$ بولسا، ئۇ هالدا $f(x)$ فۇنكسىيە قانداق ئالاهىدىلىككە ئىگە بولىدۇ؟

مۇلاهىزە ؟

فۇنكسىينىڭ مونوتونلۇقى هەققىدىكى ئېنىقلىمىنى ئەسلەڭ هەم $y=f(x)$ فۇنكسىينىڭ مەلۇم ئىنتېرۋالدىكى ئوتتۇرىچە ئۆزگىرىش دەرىجىسىنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى بىلەن ئۇنىڭ هاسىلىسىنىڭ مۇسبەت ـ مەنپىيلىكى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئۈستىدە پىكىر يۈرگۈزۈڭ.

1 ـ مىسال. هاسىلىۋى فۇنكسىيە $f'(x)$ هەققىدە تۆۋەندىكى ئۇچۇرلار بېرىلگەن:

$1<x<4$ بولغاندا، $f'(x)>0$ ؛

$x>4$ ياكى $x<1$ بولغاندا، $f'(x)<0$؛

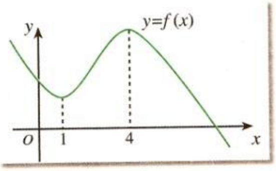
$x=4$ ياكى $x=1$ بولغاندا، $f'(x)=0$.

$f(x)$ فۇنكسىينىڭ گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلىنى سىزايلى.

يېشىش: $1<x<4$ بولغاندا، $f'(x)>0$ بولىدىغانلىقىغا ئاساسەن، $f(x)$ نىڭ بۇ ئىنتېرۋالدا مونوتون ئاشىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز؛

$x>4$ ياكى $x<1$ بولغاندا، $f'(x)<0$ بولىدىغانلىقىغا ئاساسەن، $f(x)$ نىڭ بۇ ئىككى ئىنتېرۋالدا مونوتون كېمىيىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز؛

$x=4$ ياكى $x=1$ بولغاندا، $f'(x)=0$ بولىدۇ، بۇ ئىككى نۇقتا ئالاهىدىرەك بولۇپ، بىز ئۇلارنى «كرىتىك نۇقتا» دەپ ئاتايمىز.



4.3.1 ـ رەسىم

يۇقىرىقىلارنى ئومۇملاشتۇرساق، $f(x)$ فۇنكسىينىڭ گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلى 4.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ مونوتونلۇقىغا هۆكۈم قىلايلى هەمدە ئۇلارنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تاپايلى.

(1) $f(x)=x^3+3x$;

(2) $f(x)=x^2-2x-3$;

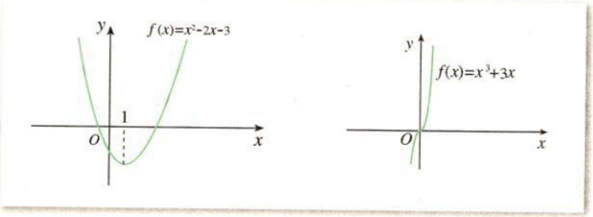
(3) $f(x)=\sin x-x,\ x\in(0,\ \pi)$;

(4) $f(x)=2x^3+3x^2-24x+1$.

يېشىش: (1) $f(x)=x^3+3x$ بولغانلىقتىن،

$$f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)>0.$$

شۇڭا، فۇنكسىيە $f(x)=x^3+3x$ هەقىقىي سانلار توپلىمى $\mathbf{R}$ دا مونوتون ئاشىدۇ، ئۇنىڭ گرافىكى 5.3.1 ـ رەسىم (1) دە كۆرسىتىلدى.



5.3.1 - رەسىم (2)   5.3.1 - رەسىم (1)

(2) $f(x)=x^2-2x-3$ بولغانلىقتىن،

$$f'(x)=2x-2=2(x-1).$$

$f'(x)>0$، يەنى $x>1$ بولغاندا، فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x-3$ مونوتون ئاشىدۇ؛

$f'(x)<0$، يەنى $x<1$ بولغاندا، فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x-3$ مونوتون كېمىيىدۇ.

شۇڭا، فۇنكسىيە $f(x)=x^2-2x-3$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالى $(1, +\infty)$، مونوتون كېمىيىش ئىنتېرۋالى $(-\infty, 1)$ بولىدۇ، ئۇنىڭ گرافىكى 5.3.1 - رەسىم (2) دە كۆرسىتىلدى.

(3) $f(x)=\sin x-x$، $x\in(0, \pi)$ بولغانلىقتىن،

$$f'(x)=\text{________}.$$

شۇڭا، فۇنكسىيە $f(x)=\sin x-x$ ئىنتېرۋال $(0, \pi)$ دا ________ ، ئۇنىڭ گرافىكى 5.3.1 - رەسىم (3) تە كۆرسىتىلدى.

(4) $f(x)=2x^3+3x^2-24x+1$ بولغانلىقتىن،

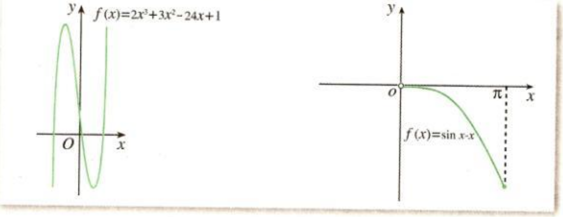
$$f'(x)=\text{________}.$$

$f'(x)>0$، يەنى ________ بولغاندا، فۇنكسىيە $f(x)=2x^3+3x^2-24x+1$ ________؛

$f'(x)<0$، يەنى ________ بولغاندا، فۇنكسىيە $f(x)=2x^3+3x^2-24x+1$ ________.

شۇڭا، فۇنكسىيە $f(x)=2x^3+3x^2-24x+1$ نىڭ مونوتون ئېشىش ئىنتېرۋالى ________، مونوتون كېمىيىش ئىنتېرۋالى ________ بولىدۇ، ئۇنىڭ گرافىكى 5.3.1 - رەسىم (4) تە كۆرسىتىلدى.

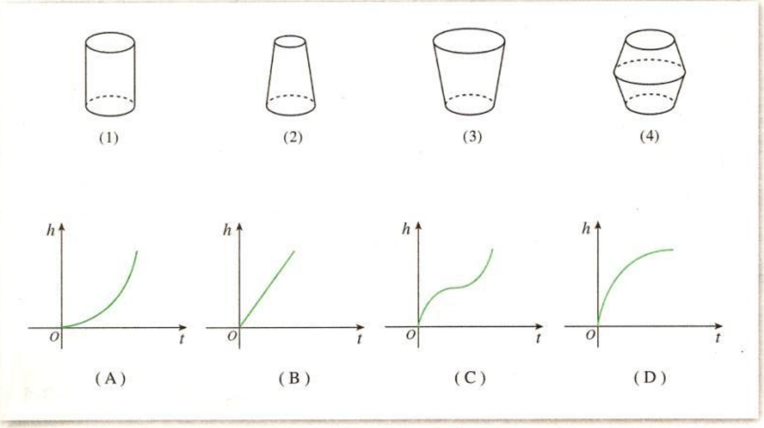
ئەگەر ھاسىلە ئۇسۇلىدىن پايدىلانماي، مونوتونلۇقنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىۋاستە پايدىلىنىش تەلەپ قىلىنسا، بۇ مەسىلىنى قانداق يېشىسىز؟ ھېسابلاش جەريانى مۇرەككەپمۇ؟ بۇنىڭدىن نېمىنى ھېس قىلدىڭىز؟



5.3.1 - رەسىم (4)   5.3.1 - رەسىم (3)

3 - مىسال. 6.3.1 - رەسىمدىكىدەك، سۇ ئاساسىنىڭ يۈزلىرى تەڭ بولغان تۆت قاچىغا مۇقىم تېزلىك (يەنى بىرلىك ۋاقىتلار ئىچىدە قۇيۇلغان سۇنىڭ ھەجىملىرى ئۆزئارا تەڭ) بىلەن قۇيۇلغان

بولسا، ھەربىر قاچىغا ماس كېلىدىغان سۇنىڭ ئېگىزلىكى h بىلەن ۋاقىت t ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەتنىڭ گرافىكىنى تاپايلى.



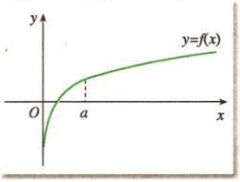
6.3.1 ـ رەسىم

تەھلىل: (2) قاچىنى مىسالغا ئالايلى. بۇ قاچىنىڭ يۇقىرى تەرىپى ئىنچىكە، تۆۋەن تەرىپى توم بولغانلىقتىن، سۇ مۇقىم تېزلىك بىلەن قۇيۇلغاندا، دەسلەپتە ئېگىزلىكنىڭ ئېشىشى ئاستا بولۇپ، كېيىن ئۇنىڭ ئېشىشى بارغانسېرى تېزلىشىدۇ. بۇنى گرافىك بىلەن ئەكس ئەتتۈرسەك، بۇنداق ئۆزگىرىش ئەھۋالىغا (A) ئۇيغۇن كېلىدۇ. قالغان ئۈچ قاچىدىكى ئەھۋالنىمۇ ئوخشاش يول بىلەن بىلىۋېلىشقا بولىدۇ.

يېشىش: (1)←(B)، (2)←(A)، (3)←(D)، (4)←(C)

مۇلاھىزە ؟

3 ـ مىسال شۇنى نامايان قىلىدۇكى، فۇنكسىيە گرافىكىدىن پايدىلىنىپ فۇنكسىيىنىڭ ئېشىشى ۋە كېمىيىشىنىلا ئەمەس، يەنە ئۇنىڭ ئېشىش ـ كېمىيىشىنىڭ تېز ـ ئاستىلىقىنىمۇ كۆرۈۋالغىلى بولىدۇ. گرافىكقا بىرلەشتۈرۈپ، فۇنكسىيىنىڭ ئېشىش ـ كېمىيىشىنىڭ تېز ـ ئاستىلىق ئەھۋالىنى ھاسىلە تۇرغۇسىدىن چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟



7.3.1 ـ رەسىم

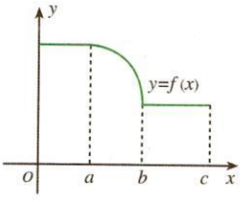
ئومۇمەن، ئەگەر بىر فۇنكسىيىنىڭ ھاسىلىسىنىڭ مۇتلەق قىممىتى مەلۇم دائىرە ئىچىدە چوڭراق بولسا، ئۇ ھالدا فۇنكسىيىنىڭ بۇ دائىرە ئىچىدىكى ئۆزگىرىشى تېز بولۇپ، بۇ چاغدا فۇنكسىيە گرافىكى «تىكرەك» (يۇقىرىغا قاراپ ياكى تۆۋەنگە قاراپ) بولىدۇ؛ ئەكسىچە بولغاندا، فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى «تەكشى» رەك بولىدۇ. مەسىلەن، 7.3.1 ـ رەسىمدە، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $(0, a)$ ئىچىدىكى گرافىكى «تىكرەك»، $(a, +\infty)$ ئىچىدىكى گرافىكى «تەكشى» بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ مونوتونلۇقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=x^2-2x+4$; (2) $f(x)=e^x-x$;

(3) $f(x)=3x-x^3$; (4) $f(x)=x^3-x^2-x$;



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. $y=f(x)$ فۇنكسىيە نىڭ گرافىكى رەسىمدە كۆرسىتىلدى. ھاسىلىۋى فۇنكسىيە $f'(x)$ نىڭ گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلىنى سىزىڭ.

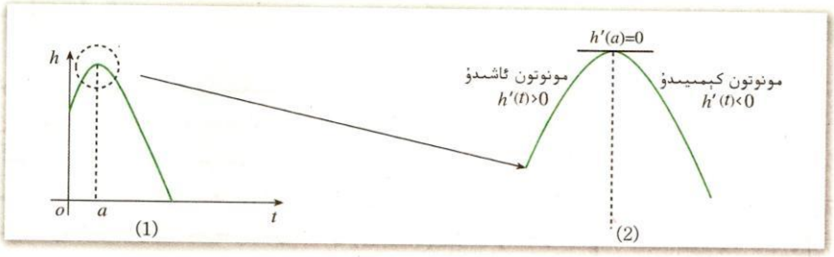
3. ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ نىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى مۇھاكىمە قىلىڭ.

4. فۇنكسىيە $f(x)=2x^3-6x^2+7$ نىڭ (0, 2) ئىچىدە كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

2-3-1 فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتى ۋە ھاسىلە

8.3.1 ـ رەسىم (1) نى كۆزىتىپ، ئېگىز سۇپىدىن سۇغا سەكرەش تەنھەرىكەتچىسىنىڭ سۇ يۈزىدىن ئېگىزلىكى $t=a$ بولغاندا ئەڭ چوڭ بولىدىغانلىقىنى بايقىيالايمىز. ئۇنداق بولسا، $h(t)$ فۇنكسىيىنىڭ مۇشۇ نۇقتىدىكى ھاسىلىسى قانداق بولىدۇ؟ بۇ نۇقتا ئەتراپىدىكى فۇنكسىيە گرافىكى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ بۇنىڭغا ماس ھالدا، ھاسىلىنىڭ ئالامىتىدە قانداق ئۆزگىرىش قانۇنىيىتى بار؟

$h(t)$ فۇنكسىيىنىڭ $t=a$ ئەتراپىدىكى گرافىكىنى 8.3.1 ـ رەسىم (2) دىكىدەك چوڭايتساق، ئۇنىڭدىن تۆۋەندىكىلەرنى كۆرەلەيمىز: $h'(x)=0$ ؛ $t=a$ نىڭ ئەتراپىدا، $t<a$ بولغاندا $h(t)$ فۇنكسىيە مونوتون ئاشىدۇ ھەم $h'(t)>0$ بولىدۇ؛ $t>a$ بولغاندا $h(t)$ فۇنكسىيە مونوتون كېمىيىدۇ ھەم $h'(t)<0$ بولىدۇ. دېمەك، فۇنكسىيە قىممىتى $t=a$ نىڭ ئەتراپىدا ئاۋۋال ئېشىپ ($t<a$ بولغاندا، $h'(t)>0$)، ئاندىن كېمىيىدۇ ($t>a$ بولغاندا، $h'(t)<0$). شۇنىڭ بىلەن، t نىڭ قىممىتى a ئەتراپىدا كىچىكتىن چوڭىيىپ a دىن ئۆتكەندە، $h'(t)$ نىڭ قىممىتى ئاۋۋال مۇسبەت، كېيىن مەنپىي بولىدۇ ھەمدە $h'(t)$ ئۈزلۈكسىز ئۆزگىرىدۇ ـ دە، نەتىجىدە $h'(a)=0$ بولىدىغان ئەھۋال كېلىپ چىقىدۇ.



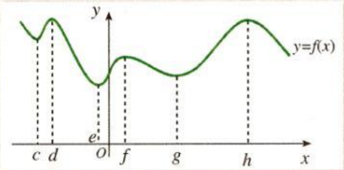
8.3.1 ـ رەسىم

ئۇنداق بولسا، ئادەتتىكى $y=f(x)$ فۇنكسىيىمۇ مۇشۇنىڭغا ئوخشاش خۇسۇسىيەتكە ئىگە بولامدۇ؟

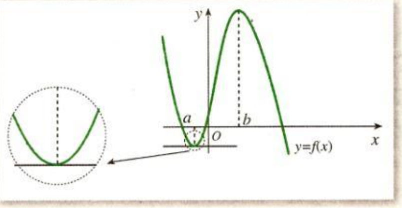
1 ـ باب

ئىزدىنىش

9.3.1 ـ ۋە 10.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ a، b، c، d، e، f، g، h نۇقتىلاردىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرى بىلەن بۇ نۇقتىلار ئەتراپىدىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ $y=f(x)$ نىڭ بۇ نۇقتىلاردىكى ھاسىلە قىممىتى قانچە بولىدۇ؟ بۇ نۇقتىلار ئەتراپىدا، $y=f(x)$ نىڭ ھاسىلىسىنىڭ ئالامىتىدە قانداق قانۇنىيەت بار؟



10.3.1 ـ رەسىم



9.3.1 ـ رەسىم

a، b ئىككى نۇقتىنى مىسال قىلىپ ئالساق، بۇنىڭدىن شۇنى بايقىيالايمىزكى، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $x=a$ نۇقتىدىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f(a)$ ئۇنىڭ $x=a$ نۇقتىنىڭ ئەتراپىدىكى باشقا نۇقتىلاردىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرىدىن كىچىك ھەمدە $f'(a)=0$؛ ئۇنىڭ ئۇستىگە، $x=a$ نۇقتىنىڭ ئەتراپىدا، سول تەرەپتە $f'(x)<0$ بولۇپ، ئوڭ تەرەپتە $f'(x)>0$ بولىدۇ. ئوخشاشلا، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $x=b$ نۇقتىدىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f(b)$ ئۇنىڭ $x=b$ نۇقتىنىڭ ئەتراپىدىكى باشقا نۇقتىلاردىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرىدىن چوڭ بولىدۇ ھەمدە $f'(b)=0$؛ ئۇنىڭ ئۇستىگە، $x=0$ نۇقتىنىڭ ئەتراپىدا، سول تەرەپتە $f'(x)>0$ بولۇپ، ئوڭ تەرەپتە $f'(x)<0$ بولىدۇ.

بىز a نۇقتىنى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مىنىمۇم نۇقتىسى، $f(a)$ نى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ **مىنىمۇم قىممىتى**؛ b نۇقتىنى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ماكسىمۇم نۇقتىسى، $f(b)$ نى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ **ماكسىمۇم قىممىتى** دەپ ئاتايمىز. مىنىمۇم نۇقتا بىلەن ماكسىمۇم نۇقتىنى ئومۇملاشتۇرۇپ **ئېكستىرېمۇم نۇقتا**، مىنىمۇم قىممەت بىلەن ماكسىمۇم قىممەتنى ئومۇملاشتۇرۇپ **ئېكستىرېمۇم قىممەت** (extreme value) دەپ ئاتايمىز.

ئېكستىرېمۇم قىممەت فۇنكسىيىنىڭ مەلۇم بىر نۇقتا ئەتراپىدىكى چوڭ ـ كىچىكلىك ئەھۋالىنى ئەكس ئەتتۈرۈپ، فۇنكسىيىنىڭ قىسمەن خۇسۇسىيىتىنى سۈرەتلەپ بېرىدۇ.

4 ـ مىسال. فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ نىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ بولغانلىقتىن،

$$f'(x)=x^2-4=(x-2)(x+2).$$

$f'(x)=0$ دەپ ئېلىپ، ئۇنى يەشسەك $x=2$ ياكى $x=-2$ كېلىپ چىقىدۇ.

بۇنى تۆۋەندىكى ئىككى خىل ئەھۋالغا ئايرىپ مۇھاكىمە قىلىمىز:

(1) $f'(x)>0$، يەنى $x>2$ ياكى $x<-2$ بولغان ئەھۋال؛

(2) $f'(x)<0$، يەنى $-2<x<2$ بولغان ئەھۋال.

x ئۆزگەرگەندە، $f'(x)$ ، $f(x)$ لەرنىڭ ئۆزگىرىش ئەھۋالى جەدۋەلدىكىدەك بولىدۇ:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	مونوتون ئاشىدۇ ↗	$\frac{28}{3}$	مونوتون كېمىيىدۇ ↘	$-\frac{4}{3}$	مونوتون ئاشىدۇ ↗

ماكسىمۇم قىممەت چوقۇم مىنىمۇم قىممەتتىن چوڭ بولامدۇ؟

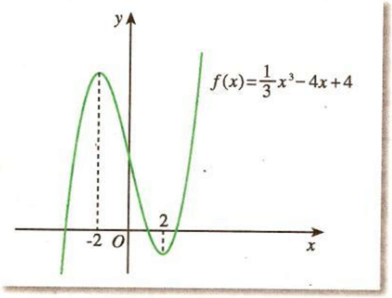
شۇڭا، $x=2$ بولغاندا، $f(x)$ ماكسىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ ھەم ئۇنىڭ ماكسىمۇم قىممىتى:

$$f(-2)=\frac{28}{3};$$

$x=2$ بولغاندا، $f(x)$ مىنىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ ھەم ئۇنىڭ مىنىمۇم قىممىتى:

$$f(2)=-\frac{4}{3}.$$

فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ نىڭ گرافىكى 11.3.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلدى.



11.3.1 ـ رەسىم

مۇلاھىزە ؟

ھاسىلە قىممىتى 0 بولغان نۇقتا چوقۇم فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم نۇقتىسى بولامدۇ؟

ھاسىلە قىممىتى 0 بولغان نۇقتىنىڭ فۇنكسىيىسىنىڭ ئېكستىرېمۇم نۇقتىسى بولالىشى ناتايىن. مەسىلەن، فۇنكسىيە $f(x)=x^3$ قا نىسبەتەن $f'(x)=3x^2$ بولىدۇ. گەرچە $f'(0)=0$ بولسىمۇ، ئەمما $x>0$ ياكى $x<0$ بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، ھامان $f'(x)>0$ بولۇپ، فۇنكسىيە $f(x)=x^3$ مونوتون ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ، شۇڭا $x=0$ فۇنكسىيە $f(x)=x^3$ نىڭ ئېكستىرېمۇم نۇقتىسى ئەمەس. ئومۇمەن، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ بىر نۇقتىدىكى ھاسىلە قىممىتىنىڭ 0 بولۇشى $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مۇشۇ نۇقتىدا ئېكستىرېمۇم قىممەت ئېلىشىنىڭ يېتەرلىك شەرتى ئەمەس، بەلكى پەقەت زۆرۈر شەرتىلا بولىدۇ.

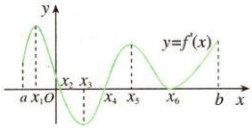
ئومۇمەن $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى تېپىش ئۇسۇلى تۆۋەندىكىچە:
تەڭلىمە، $f'(x)=0$ نى يېشىمىز. $f'(x_0)=0$ بولغاندا:

(1) x_0 نىڭ ئەتراپىدا سول تەرەپتە $f'(x)>0$، ئوڭ تەرەپتە $f'(x)<0$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x_0)$ ماكسىمۇم قىممەت بولىدۇ؛

(2) x_0 نىڭ ئەتراپىدا سول تەرەپتە $f'(x)<0$، ئوڭ تەرەپتە $f'(x)>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $f(x_0)$ مىنىمۇم قىممەت بولىدۇ.

مەشىق

1. رەسىمدە ھاسىلىۋى فۇنكسىيە $y=f'(x)$ نىڭ گرافىكى بېرىلـ ـدى، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم نۇقتىلىرىنى تېپىڭ ھەم قايسىسى ماكسىمۇم نۇقتا، قايسىسى مىنىمۇم نۇقتا بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى تېپىڭ:

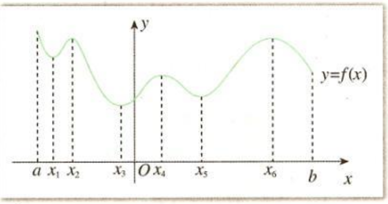
(1) $f(x)=6x^2-x-2$;　　(2) $f(x)=x^3-27x$;

(3) $f(x)=6+12x-x^3$;　　(4) $f(x)=3x-x^3$;

3-3-1　فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ (ئەڭ كىچىك) قىممىتى ۋە ھاسىلە

بىزگە مەلۇمكى، ئېكستىرېمۇم قىممەت فۇنكسىيىنىڭ پۈتكۈل ئېنىقلىنىش ساھەسى ئىچىدىكى خۇسۇسىيىتىنى ئەمەس، بەلكى ئۇنىڭ مەلۇم بىر نۇقتا ئەتراپىدىكى قىسمەن خۇسۇسىيىتىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ. باشقىچە ئېيتقاندا، ئەگەر x_0 فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ ماكسىمۇم (مىنىمۇم) نۇقتىسى بولسا، ئۇ ھالدا x_0 نۇقتىنىڭ ئەتراپىدىن $f(x_0)$ تىن چوڭ (كىچىك) بولغان قىممەتنى تاپقىلى بولمايدۇ. بىراق، ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلغاندا ياكى فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلغاندا، بىز كۆپ ھاللاردا فۇنكسىيىنىڭ مەلۇم ئىنتېرۋالدا قايسى قىممىتى ئەڭ چوڭ، قايسى قىممىتى ئەڭ كىچىك بولىدىغانلىقىغا بەك ـرەك كۆڭۈل بۆلىمىز. ئەگەر x_0 فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ ئەڭ چوڭ (ئەڭ كىچىك) قىممەت نۇقتىسى (يەنى فۇنكسىيىنى ئەڭ چوڭ قىممەت ياكى ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە قىلىدىغان نۇقتا) بولسا، ئۇ ھالدا $f(x_0)$ فۇنكسىيە $y=f(x)$ نىڭ ماس ئىنتېرۋالدىكى بارلىق فۇنكسىيە قىممەتلىرىدىن كىچىك (چوڭ) بولمايدۇ.

12.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى گرافىكىنى كۆزىتىپ، ئۇنىڭ ماكسىمۇم قىممىتى ۋە مىنىمۇم قىممىتىنى تاپالامسىز؟



12.3.1 ـ رەسىم

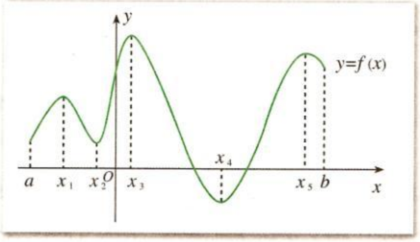
گرافىكنى كۆزىتىش ئارقىلىق بايقىيالايمىزكى، $f(x_1)$ ، $f(x_3)$ ، $f(x_5)$ لەر $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مىنىمۇم قىممىتى، $f(x_2)$ ، $f(x_4)$ ، $f(x_6)$ لەر $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ماكسىمۇم قىممىتى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

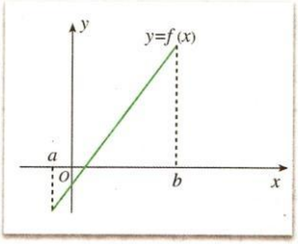
$y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تاپالامسىز؟

12.3.1 ـ رەسىمدىن كۆرەلەيمىزكى، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى $f(a)$، ئەڭ كىچىك قىممىتى $f(x_3)$ بولىدۇ.

13.3.1 ـ ۋە 14.3.1 ـ رەسىملەردىن $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $[a, b]$ دىكى گرافىكلىرىنى كۆزىتىڭ، ئۇلار $[a, b]$ دا ئەڭ چوڭ قىممەت، ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە بولامدۇ؟ ئەگەر ئىگە بولسا، ئەڭ چوڭ قىممەت بىلەن ئەڭ كىچىك قىممەت ئايرىم ـ ئايرىم نېمىگە تەڭ؟



14.3.1 ـ رەسىم



13.3.1 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ئەگەر $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى گرافىكى بىر ئۈزۈلۈكسىز ئەگرى سىزىق بولسا ئۇ ھالدا ئۇ چوقۇم ئەڭ چوڭ قىممەت ۋە ئەڭ كىچىك قىممەتكە ئىگە بولىدۇ.

13.3.1 ـ، 14.3.1 ـ رەسىملەر ۋە فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممەتلىرى ئىچىدىكى مىساللارغا بىرلەشتۈرۈش ئارقىلىق $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ بارلىق ئېكستىرېمۇم قىممەتلىرى ۋە ئۇچ نۇقتىلاردىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرىنى سېلىشتۇرساقلا، فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىپ چىقىشقا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋالالايمىز.

5 ـ مىسال. فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ نىڭ $[0, 3]$ دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى ۋە ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تاپايلى.

يېشىش: 4 ـ مىسالدىن بىلەلەيمىزكى، $[0, 3]$ دا $x=2$ بولغاندا، فۇنكسىيە

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$$

مىنىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ ھەم ئۇنىڭ مىنىمۇم قىممىتى:

$$f(2)=-\frac{4}{3}.$$

يەنە

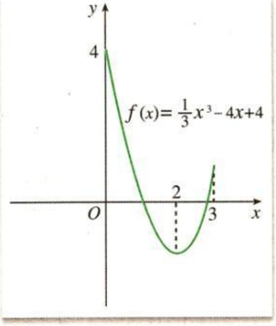
$$f(0)=4,\ f(3)=1$$

بولغانلىقتىن فۇنكسىيە

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$$

نىڭ [0, 3] دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى 4، ئەڭ كىچىك قىممىتى $-\frac{4}{3}$ بولىدۇ.

يۇقىرىقى يەكۈننى فۇنكسىيە $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ نىڭ [0, 3] دىكى گرافىكى (15.3.1 ـ رەسىم)غا ئاساسلىنىپمۇ كۆرسەتمىلىك هالدا دەلىللەشكە بولىدۇ.



15.3.1 ـ رەسىم

ئومۇمەن، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $[a, b]$ دىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىش باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

(1) $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ (a, b) ئىچىدىكى ئېكستىرېمۇم قىممەتلىرىنى تاپىمىز؛

(2) $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ هەرقايسى ئېكستىرېمۇم قىممەتلىرى ۋە ئۇچ نۇقتىدىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f(a)$، $f(b)$ لارنى سېلىشتۇرۇپ، ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى ئەڭ چوڭىنى ئەڭ چوڭ قىممەت، ئەڭ كىچىكىنى ئەڭ كىچىك قىممەت قىلىمىز.

مەشىق

2.3.1 ـ پاراگرافتىكى مەشىقتىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى هەربىر فۇنكسىيىنىڭ بېرىلگەن ئىنتېرۋالدىكى ئەڭ چوڭ قىممىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ.

(1) $f(x)=6x^2-x-2,\ x\in[0, 2]$;

(2) $f(x)=x^3-27x,\ x\in[-4, 4]$;

(3) $f(x)=6+12x-x^3,\ x\in[-\frac{1}{3}, 3]$;

(4) $f(x)=3x-x^3,\ x\in[2, 3]$.

3.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ مونوتونلۇقىغا هۆكۈم قىلىڭ هەمدە ئۇلارنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=-2x+1$;

(2) $f(x)=x+\cos x,\ x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f(x)=-2x-4$;

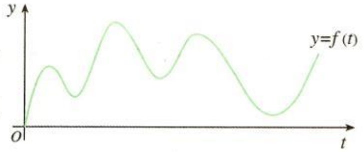
(4) $f(x)=2x^3+4x$.

CHAPTER

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ مونوتونلۇقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەمدە ئۇلارنىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=x^2+2x-4$; (2) $f(x)=2x^2-3x+3$;

(3) $f(x)=3x+x^3$; (4) $f(x)=x^3+x^2-x$.

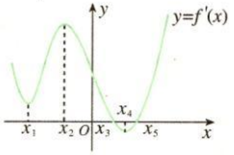


(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

3. ئاپتوموبىل تۈپتۈز تاشيولدا ماڭىدۇ.

(1) ئەگەر $f(t)$ ئاپتوموبىل بىلەن باش نۇقتىنىڭ t پەيت-تىكى ئارىلىقىنى ئىپادىلىسە، گرافىكتا ئاپتوموبىلنىڭ تېز-لىكى 0 گە تەڭ بولىدىغان نۇقتىلارنى بەلگىلەپ چىقىڭ.

(2) ئەگەر $f(t)$ ئاپتوموبىلنىڭ t پەيتتىكى تېزلىكىنى ئىپادىلىسە، (1) دە بەلگىلىگەن نۇقتىلارنىڭ مەنىسى نېمە بولىدۇ؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدە ھاسىلىۋى فۇنكسىيە $y=f'(x)$ نىڭ گرافىكى بېرىلدى، ئۇ-نىڭغا بەلگىلەپ قويۇلغان نۇقتىلار ئىچىدە:

(1) ھاسىلىۋى فۇنكسىيە $y=f'(x)$ قايسى نۇقتىدا ماكسىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ؟

(2) ھاسىلىۋى فۇنكسىيە $y=f'(x)$ قايسى نۇقتىدا مىنىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ؟

(3) $y=f(x)$ فۇنكسىيە قايسى نۇقتىدا ماكسىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ؟

(4) $y=f(x)$ فۇنكسىيە قايسى نۇقتىدا مىنىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدۇ؟

5. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=6x^2+x+2$; (2) $f(x)=x^3-12x$;

(3) $f(x)=6-12x+x^3$; (4) $f(x)=48x-x^3$.

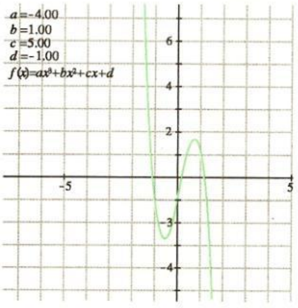
6. 5 ـ مىسالدىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى ھەربىر فۇنكسىيىنىڭ بېرىلگەن ئىنتېرۋالدىكى ئەڭ چوڭ قىم-مىتى بىلەن ئەڭ كىچىك قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $f(x)=6x^2+x+2,\ x\in[-1,1]$; (2) $f(x)=x^3-12x,\ x\in[-3,3]$;

(3) $f(x)=6-12x+x^3,\ x\in[-\frac{1}{3},1]$; (4) $f(x)=48x-x^3,\ x\in[-3,5]$.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى تەڭسىزلىكلەرنى فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ ھەم فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ كۆرسەتمىلىكلىكىدىن پايدىلىنىپ دەلىللەڭ:



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

(1) $\sin x<x,\ x\in(0,\ \pi)$; (2) $x-x^2>0,\ \in(0,1)$;

(3) $e^x>1+x,\ x\neq 0$; (4) $\ln x<x<e^x,\ x>0$.

2. فۇنكسىيە $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ نىڭ گرافىكىنى ئۇچۇر تېخنىكىسى قورالىدىن پايدىلىنىپ سىزىڭ ھەمدە a، b، c، d لارنىڭ قىممىتىنى ئۆزگەرتىپ، گرافىكنىڭ شەكلىنى كۆزىتىڭ:

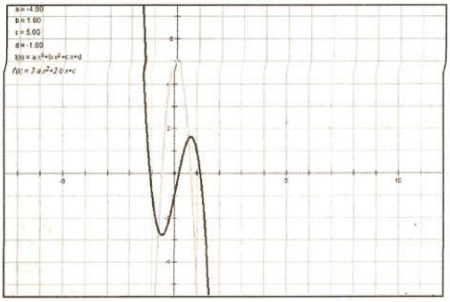
(1) فۇنكسىيە $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ نىڭ گرافىكىنىڭ تەخ-مىنىي شەكلىنى يىغىنچاقلاپ چىقالامسىز؟ ئۇنىڭ گرافىكى قانداق ئالاھىدىلىككە ئىگە؟ گرافىكتا ئاساسەن ئۇنىڭ مونوتونلۇق ئىن-تېرۋالىنى تەخمىنىي مۆلچەرلىيەلەمسىز؟

(2) بۇ فۇنكسىيىنىڭ مونوتونلۇقىنى ھاسىلىدىن پايدىلىنىپ تەت-قىق قىلىڭ ھەم ئۇنىڭ ماس مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ.

1 - باب

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

گرافىك تېخنىكىسى ۋە فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتى



1 - رەسىم

كۆپلىگەن گرافىكلىق ھېسابلىغۇچ ۋە كومپيۇتېر يۇمشاق دېتاللىرىنىڭ گرافىك تېخنىكىسى ئىقتىدارى ناھايىتى يۇقىرى بولۇپ، فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىش ۋە ئۇنى تەھلىل قىلىش ئىقتىدارى گرافىك تېخنىكىسىنىڭ بىر مۇھىم تەرىپى ھېسابلىنىدۇ. ئۇ ئاساسلىقى تۆۋەندىكىلەرنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ:

1. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى ئۇنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىگە ئاساسەن بىۋاسىتە سىزىپ چىقىش؛

2. نۇر بەلگىنى سۈرۈپ، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى خالىغان بىر نۇقتىنىڭ كوئوردىناتىنى كۆرسىتىپ بېرىش؛

3. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى ۋە گرافىكىغا ئاساسەن ئۇنىڭ ھاسىلىۋى فۇنكسىيىسى $f'(x)$ نى تېپىش ھەم ھاسىلىۋى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىش؛

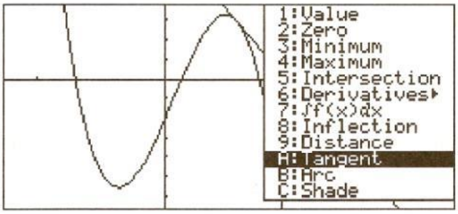
4. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى ئۈستىدىكى مەلۇم بىر نۇقتىدىن ئۆتكەن ئۇرۇنمىنىڭ يانتۇلۇقى ۋە ئۇرۇنما تەڭلىمىسىنى تېپىش ھەم كۆرسىتىپ بېرىش؛

5. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ نۆل نۇقتىسىنى تېپىش ۋە كۆرسىتىپ بېرىش؛

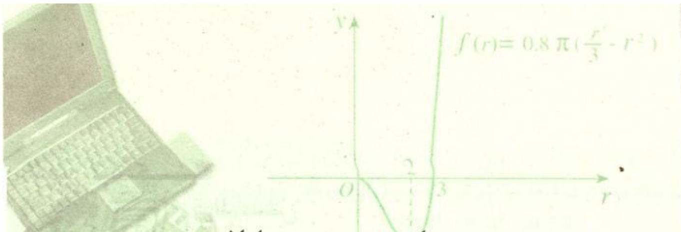
6. $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ قىسمەن يېرىنى چوڭايتىش ھەم كىچىكلىتىش؛

7. ئىنتېرۋالنىڭ ئىككى ئۇچ نۇقتىسىنى ئېنىقلاش ۋە بۇ ئارقىلىق $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ بېرىلگەن ئىنتېرۋالدىكى ئەڭ چوڭ، ئەڭ كىچىك قىممەتلىرىنى تېپىش.

گرافىكلىق ھېسابلىغۇچ ۋە كومپيۇتېر يۇمشاق دېتالىنىڭ فۇنكسىيە گرافىكىنى سىزىش ۋە ئۇنى تەھلىل قىلىش ئىقتىدارى بىزنىڭ فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئۆگىنىشىمىزدە مۇھىم رول ئوينايدۇ: بىر تەرەپتىن، فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىپ، گرافىكنى كۆزىتىش ۋە تەھلىل قىلىش ھەم قىياسىنى ئوتتۇرىغا قويۇش ۋە بايقاش ئارقىلىق فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى مۇھاكىمە قىلغىلى؛ يەنە بىر تەرەپتىن، فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ھاسىلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلغاندىن كېيىن، گرافىكتىن پايدىلىنىپ كۆرسەتمىلىك دەلىللەپ، ئىككىسىنىڭ بىر - بىرىنى تولۇقلاش رولىنى ئەمەلگە ئاشۇرغىلى بولىدۇ.



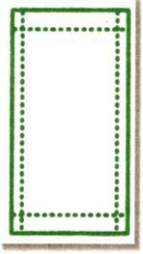
2 - رەسىم



4-1 تۇرمۇشتىكى سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىسىگە دائىر مىساللار

تۇرمۇشتا پايدىنى ئەڭ چوڭ قىلىش، ماتېرىيالنى ئەڭ كۆپ تېجەش، ئەڭ يۇقىرى ئۇنۇمدارلىققا ئېرىشىش دېگەندەك مەسىلىلەر دائىم دېگۇدەك ئۇچراپ تۇرىدۇ، بۇنداق مەسىلىلەر ئادەتتە **سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىسى** دەپ ئاتىلىدۇ. ئالدىدىكى ئۆگىنىشلەردىن ھاسىلىۋى فۇنكسىيىنىڭ ئەڭ چوڭ (ئەڭ كىچىك) قىممىتىنى تېپىشتىكى كۈچلۈك قورال ئىكەنلىكىنى بىلىۋالغاندۇق، بۇ پاراگرافتا تۇرمۇشتىكى بەزى سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىلىرىنى شۇ ھاسىلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىمىز.

1 ـ مىسال. ئېلاننىڭ بەت ئۆلچىمىنى لايىھىلەش



1.4.1 ـ رەسىم

مەكتەپ ياكى سىنىپتا پائالىيەت ئۆتكۈزۈلمەكچى بولغاندا، ئادەتتە ئېلان چاپلاپ تەشۋىق قىلىشقا توغرا كېلىدۇ. 1.4.1 ـ رەسىمدىكىسى ئۇزۇنسىغا چاپلىنىدىغان ئېلان قەغىزى. ئەگەر بەت يۈزى (بەتنىڭ ئەمەلىي خەت يېزىلىدىغان يۈزى)نى $128\,\mathrm{dm}^2$ قىلىپ، ئاستى ـ ئۈستى ئىككى تەرەپنىڭ ھەربىرىدىن $2\,\mathrm{dm}$ لىق بوش ئورۇن، ئوڭ ـ سول ئىككى تەرەپنىڭ ھەربىرىدىن $1\,\mathrm{dm}$ لىق بوش ئورۇن قالدۇرۇش تەلەپ قىلىنسا، ئېلاننىڭ بەت ئۆلچىمىنى قانداق لايىھىلىگەندە تۆت تەرەپتىكى بوش ئورۇننىڭ يۈزىنى ئەڭ كىچىك قىلغىلى بولىدۇ؟

يېشىش: بەت يۈزىنىڭ ئېگىزلىكىنى $x\,\mathrm{dm}$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ كەڭلىكى $\frac{128}{x}\,\mathrm{dm}$ بولىدۇ، بۇ چاغدا، تۆت تەرەپتىكى بوش ئورۇننىڭ يۈزى:

$$S(x)=(x+4)\left(\frac{128}{x}+2\right)-128$$

$$=2x+\frac{512}{x}+8,\ x>0.$$

بۇنىڭ ھاسىلىسىنى تاپساق:

$$S'(x)=2-\frac{512}{x^2}.$$

$S'(x)=2-\frac{512}{x^2}=0$ دەپ ئالساق ھەم ئۇنى يەشسەك، $x=16$ ($x=-16$ نى تاشلىۋېتىمىز) كېلىپ چىقىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن، بەت يۈزىنىڭ كەڭلىكى $\frac{128}{x}=\frac{128}{16}=8$ بولىدۇ.

$x\in(0,\ 16)$ بولغاندا $S'(x)<0$؛ $x\in(16,\ +\infty)$ بولغاندا $S'(x)>0$.

دېمەك، $x=16$ فۇنكسىيە $S(x)$ نىڭ مىنىمۇم نۇقتىسى ھەم ئەڭ كىچىك قىممەت نۇقتىسى بولىدۇ. شۇڭا، بەت يۈزىنىڭ ئېگىزلىكىنى 16 dm، كەڭلىكىنى 8 dm قىلىپ لايىھىلىسەك، تۆت تەرەپتىكى بوش ئورۇننىڭ يۈزى ئەڭ كىچىك بولىدۇ.

جاۋابى: بەت يۈزىنىڭ ئېگىزلىكى 16 dm، كەڭلىكى 8 dm بولغاندا، ئېلاننىڭ تۆت تەرىپىدىكى بوش ئورۇننىڭ يۈزى ئەڭ كىچىك بولىدۇ.

2 - مىسال. ئىچىملىك قۇتىسى چوڭ - كىچىكلىكىنىڭ ئىچىملىك شىركىتىنىڭ پايدىسىغا بولغان تەسىرى

(1) سىز سودا بازارلىرىدا تەڭ مىقداردىكى كىچىك قىلىپ ئورالغان بۇيۇملارنىڭ چوڭ قىلىپ ئورالغىنىدىن قىممەترەك بولىدىغانلىقىغا دىققەت قىلغانمۇ؟ بۇنىڭ سەۋەب - ئاساسلىرىنى ماتېماتىكا نۇرغۇسىدىن بىلىپ بېقىشنى خالامسىز؟

(2) ئىچىملىك قۇتىسى قانچىكى چوڭ بولسا، ئىچىملىك شىركىتىنىڭ پايدىسى شۇنچە يۇقىرى بولامدۇ؟

【ئارقا كۆرۈنۈش بىلىمى】 مەلۇم سودىگەر شار شەكىللىك قۇتىغا قاچىلىنىدىغان مەلۇم خىل ئىچىملىكنى ياسايدۇ ھەم ساتىدۇ. ئىچىملىك قۇتىسىنىڭ ياسىلىش تەننەرخى $0.8\pi r^2$ پۇڭ بولۇپ، بۇنىڭدىكى r (بىرلىكى: cm) قۇتىنىڭ رادىئۇسى. ھەر 1 mL ئىچىملىك سېتىلسا، سودىگەر 0.2 پۇڭ پايدا ئالىدۇ ھەمدە بۇ سودىگەر ياسىيالايدىغان ئىچىملىك قۇتىسىنىڭ ئەڭ چوڭ رادىئۇسى 6 cm.

مەسىلە: (1) قۇتىنىڭ رادىئۇسى قانچىلىك بولغاندا، ھەربىر قۇتا ئىچىملىكتىن ئالىدىغان پايدا ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ؟

(2) قۇتىنىڭ رادىئۇسى قانچىلىك بولغاندا، ھەربىر قۇتا ئىچىملىكتىن ئالىدىغان پايدا ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ؟

يېشىش: قۇتىنىڭ رادىئۇسى r بولغانلىقتىن، ھەربىر قۇتا ئىچىملىكتىن ئالىدىغان پايدا:

$$y=f(r)=0.2\times\frac{4}{3}\pi r^3-0.8\pi r^2$$

$$=0.8\pi\left(\frac{r^3}{3}-r^2\right),\ 0<r\leqslant 6.$$

ئەمدى

$$f'(r)=0.8\pi(r^2-2r)=0$$

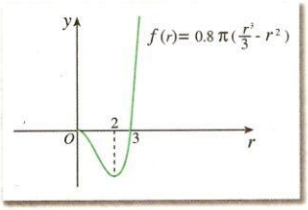
دەپ ئالساق، $r=2$ بولغاندا $f'(r)=0$.

$r\in(0,\ 2)$ بولغاندا $f'(r)<0$؛ $r\in(2,\ 6)$ بولغاندا $f'(r)>0$.

شۇڭا، رادىئۇس $r>2$ بولغاندا، $f'(r)>0$ بولۇپ، بۇ، $f(r)$ نىڭ مونوتون ئاشىدىغانلىقىنى، يەنى رادىئۇس قانچىكى چوڭ بولسا، پايدا شۇنچە يۇقىرى بولىدىغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ؛ رادىئۇس $r<2$ بولغاندا، $f'(r)<0$ بولۇپ، بۇ، $f(r)$ نىڭ مونوتون كېمىيىدىغانلىقىنى، يەنى رادىئۇس قانچىكى چوڭ بولسا، پايدا شۇنچە تۆۋەن بولىدىغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ.

I رادىئۇس 2 cm بولغاندا، پايدا ئەڭ تۆۋەن بولىدۇ، بۇ چاغدا $f(2)<0$ بولۇپ، بۇ، مۇشۇنداق قۇتىغا قاچىلانغان ئىچىملىكنىڭ پايدىسى قۇتىنىڭ تەننەرخىگىمۇ يەتمەيدىغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ، بۇ چاغدا پايدىنىڭ قىممىتى مەنپىي بولىدۇ.

II رادىئۇس 6 cm بولغاندا، پايدا ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ.



2.4.1 - رەسىم

باشقا بىر تۇرغۇدىن ئويلىشىپ باقايلى: ئەگەر ھاسىلە قورالىدىن پايدىلانماي، فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى (2.4.1 - رەسىم) نى بىۋاسىتە كۆزەتسەك، نېمىنى بايقىيالايمىز؟

گرافىكتىن ئاسانلا كۆرەلەيمىزكى، $r=3$ بولغاندا $f(3)=0$، يەنى قۇتىنىڭ رادىئۇسى 3 cm بولغاندا، ئىچىملىكتىن ئالىدىغان پايدا بىلەن ئىچىملىك قۇتىسىنىڭ تەننەرخى دەل ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ؛ $r>3$ بولغاندا، پايدىنىڭ قىممىتى ئاندىن مۇسبەت بولىدۇ.

$r \in (0, 2)$ بولغاندا، $f(r)$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ، ئۇنىڭ ئەمەلىي مەنىسىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىۋالغاندىن كېيىن، دەسلەپتە ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلىگە ئاسانلا جاۋاب بېرەلەيمىز. قېنى، ئۆزۈڭلار جاۋاب بېرىپ بېقىڭلار.

3 - مىسال. ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ئەڭ چوڭ ساقلاش مىقدارى مەسىلىسى

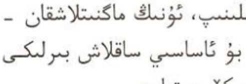
(1) كومپيۇتېرنىڭ ئۇچۇرلارنى قانداق ساقلايدىغانلىقى ۋە ئىزدەپ تاپىدىغانلىقىنى بىلەمسىز؟

(2) ماگنىتلىق دىسكىنىڭ قۇرۇلمىسىنى بىلەمسىز؟

(3) قانداق قىلغاندا بىر ھالقىسىمان ماگنىتلىق دىسكىدا ئىمكانقەدەر كۆپ ئۇچۇرلارنى ساقلىغىلى بولىدۇ؟

【ئارقا كۆرۈنۈش بىلىمى】 كومپيۇتېر ئۇچۇرلارنى ماگنىتلىق دىسكىدا ساقلايدۇ. ماگنىتلىق دىسكا دېگىنىمىز ماگنىتلىق دېئېلېكترى بار دۈگىلەك دىسكا بولۇپ، ئۇ مەشغۇلات سىستېمىسى ئارقىلىق ماگنىت ئىزى ۋە سېكتورلارغا فورماتلاشتۇرۇلىدۇ. ماگنىت ئىزى رادىئۇسى ئوخشاش بولمىغان مەركەزداش چەمبەرلەردىن ھاسىل بولغان ئوربىتىلارنى، سېكتور بولسا مەركىزىي بۇلۇڭنىڭ بۆلۈشىدىن ھاسىل بولغان سېكتور شەكىللىك ساھەلەرنى كۆرسىتىدۇ. ماگنىت ئىزىدىكى ئۇزۇنلۇقى مۇقىم بولغان ياي ئاساسىي ساقلاش بىرلىكى قىلىنىپ، ئۇنىڭ ماگنىتلاشقان - ماگنىتلاشمىغانلىقىغا قاراپ ئايرىم - ئايرىم سانلىق مەلۇمات 0 ياكى 1 خاتىرىلىنىدۇ. بۇ ئاساسىي ساقلاش بىرلىكى ئادەتتە بىت(bit) دەپ ئاتىلىدۇ. ماگنىتلىق دىسكىنىڭ قۇرۇلمىسى 3.4.1 - رەسىمدە كۆرسىتىلدى.

ماگنىتلىق دىسكىنىڭ پەرقلەندۈرۈش دەرىجىسىگە كاپالەتلىك قىلىش ئۈچۈن، ماگنىت ئىزلىرى ئارىسىدىكى كەڭلىك چوقۇم m دىن چوڭ بولۇشى، ھەربىر بىت ئىگىلىگەن ماگنىت ئىزىنىڭ ئۇزۇنلۇقى n دىن كىچىك بولماسلىقى كېرەك. سانلىق مەلۇماتلارنى ئىزدەپ تېپىشقا قولاي بولسۇن ئۈچۈن، ماگنىتلىق دىسكىنى فورماتلاشتۇرغاندا بارلىق ماگنىت ئىزلىرى ئىگە بولغان بىت سانلىرىنىڭ ئوخشاش بولۇشى تەلەپ قىلىنىدۇ.



3.4.1 - رەسىم

مەسىلە: رادىئۇسى R بولغان بىر ماگنىتلىق دىسكا بار، ئۇنىڭ ساقلاش رايونى رادىئۇسى r دىن R غىچە بولغان ھالقىسىمان ساھەدىن ئىبارەت.

(1) r قانچىكى كىچىك بولسا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارى شۇنچە چوڭ بولامدۇ؟

(2) r قانچىگە تەڭ بولغاندا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارى ئەڭ چوڭ بولىدۇ (ئەڭ سىرتىدىكى ماگنىت ئىزى ھېچقانداق ئۇچۇر ساقلىمايدۇ)؟

يېشىش:

ھەربىر ماگنىت ئىزىدىكى بىت سانى × ماگنىت ئىزلىرىنىڭ سانى = ساقلاش مىقدارى.

ساقلاش رايونىنىڭ رادىئۇسى r بىلەن R نىڭ ئارىلىقىدا بولىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ماگنىت ئىزلىرى ئارىسىدىكى كەڭلىك چوقۇم m دىن چوڭ بولىدىغانلىقى ھەمدە ئەڭ سىرتىدىكى ماگنىت ئىزى ھېچقانداق ئۇچۇر ساقلىمايدىغانلىقى ئۈچۈن، ماگنىت ئىزلىرىنىڭ سانى ئەڭ كۆپ بولغاندا $\frac{R-r}{m}$ غا يېتىدۇ. ھەربىر ماگنىت ئىزىدىكى بىت سانلىرى ئۆزئارا تەڭ بولىدىغانلىقتىن، ئەڭ چوڭ ساقلاش مىقدارىغا ئېرىشىش ئۈچۈن، ئەڭ ئىچىدىكى بىر ماگنىت ئىزى چوقۇم لىق تولدۇرۇلۇشى كېرەك، يەنى ھەربىر ماگنىت ئىزىدىكى بىت سانى $\frac{2\pi r}{n}$ غا يېتىدۇ. شۇڭا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ئومۇمىي ساقلاش مىقدارى:

$$f(r)=\frac{R-r}{m}\cdot\frac{2\pi r}{n}=\frac{2\pi}{mn}r\ (R-r).$$

(1) بۇ، r غا دائىر ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە بولۇپ، ئۇنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسىگە ئاساسەن ھۆكۈم قىلالايمىزكى، r قانچىكى كىچىك بولسا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارى شۇنچە چوڭ بولىدۇ دېگەن سۆز توغرا ئەمەس.

(2) $f(r)$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىش ئۈچۈن، $f'(r)=0$ نى ھېسابلىساق بولىدۇ.

$$f'(r)=\frac{2\pi}{mn}(R-2r),$$

$f'(r)=0$ دەپ ئالساق ھەم ئۇنى يەشسەك، $r=\frac{R}{2}$ كېلىپ چىقىدۇ.

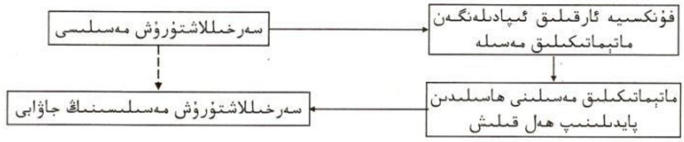
$r<\frac{R}{2}$ بولغاندا $f'(r)>0$ ؛ $r>\frac{R}{2}$ بولغاندا $f'(r)<0$.

شۇنىڭ ئۈچۈن، $r=\frac{R}{2}$ بولغاندا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارى ئەڭ چوڭ بولۇپ، ئەڭ چوڭ ساقلاش مىقدارى $\frac{\pi R^2}{2mn}$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

ئەگەر ھەربىر ماگنىت ئىزىدا ساقلانغان ئۇچۇرلار بىلەن ماگنىت ئىزىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئوڭ تاناسىپ تۈزسە، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارىنى قانداق ھېسابلاش كېرەك؟ بۇ چاغدا، r قانچىكى كىچىك بولسا، ماگنىتلىق دىسكىنىڭ ساقلاش مىقدارى شۇنچە چوڭ بولامدۇ؟

يۇقىرىقى مىساللاردىن بايقىيالايمىزكى، سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشتىكى ئاساسىي پىكىر يولى:



سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىسىنى ھەل قىلىشنىڭ يۇقىرىقى جەريانى ماتېماتىكىلىق مودېل تۇرغۇزۇشنىڭ تىپىك جەريانىدۇر.

4.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ئۇزۇنلۇقى l بولغان سىمنى ئىككى بۆلەك قىلىپ كېسىپ، ھەربىر بۆلەك سىمدىن بىر كۋادرات ئېگىپ چىقىشتا، ئەگەر ئىككى كۋادراتنىڭ يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسى ئەڭ كىچىك بولۇش تەلەپ قىلىنسا، بۇ ئىككى بۆلەك سىمنىڭ ئۇزۇنلۇقى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولۇشى كېرەك؟

2. قاپقاقسىز چاسا قۇتىنىڭ ئەڭ چوڭ سىغىمى مەسىلىسى

تەرەپ ئۇزۇنلۇقى a بولغان كۋادرات شەكىللىك قاڭالتىر بار. ئۇنىڭ تۆت بۇرجىكىدىن تەرەپ ئۇزۇنلۇقى ئوخشاشلا x بولغان تۆت دانە كىچىك كۋادراتنى كېسىۋېتىپ، بىر قاپقاقسىز چاسا قۇتا ياساشقا توغرا كەلسە:

(1) قۇتىنىڭ سىغىمى V نى x نىڭ فۇنكسىيىسى قىلىپ ئىپادىلەڭ؛

(2) x نېمىگە تەڭ بولغاندا، قۇتىنىڭ سىغىمى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

3. مېتالدىن ياسىلىدىغان سىلىندىر شەكىللىك ئېچىملىك قۇتىسىنىڭ سىغىمى مۇقىم بولغاندا، ئۇنىڭ ئېگىزلىكى ۋە ئاساسىنىڭ رادىئۇسى قانداق تاللانسا ئىشلىتىلىدىغان ماتېرىيال ئەڭ تېجەشلىك بولىدۇ؟

4. مەلۇم جىسىمنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى ئۆلچەش قوراللىدىن پايدىلىنىپ ئۆلچىگەندە، قورالنىڭ ئېنىقلىق دەرىجىسى ۋە ئۆلچەش تېخنىكىسى سەۋەبىدىن، تۆۋەندىكىدەك n دانە سانلىق مەلۇمات كېلىپ چىققان:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n.$$

ئىسپاتلاڭ: بۇ جىسىمنىڭ ئۇزۇنلۇقىنى مۇشۇ n دانە سانلىق مەلۇماتنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى

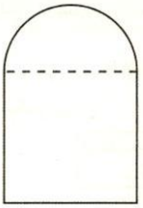
$$x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

بىلەن ئىپادىلىسەك، بۇ n دانە سانلىق مەلۇماتنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ (x-a_i)^2$$

ئەڭ كىچىك بولىدۇ.

مۇلاھىزە: بۇ نەتىجە نېمىنى چۈشەندۈرىدۇ؟ **ئەڭ كىچىك كۋادراتلىق ئۇسۇلنىڭ** ئاساسىي پرىنسىپىنى مۇشۇ مەسىلىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

5. رەسىمدىكىدەك، ئۈستى يېرىم چەمبەر، ئاستى تىك تۆتبۇلۇڭ بولغان بىر شەكىلنىڭ يۈزى $a\,\mathrm{m}^2$. بۇ شەكىلنى سىم بىلەن قورشاپ چىقىشتا، تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ كەڭلىكى قانچىلىك بولغاندا ئىشلىتىلىدىغان ماتېرىيال ئەڭ تېجەشلىك بولىدۇ؟

6. مەلۇم تاۋارنىڭ ئىشلەپچىقىرىلىش تەننەرخى C بىلەن مەھسۇلات مىقدارى q ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت ئىپادىسى $C=100+4q$، تاۋارنىڭ يەككە باھاسى p بىلەن مەھسۇلات مىقدارى q ئارىسىدىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت ئىپادىسى $p=25-\frac{1}{8}q$ بولسا، مەھسۇلات مىقدارى q قانداق قىممەتنى ئالغاندا پايدا ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ؟

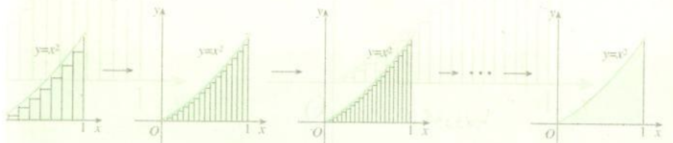
1 ـ باب

B گۇرۇپپا

1. ياتاق باھاسىنى قانچىلىك قىلىپ بېكىتىش كېرەك

مەلۇم مېھمانسارايدا ساياھەتچىلەر ئۈچۈن 50 ياتاق ھازىرلانغان. ھەربىر ياتاقنىڭ كۈنلۈك باھاسى 180 يۈەن دەپ بېكىتىلسە، ياتاقلارنىڭ ھەممىسى توشىدۇ، ياتاقنىڭ يەككە باھاسى ھەر 10 يۈەن ئاشۇرۇلسا، بۇنىڭغا ماس ھالدا بىر ياتاق بوش قالىدۇ. ئەگەر ساياھەتچىلەر ياتاقتا تۇرغاندا ھەر خىل ئاسراش خىراجەتلىرى ئۈچۈن ھەر ـ بىر ياتاققا كۈنىگە 20 يۈەن كەتسە، ياتاق باھاسى قانچىلىك قىلىپ بېكىتىلگەندە مېھمانساراي ئالىدىغان پايدا ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ؟

2. مەلۇم تاۋارنىڭ كىرگۈزۈلۈش باھاسى دانە / يۈەن a. ئىلگىرىكى تەجرىبىلەرگە ئاساسلانغاندا، سېتىش باھاسى دانە / يۈەن b $(b \geqslant \frac{4}{3}a)$ بولغاندا، ئۇنىڭدىن c دانىنى ساتقىلى بولىدىكەن؛ بازار تەكشۈرۈشتىن مەلۇم بولۇشچە، سېتىش باھاسى %10 چۈشۈرۈلسە، سېتىش مىقدارى %40 ئاشىدىكەن. ھازىر بىر قېتىملىق باھا چۈشۈرۈش قارار قىلىندى، ئۇنداق بولسا، سېتىش باھاسى قانچىلىك بولغاندا ئالىدىغان پايدا ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ؟



5-1 ئېنىق ئىنتېگرال ئۇقۇمى

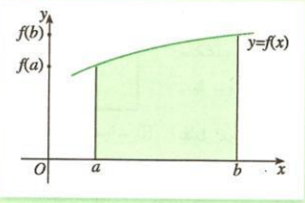
ئىلگىرىكى ئۆگىنىشلەردىن كۋادرات، ئۈچبۇلۇڭ، پاراللېل تۆت تەرەپلىك ۋە تراپېتسىيە قاتارلىق تەكشىلىكتىكى «تۈز تەرەپلىك شەكىللەر»نىڭ يۈزىنى ھېسابلاشنى بىلىۋالدۇق؛ فىزىكىدىكى ئۆگىنىشلەردىن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەتتىكى ۋاقىت، تېزلىك بىلەن مۇساپىنىڭ مۇناسىۋىتىنى بىلىۋالدۇق، ۋە باشقىلار. ماتېماتىكا ۋە فىزىكىدا، بىز يەنە تەكشىلىك ئەگرى سىزىقى بىلەن قورشالغان تەكشىلىكتىكى «ئەگرى تەرەپلىك شەكىللەر»نىڭ يۈزىنى ھېسابلاش، تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان جىسىمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشىنى، ئۆزگىرىشچان كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشىنى ھېسابلاش دېگەندەك مەسىلىلەرگىمۇ يولۇقىمىز. بۇنداق مەسىلىلەرنى قانداق ھەل قىلىش كېرەك؟ «ئەگرى تەرەپلىك شەكىل»نىڭ يۈزىنى تېپىش مەسىلىسىنى «تۈز تەرەپلىك شەكىل»نىڭ يۈزىنى تېپىشقا ئايلاندۇرغىلى بولامدۇ؟ تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەتكە دائىر مەسىلىلەرنى تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەتكە دائىر بىلىملەردىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغىلى بولامدۇ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، ئېنىق ئىنتېگرالدىن ئىبارەت يېڭى ماتېماتىكىلىق بىلىمنى ئۆگىنىشىمىزگە توغرا كېلىدۇ.

ئىلگىرى ئۆگەنگەن فۇنكسىيەلەر ئىچىدە، نۇرغۇن فۇنكسىيەلەر (مەسىلەن، $y=x$، $y=x^2$، $y=\sqrt{x}$) نىڭ گرافىكى مەلۇم بىر ئىنتېرۋال I دىكى بىر ئۈزلۈكسىز ئەگرى سىزىقتىن ئىبارەت. ئومۇمەن، ئەگەر $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ مەلۇم بىر ئىنتېرۋال I دىكى گرافىكى بىر ئۈزلۈكسىز ئەگرى سىزىق بولسا، ئۇ ھالدا بۇ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال I دىكى ئۈزلۈكسىز فۇنكسىيە دەپ ئاتىلىدۇ.

ئەگەر چۈشەندۈرۈش بېرىلمىسە، تۆۋەندە تەتقىق قىلىنىدىغان فۇنكسىيەلەرنىڭ ھەممىسى ئۈزلۈكسىز فۇنكسىيە بولىدۇ.

1-5-1 ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى

مۇلاھىزە؟

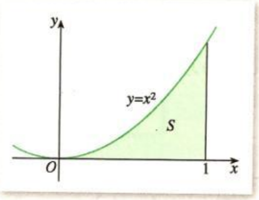


1.5.1 ـ رەسىم

1.5.1 ـ رەسىمدىكى بويالغان شەكىل تراپېتسىيىگە ئوخشىشىپ كېتىدۇ، ئەمما ئۇنىڭ بىر تەرىپى ئەگرى سىزىق $y=f(x)$ نىڭ بىر بۆلىكىدىن ئىبارەت. بىز تۈز سىزىق $x=a$، $x=b$ $(a \neq b)$، $y=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $y=f(x)$ بىلەن قورشالغان شەكىلنى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە دەپ ئاتايمىز. ئۇنداق بولسا، بۇ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى قانداق ھېسابلاش كېرەك؟

تۆۋەندە بىر ئالاھىدە ئەھۋالنى تەتقىق قىلىپ باقايلى: پارابولا $y=x^2$، تۈز سىزىق $x=1$ ۋە $y=0$ بىلەن قورشالغان تەكشىلىكتىكى شەكىل (2.5.1 - رەسىمدىكى بويالغان شەكىل)نىڭ يۈزى S نى قانداق تېپىش كېرەك؟

2.5.1 - رەسىمدىكى شەكىلنى تۈز سىزىق $x=0$، $x=1$، $y=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $y=x^2$ بىلەن قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە دەپ قاراشقا بولىدۇ.



2.5.1 - رەسىم

مۇلاھىزە؟

2.5.1 - رەسىمدىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە بىلەن بىز پىششىق بىلىدىغان «تۈز تەرەپلىك شەكىل»نىڭ ئاساسىي پەرقى نېمە؟ بۇ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىينىڭ يۈزى S نى تېپىش مەسىلىسىنى «تۈز تەرەپلىك شەكىل»نىڭ يۈزىنى تېپىش مەسىلىسىگە ئايلاندۇرغىلى بولامدۇ؟

2.5.1 - رەسىمدىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە بىلەن «تۈز تەرەپلىك شەكىل»نىڭ ئاساسىي پەرقى شۇكى، ئالدىنقىسىنىڭ بىر تەرىپى ئەگرى سىزىقنىڭ بىر بۆلىكى، «تۈز تەرەپلىك شەكىل»نىڭ بولسا ھەممىلا تەرىپى تۈز سىزىقنىڭ بۆلىكى بولىدۇ.

ئىلگىرىكى ئۆگىنىشلەردە، چەمبەرنىڭ يۈزىنى مۇنتىزىم كۆپ تەرەپلىكنى چەمبەرگە يېقىنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى ۋە مۇنتىزىم كۆپ تەرەپلىكنىڭ يۈزىنى تېپىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقانىدۇق. بۇ خىل «ئەگرىنىڭ ئورنىغا تۈزنى قويۇش» ئىدىيىسى بىزنى شۇنداق ئىلھاملاندۇرىدۇكى، 2.5.1 - رەسىمدىكى بويالغان شەكىلنىڭ يۈزىنىمۇ تۈز تەرەپلىك (مەسىلەن، تىك تۆتبۇلۇڭ)نى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىگە يېقىنلاشتۇرۇش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولامدۇ - يوق؟

3.5.1 - رەسىمدىكىدەك، ئىنتېرۋال [0, 1] نى نۇرغۇن كىچىك ئىنتېرۋاللارغا بۆلسەك، بۇنىڭ بىلەن ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىمۇ بىرمۇنچە كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىلەرگە بۆلۈنىدۇ. ھەربىر كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىگە نىسبەتەن «ئەگرىنىڭ ئورنىغا تۈزنى قويۇش» ئۇسۇلىنى قوللانساق، يەنى كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنىڭ ئورنىغا تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى تەقرىبىي قويساق، ھەربىر كىچىك ئەگرى تەرەپلىكنىڭ يۈزىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى كېلىپ چىقىدۇ، بۇ تەقرىبىي قىممەتلەرنىڭ يىغىندىسىنى تاپساق، ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى بارلىققا كېلىدۇ. تەسەۋۋۇر قىلىشقا بولىدۇكى، يۇقىرىقىدەك بۆلۈش قانچىكى ئۇششاق بولسا، تەقرىبىيلىك دەرىجىسى شۇنچە يۇقىرى بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزىنى ھېسابلاشقا ئايلاندۇرۇۋېلىش ۋە يېقىنلاشتۇرۇشتىن ئىبارەت ئىدىيىۋى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ تېپىش ئىمكانىيىتى يارىتىلغان بولدى. ئەمدى بۇ ئۇسۇلنى تۆۋەندىكى باسقۇچلار بويىچە كونكرېتلاشتۇرىمىز.

(1) بۆلۈش

ئىنتېرۋال [0, 1] غا تەڭ ئارىلىق تاشلاپ $n-1$ دانە نۇقتىنى قىستۇرۇپ، ئۇنى n دانە كىچىك ئىنتېرۋالغا بۆلىمىز:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right],$$

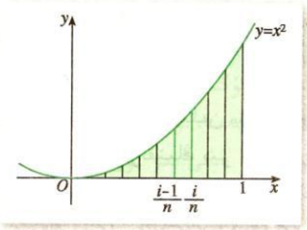
i ىنچى ئىنتېرۋالنى $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ قىلىپ يازساق، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى:

$$\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

يۇقىرىقى $n-1$ دانە بۆلۈش نۇقتىسى ئارقىلىق ئايرىم - ئايرىم x ئوقىنىڭ تىك سىزىقلىرىنى ئۆتكۈزۈپ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنى n دانە كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىگە بۆلسەك (3.5.1 - رەسىم) ھەم ئۇلارنىڭ يۈزلىرىنى

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$$

قىلىپ يازساق، روشەنكى، $S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$ بولىدۇ.



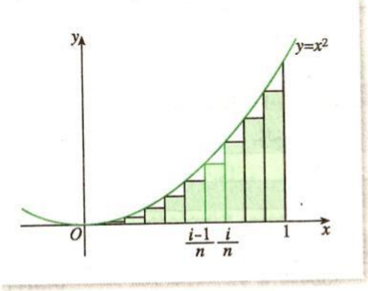
3.5.1 - رەسىم

(2) تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش

$f(x)=x^2$ قىلىپ يېزىۋالىمىز. 3.5.1 - رەسىمدىكىدەك، n ناھايىتى چوڭ، يەنى Δx ناھايىتى كىچىك بولغاندا، ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ دا فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نىڭ قىممىتىنىڭ ئۆزگىرىشى ناھايىتى كىچىك بولۇپ، ئۇ بىر تۇراقلىق سانغا تەقرىبىي تەڭ بولىدۇ دەپ قارىيالايمىز، بۇ يەردە ئۇنى سول ئۇچ $\frac{i-1}{n}$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ گە تەڭ دەپ قارىساق بولىدۇ. شەكىلدىن قارىغاندا، بۇ، كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ ئەگرى تەرىپىنىڭ ئورنىغا x ئوققا پاراللېل تۈز سىزىق بۆلىكىنى تەقرىبىي قويغانلىق بولىدۇ (4.5.1 - رەسىم). شۇنداق قىلىپ، ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ دا، ΔS_i نىڭ ئورنىغا كىچىك تىك تۆتبۇلۇڭنىڭ يۈزى $\Delta S'_i$ نى تەقرىبىي قويساق، يەنى قىسمەن كىچىك دائىرە ئىچىدە «ئەگرىنىڭ ئورنىغا تۈزنى قويساق»، ئۇ ھالدا

$$\Delta S_i\approx\Delta S'_i=f\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta x=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\Delta x$$

$$=\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\ (i=1, 2, \cdots, n). \quad ①$$



4.5.1 ـ رەسىم

(3) يىغىندىنى تېپىش

① گە ئاساسەن، 4.5.1 ـ رەسىمدىكى بويالغان شەكىلنىڭ يۈزى:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S'_i=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]^{❶}$$

$$=\frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

❶ تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلاشقا بولىدۇ:
$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

شۇنىڭ بىلەن S نىڭ تەقرىبىي قىممىتى:

$$S\approx S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

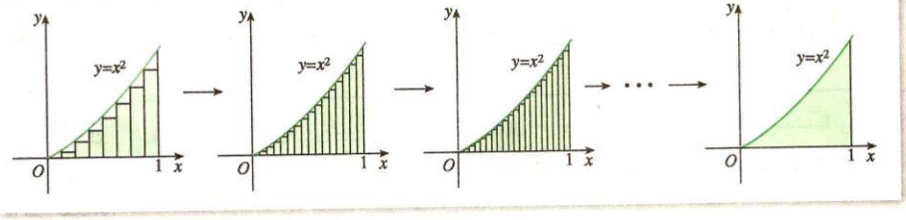
(4) لىمىتىنى ئېلىش

ئىنتېرۋال [0, 1] نى ئايرىم ـ ئايرىم 8، 16، 20، ⋯ تەڭ بۆلەكلەرگە بۆلسەك (5.5.1 ـ رەسىم)، بۇنىڭدىن شۇنى كۆرەلەيمىزكى، n چەكسىز چوڭغا ئىنتىلگەندە، يەنى Δx نىڭ قىممىتى 0 گە ئىنتىلگەندە، $S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ نىڭ قىممىتى S قا ئىنتىلىدۇ❷، شۇڭا

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}.$$

❷ بۇ جەرياننى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ كۆزىتىشكە بولىدۇ.



5.5.1 ـ رەسىم

يۇقىرىدىكى بۇ ئۆزگىرىش يۈزلىنىشىنى سانلىق قىممەت جەھەتتىنمۇ كۆرۈۋالالايمىز (1.1 - جەدۋەل).

1.1 - جەدۋەل

ئىنتېرۋال [0, 1] نىڭ تەڭ بۆلەكلەرگە بۆلۈنۈش سانى n	S نىڭ تەقرىبىي قىممىتى S_n
2	0.125 000 00
4	0.218 750 00
8	0.273 437 50
16	0.302 734 38
32	0.317 871 09
64	0.325 561 52
128	0.329 437 26
256	0.331 382 75
512	0.332 357 41
1 024	0.332 845 21
2 048	0.333 089 23
…	…

ئىزدىنىش

«تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش» تا، ئەگەر $f(x)=x^2$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ دىكى قىممىتى ئوڭ ئۇچ $\frac{i}{n}$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f\left(\frac{i}{n}\right)$ غا تەڭ دەپ قارالسا، بۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ S نىڭ قىممىتىنى تاپقىلى بولامدۇ؟ ئەگەر تاپقىلى بولسا، بۇ قىممەتمۇ $\frac{1}{3}$ گە تەڭ بولامدۇ؟ خالىغان $\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f(\xi_i)$ نى تەقرىبىي قىممەت دەپ ئالساق، ئەھۋال قانداق بولىدۇ؟

ئىسپاتلاشقا بولىدۇكى، $f(x)=x^2$ فۇنكسىيىنىڭ خالىغان $\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ نۇقتىدىكى قىممىتى $f(\xi_i)$ نى تەقرىبىي قىممەت قىلىپ ئالغاندا، تۆۋەندىكى هامان كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i)=\frac{1}{3}.$$

ئومۇمەن، 1.5.1 - رەسىمدىكىدەك، ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنىمۇ بۆلۈش، تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش، يىغىندىنى تېپىش، لىمىتىنى ئېلىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولىدۇ.

مەشىق

تۈز سىزىق $x=0$، $x=2$، $y=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $y=x^2$ بىلەن قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تېپىڭ.

1 - باب

2-5-1 ئاپتوموبىلنىڭ مېڭىش مۇساپىسى

بىز «جىسىمنىڭ ھەرىكەت مۇساپىسى بىلەن ۋاقىت ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتكە ئاساسەن جىسىمنىڭ ھەرىكەت تېزلىكىنى تېپىش» مەسىلىسىنى ھاسىلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشۇالدۇق. بۇنىڭ ئەكسىچە، ئەگەر جىسىمنىڭ تېزلىكى بىلەن ۋاقىت ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت بېرىلسە، ئۇنىڭ مۇقىم ۋاقىت ئىچىدە باسقان مۇساپىسىنى قانداق تېپىش كېرەك؟

مۇلاھىزە ?

ئاپتوموبىل v تېزلىك بىلەن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلغاندا، ئۇنىڭ t ۋاقىت ئۆتكەندە ماڭغان مۇساپىسى $s=vt$ [1] بولىدۇ. ئەگەر ئاپتوموبىل تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان ھەمدە ئۇنىڭ t پەيتتىكى تېزلىكى $v(t)=-t^2+2$ (t نىڭ بىرلىكى: h، v نىڭ بىرلىكى: km/h) بولسا، ئۇ ھالدا ئاپتوموبىلنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $0\leqslant t\leqslant 1$ ئىچىدە ماڭغان مۇساپىسى s (بىرلىكى: km) قانچە بولىدۇ؟

[1] بۇ يەردىكى «ئاپتوموبىلنىڭ ماڭغان مۇساپىسى» دېگەن سۆز فىزىكىدا «ئاپتوموبىلنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشى» دەپ ئۆلچەملىك بايان قىلىنىدۇ.

ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تاپقاندىكىگە ئوخشاش، بىز تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەتنىڭ مۇساپىسىنى تېپىش مەسىلىسىنى «ئۆزگىرىدىغىنىنىڭ ئورنىغا ئۆزگەرمەيدىغىنىنى قويۇش» ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەتنىڭ مۇساپىسىنى تېپىش مەسىلىسىگە ئايلاندۇرالايمىز. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئىنتېرۋال $[0, 1]$ نى n دانە تەڭ كىچىك ئىنتېرۋالغا بۆلسەك، ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋالدا $v(t)$ نىڭ ئۆزگىرىشى ناھايىتى كىچىك بولىدىغانلىقتىن، ئاپتوموبىلنى ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋالدا تەقرىبىي ھالدا تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلدى دەپ قاراشقا بولىدۇ ـ دە، بۇنىڭ بىلەن ئۇنىڭ ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋالدا ماڭغان مۇساپىسىنىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى تېپىشقا بولىدۇ، ئاندىن يىغىندىنى تېپىش ئارقىلىق s نىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، ئاخىرىدا n نى چەكسىز چوڭغا ئىنتىلدۇرسەك، s نىڭ ئېنىق قىممىتى كېلىپ چىقىدۇ.

(1) بۆلۈش

ۋاقىت ئىنتېرۋالى $[0, 1]$ غا تەڭ ئارىلىق تاشلاپ $n-1$ دانە بۆلۈش نۇقتىسىنى قىستۇرۇپ، ئۇنى n دانە تەڭ كىچىك ئىنتېرۋالغا بۆلىمىز:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right],$$

i نچى ئىنتېرۋالنى $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots, n)$ قىلىپ يازساق، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى:

$$\Delta t=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

CHAPTER 1

ئاپتوموبىلنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $\left[0, \frac{1}{n}\right]$، $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$، ⋯، $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ دە ماڭغان مۇساپىسىنى ئايرىم - ئايرىم

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \cdots,\ \Delta s_n$$

قىلىپ يازساق، روشەنكى، $s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i$.

(2) تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش

n ناھايىتى چوڭ، يەنى Δt ناھايىتى كىچىك بولغاندا، ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ دا، فۇنكسىيە $v(t)=-t^2+2$ نىڭ قىممىتىنىڭ ئۆزگىرىشى ناھايىتى كىچىك بولۇپ، ئۇ بىر تۇراقلىق سانغا تەقرىبىي تەڭ بولىدۇ، بۇ يەردە ئۇنى سول ئۇچ $\frac{i-1}{n}$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $v\left(\frac{i-1}{n}\right)=-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2$ گە تەڭ دەپ قارىساق بولىدۇ. فىزىكىلىق مەنىدىن قارىغاندا، ئاپتوموبىل تېزلىكىنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ دىكى ئۆزگىرىشى ناھايىتى كىچىك بولىدۇ، بۇ يەردە ئاپتوموبىل تەقرىبىي ھالدا $\frac{i-1}{n}$ پەيتتىكى تېزلىك $v\left(\frac{i-1}{n}\right)=-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2$ بىلەن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلىدى دەپ قارىساق، يەنى قىسمەن كىچىك دائىرە ئىچىدە «ئۆزگىرىشچان تېزلىكنىڭ ئورنىغا تەكشى تېزلىكنى قويساق»، ئۇ ھالدا

$$\Delta s_i \approx \Delta s'_i=v\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta t=\left[-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+2\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$=-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ (i=1, 2, \cdots, n). \qquad ①$$

(3) يىغىندىنى تېپىش

① گە ئاساسەن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s'_i=\sum_{i=1}^{n}v\left(\frac{i-1}{n}\right)\Delta t$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\right]$$

$$=-0\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}-\cdots-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+2$$

$$=-\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]+2$$

$$=-\frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+2=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2.$$

شۇنىڭ بىلەن، s نىڭ تەقرىبىي قىممىتى:

$$s\approx s_n=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2.$$

(4) لىمىتىنى ئېلىش

n چەكسىز چوڭغا ئىنتىلگەندە، يەنى Δt نىڭ قىممىتى 0 گە ئىنتىلگەندە، $s_n=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2$ نىڭ قىممىتى s قا ئىنتىلىدۇ، شۇڭا

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v\left(\frac{i-1}{n}\right)^{❶}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+2\right]$$

$$=\frac{5}{3}.$$

❶ ئەمەلىيەتتە، ئاپتوموبىل ھەربىر كىچىك ۋاقىت ئارىلىقى $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ دا تەقرىبىي ھالدا خالىغان پەيت $\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ دىكى تېزلىك $v(\xi_i)$ بىلەن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلىدۇ دەپ قارىيالايمىز ھەمدە

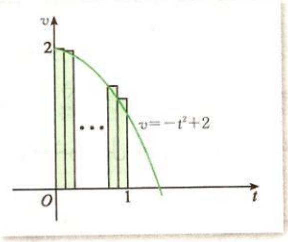
$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\,\Delta t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v(\xi_i).$$

ئىزدىنىش

سىزنىڭچە، ئاپتوموبىلنىڭ ماڭغان مۇساپىسى s بىلەن تۈز سىزىق $t=0$، $t=1$، $v=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $v=-t^2+2$ ئارقىلىق قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تېپىش جەريانىغا بىرلەشتۈرۈپ پىكىر يۈرگۈزۈڭ.

s_n سانلىق قىممەت جەھەتتە 6.5.1 ـ رەسىمدىكى بارلىق تىك تۆتبۇلۇڭلار يۈزلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولۇپ، ئۇنىڭ لىمىتى تۈز سىزىق $t=0$، $t=1$، $v=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $v=-t^2+2$ بىلەن قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىدىن ئىبارەت، شۇڭا ئاپتوموبىلنىڭ ماڭغان مۇساپىسى $s=\lim_{n\to\infty}s_n$ سانلىق قىممەت جەھەتتە تۈز سىزىق $t=0$، $t=1$، $v=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $v=-t^2+2$ بىلەن قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىگە تەڭ بولىدۇ.



6.5.1 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ئەگەر جىسىم تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان بولۇپ، تېزلىك فۇنكسىيىسى $v=v(t)$ بولسا، ئۇ ھالدا جىسىمنىڭ $a\leqslant t\leqslant b$ ئىچىدىكى ئورۇن يۆتكىلىشى s نى مۇ بۆلۈش، تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش، يىغىندىنى تېپىش، لىمىتىنى ئېلىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولىدۇ.

مەشىق

1. يۇقىرىدىكى «تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش» باسقۇچىدا، ئەگەر ھەربىر كىچىك ۋاقىت ئارىلىقى $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ دا، ئاپتوموبىل تەقرىبىي ھالدا پەيت $\frac{i}{n}$ دىكى تېزلىك $v\left(\frac{i}{n}\right)=-\left(\frac{i}{n}\right)^2+2$ بىلەن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلدى دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ ئارقىلىق ئاپتوموبىل ماڭغان ئومۇمىي مۇساپە s نىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى كەلتۈرۈپ چىقارساق، ئۇ ھالدا مۇشۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ s نىڭ ئېنىق قىممىتىنى تاپقىلى بولامدۇ؟ ئەگەر تاپقىلى بولسا، بۇ قىممەتمۇ $\frac{5}{3}$ كە تەڭ بولامدۇ؟

2. بىر ئاپتوموبىل تۈز تاشيولدا ئۆزگىرىشچان تېزلىك بىلەن ماڭدى. ئاپتوموبىلنىڭ t پەيتتىكى تېزلىكىنى $v(t)=-t^2+5$ (t نىڭ بىرلىكى: h، v نىڭ بىرلىكى: km/h) دەپ پەرەز قىلىپ، بۇ ئاپتوموبىلنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $0 \leqslant t \leqslant 2$ ئىچىدە ماڭغان مۇساپىسى s (بىرلىكى: km) نى ھېسابلاڭ.

3-5-1 ئېنىق ئىنتېگرال ئۇقۇمى

ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تېپىش ۋە تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەتنىڭ مۇساپىسىنى تېپىش جەريانىدىن بايقىيالايمىزكى، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسىنى «تۆت باسقۇچلۇق ئۇسۇل»، يەنى بۆلۈش، تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش، يىغىندىنى تېپىش، لىمىتىنى ئېلىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغىلى ھەمدە ھەر ئىككىسىنى ئالاھىدە كۆرۈنۈشتىكى بىر يىغىندىنىڭ لىمىتىنى تېپىشقا يىغىنچاقلىغىلى بولىدۇ:

ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى:

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\xi_i);$$

ئۆزگىرىشچان ھەرىكەتنىڭ مۇساپىسى:

$$s=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\,\Delta t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v(\xi_i).$$

ئەمەلىيەتتە، نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇ خىل ئالاھىدە كۆرۈنۈشتىكى يىغىندىنىڭ لىمىتىنى تېپىشقا يىغىنچاقلىغىلى بولىدۇ. ئومۇمەن:

$f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئۈزلۈكسىز بولغاندا، ئىنتېرۋال $[a, b]$ نى بۆلۈش نۇقتىسى

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

لار ئارقىلىق n دانە تەڭ كىچىك ئىنتېرۋالغا بۆلىمىز، ئاندىن ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋال $[x_{i-1}, x_i]$ دىن خالىغان بىر ξ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ نۇقتىنى ئېلىپ، يىغىندى

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i).$$

نى ھاسىل قىلساق، ئەگەر $n\to\infty$ بولغاندا، يۇقىرىقى يىغىندى مەلۇم بىر تۇراقلىق سانغا چەكسىز يې-

قىلىنلاشسا، ئۇ هالدا بۇ تۇراقلىق سان $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى **ئېنىق ئىنتېگرالى** (definite integral)❶ دەپ ئاتىلىپ، $\int_a^b f(x)dx$ قىلىپ يېزىلىدۇ، يەنى

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i),$$

بۇ يەردىكى a ۋە b ئايرىم ـ ئايرىم ئىنتېگرال تۆۋەن چېكى ۋە ئىنتېگرال يۇقىرى چېكى، ئىنتېرۋال $[a, b]$ ئىنتېگرال ئىنتېرۋالى، $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېگراللانغۇچى فۇنكسىيە (ئىنتېگرالى تېپىلىدىغان فۇنكسىيە)، x ئىنتېگرال ئۆزگەرگۈچىسى، $f(x)dx$ بولسا ئىنتېگراللانغۇچى ئىپادە (ئىنتېگرالى تېپىلىدىغان ئىپادە) دەپ ئاتىلىدۇ.

❶ $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئۈزلۈكسىز بولغاندا، بۇ يەردىكى ئىنىقلىما ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئاددىيتىكى ئېنىقلىمىسى بىلەن بىردەك بولىدۇ، ھەممە بارلىق ξ_i لار ئۈچۈن ھەربىر ماس كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ سول ئۇچى (ياكى ئوڭ ئۇچى)نى ئېلىشقا بولىدۇ.

ئېنىق ئىنتېگرال ئۇقۇمىغا ئاساسەن، 1.5.1 ـ پاراگرافتىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى:

$$S=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

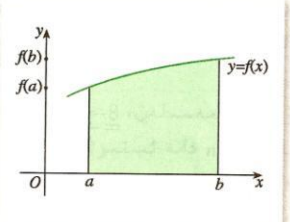
ئوخشاشلا، 2.5.1 ـ پاراگرافتىكى ئاپتوموبىلنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $0\leqslant t\leqslant 1$ ئىچىدە ماڭغان مۇساپىسى:

$$s=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(-t^2+2)\mathrm{d}t=\frac{5}{3}.$$

مۇلاھىزە؟

ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

گېئومېترىيىدىن قارىغاندا، ئەگەر $f(x)$ فۇنكسىيە ئىنتېرۋال $[a, b]$ دا ئۈزلۈكسىز ھەممە ھامان $f(x)\geqslant 0$ بولسا، ئۇ هالدا ئېنىق ئىنتېگرال $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ تۈز سىزىق $x=a$، $x=b(a\neq b)$، $y=0$ ۋە ئەگرى سىزىق $y=f(x)$ بىلەن قورشالغان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە (7.5.1 ـ رەسىمدىكى بويالغان شەكىل)نىڭ يۈزىنى ئىپادىلەيدۇ. مانا بۇ، ئېنىق ئىنتېگرال $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ نىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى.

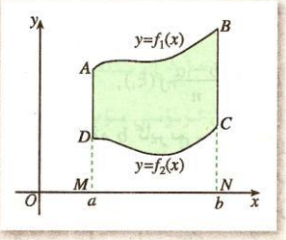


7.5.1 ـ رەسىم

CHAPTER 1

ئىزدىنىش

ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىگە ئاساسەن، 8.5.1 - رەسىمدىكى بويالغان شەكىلنىڭ يۈزى S نى ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلىيەلەمسىز؟



8.5.1 ـ رەسىم

ئاسانلا بايقىيالايمىزكى،

$$S=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

1 ـ مىسال. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ نىڭ قىممىتىنى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلايلى.

يېشىش: $f(x)=x^3$ دەپ ئالىمىز.

(1) بۆلۈش

ئىنتېرۋال $[0,1]$ غا تەڭ ئارىلىق تاشلاپ $n-1$ دانە بۆلۈش نۇقتىسىنى قىستۇرۇپ، ئۇنى n دانە تەڭ كىچىك ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ غا بۆلسەك، ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ ئۇزۇنلۇقى $\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$ بولىدۇ.

(2) تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش، يىغىندىنى تېپىش

$\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\approx S_n&=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\Delta x\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3\\&=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

(3) لىمىتنى ئېلىش

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ تۆۋەندىكى خۇسۇسىيەتلىرىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (تۇراقلىق سان k);

(2) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$.

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىدىكى (3) خۇسۇسىيەتنى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

مەشىق

$\int_0^2 x^3\mathrm{d}x$ نىڭ قىممىتىنى ھېسابلاڭ ھەم بۇ قىممەتنىڭ نېمىنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى گېئومېترىيىلىك تۇرغۇدىن چۈشەندۈرۈڭ.

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى

2.5.1 ـ رەسىمدىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى S نى تېپىشتا، بىز «ئەگرىنىڭ ئورنىغا تۈزنى قويۇپ» «يېقىنلاشتۇرۇش» جەريانىنى كومپيۇتېرنىڭ گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكى باسقۇچلار بويىچە نامايان قىلالايمىز ۋە بۇ ئارقىلىق «بۆلۈش، تەقرىبىي ئورنىغا قويۇش، يىغىندىنى تېپىش، لىمىتىنى ئېلىش»نىڭ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تېپىشتىكى ئاساسىي باسقۇچلار ئىكەنلىكىنى ھېس قىلىپ، ئېنىق ئىنتېگرال ئۇقۇمىنى كۆرسەتمىلىك ھالدا چۈشىنىۋالىمىز.

1. فۇنكسىيە $f(x)=x^2$ نىڭ ئىنتېرۋال $[0, 1]$ دىكى گرافىكىنى گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسىدىن پايدىلىنىپ سىزىمىز.

2. پارامېتىر n نى تۈرغۈزۈۋېلىپ (مەسىلەن، $n=8$)، ئىنتېرۋال $[0, 1]$ نى گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسىدىن پايدىلىنىپ n دانە ئىنتېرۋال

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

غا تەڭ قىلىپ بۆلىمىز ھەم ماس ھالدىكى بارلىق كىچىك ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىلەرنى سىزىمىز.

CHAPTER 1

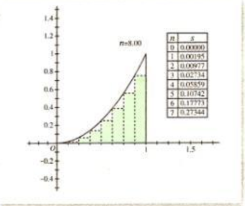
3. $f(x)=x^2$ نىڭ ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ دىكى قىممىتىنى سول ئۇچ $\frac{i-1}{n}$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ گە تەقرىبىي تەڭ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى S نىڭ كېمى بىلەن ئىپلىنغان تەقرىبىي قىممىتى

$$a(n)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

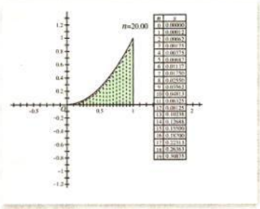
بولىدۇ. ئايرىم - ئايرىم $n=8,\ 20$ دەپ ئېلىپ، ماس ھالدىكى بارلىق كىچىك تىك تۆتبۇلۇڭلار-نى سىزىمىز ھەم ئۇلارنىڭ يۈزىنى ھېسابلايمىز، ئاندىن ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى S نىڭ كېمى بىلەن ئىپلىنغان تەقرىبىي قىممىتى

$$a(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

نى ھېسابلايمىز (1 - ۋە 2 - رەسىمدىكىدەك).



1 - رەسىم



2 - رەسىم

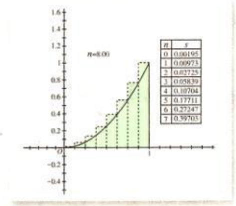
4. $f(x)=x^2$ نىڭ ئىنتېرۋال $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ دىكى قىممىتىنى ئوڭ ئۇچ $\frac{i}{n}$ دىكى فۇنكسىيە قىممىتى $f\left(\frac{i}{n}\right)$ گە تەڭ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى S نىڭ ئارتۇقى بىلەن ئىپلىنغان تەقرىبىي قىممىتى

$$b(n)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

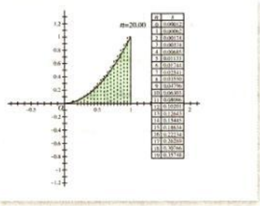
بولىدۇ. ئايرىم - ئايرىم $n=8,\ 20$ دەپ ئېلىپ، ماس ھالدىكى بارلىق كىچىك تىك تۆتبۇلۇڭلار-نى سىزىمىز ھەم ئۇلارنىڭ يۈزىنى ھېسابلايمىز، ئاندىن ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى S نىڭ ئارتۇقى بىلەن ئىپلىنغان تەقرىبىي قىممىتى

$$b(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

نى ھېسابلايمىز (3 - ۋە 4 - رەسىمدىكىدەك).



3 - رەسىم



4 - رەسىم

5. پارامېتىر n نىڭ قىممىتىنى بارا - بارا چوڭايتىپ، ئايرىم - ئايرىم $n=40, 100, 200, 1949, 2008 \cdots$ دەپ ئالىمىز، ئاندىن 2-، 3-، 4 - باسقۇچلارنى تەكرارلاپ، ئېنىقلىق دەرىجىسى $c(n)=b(n)-a(n)$ نى ھېسابلىساق، تۆۋەندىكى جەدۋەلگە ئېرىشىمىز:

ئېنىقلىق دەرىجىسى $c(n)$	Sنىڭ ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى $b(n)$	S نىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى $a(n)$	ئىنتېرۋال [0, 1] نىڭ تەڭ بۆلۈنۈش سانى n
0.125 000 00	0.398 437 50	0.273 437 50	8
0.050 000 00	0.358 750 00	0.308 750 00	20
0.025 000 00	0.345 937 50	0.320 937 50	40
0.010 000 00	0.338 350 00	0.328 350 00	100
0.005 000 00	0.335 837 50	0.330 837 50	200
0.000 513 08	0.333 589 92	0.333 076 84	1949
0.000 498 01	0.333 582 38	0.333 084 37	2008
…	…	…	…

جەدۋەلدىكى ئېنىقلىق دەرىجىسى $c(n)$ نىڭ ئۆزگىرىش يۈزلىنىشىدىن بايقىيالايمىزكى، ئىنتېرۋال [0, 1] قانچىكى ئۇششاق بۆلۈنسە، $a(n)$ ياكى $b(n)$ نى S نىڭ تەقرىبىي قىممىتى قىلغاندىكى پەرق شۇنچە كىچىك بولىدۇ. شۇڭا، ئىنتېرۋال [0, 1] بارغانسېرى ئۇششاق بۆلۈنگەندە، $a(n)$ بىلەن $b(n)$ ئايرىم - ئايرىم سول تەرەپ ۋە ئوڭ تەرەپتىن S قا ئىنتىلىدۇ.

5.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. $\int_1^2 (x-1)dx$ نىڭ تەقرىبىي قىممىتىنى تېپىڭ (ξ_i نى كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ سول ئۇچى دەپ ئېلىڭ):

(1) ئىنتېرۋال [1, 2] تەڭ 100 بۆلەككە بۆلۈنگەن؛

(2) ئىنتېرۋال [1, 2] تەڭ 500 بۆلەككە بۆلۈنگەن؛

(3) ئىنتېرۋال [1, 2] تەڭ 1000 بۆلەككە بۆلۈنگەن.

2. شوپۇر ئاپتوموبىلنى جىددىي تورمۇزلىغاندىن كېيىن ئۇ 5 s ئىچىدە توختىغان. ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلىنىش جەريانىدىكى تېزلىكلىرى جەدۋەلدە بېرىلدى:

تورمۇزلىغاندىن كېيىنكى ۋاقىت (بىرلىكى: s)	0	1	2	3	4	5
تېزلىك (بىرلىكى: m/s)	27	18	12	7	3	0

ئاپتوموبىلنىڭ تورمۇزلانغاندىن كېيىنكى سىيرىلىش ئارىلىقىنىڭ كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى (ھەربىر ξ_i ئۈچۈن كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ ئوڭ ئۇچى ئېلىنىدۇ) ۋە ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي

CHAPTER

قىممىتى (ھەربىر ξ_i ئۇچۇن كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ سول ئۇچى ئېلىنىدۇ)نى تېپىڭ.

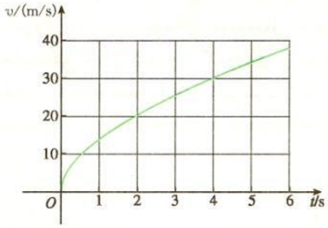
3. $\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a$ نى ئېنىق ئىنتېرۋالنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ، بۇنىڭدىكى a، b لار تۇراقلىق سان ھەمدە $a<b$.

4. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ نىڭ قىممىتىنى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ.

5. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ ھەم كېلىپ چىققان قىممەتلەرنىڭ ئايرىم - ئايرىم نېمىنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى گېئومېترىيىلىك تۇرغۇدىن چۈشەندۈرۈڭ.

(1) $\int_{-1}^0 x^3\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x$;　　(3) $\int_{-1}^2 x^3\mathrm{d}x$.

B گۇرۇپپا



(1 - مىسال ئۇچۇن)

1. رەسىمدە بىر جىسىمنىڭ ھەرىكەت تېزلىكى v (بىرلىكى: m/s) نىڭ ئۆزگىرىشى تەسۋىرلەندى. بۇ جىسىمنىڭ $t=0$ دىن $t=6$ (بىرلىكى: s) غىچە بولغان ئارىلىقتا باسقان مۇساپىسىنى مۆلچەرلەڭ.

2. بىر جىسىم يەر يۈزىدىن 150 m ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقتىن ئەركىن چۈشتى، ئۇنىڭ تېزلىنىشى $9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

(1) تېزلىكنى ۋاقىتنىڭ فۇنكسىيىسى قىلغاندىكى فۇنكسىيىلىك مۇناسىۋەت ئىپادىسىنى يېزىڭ.

(2) ۋاقىت بۆلىكى [0, 4] نى تەڭ 8 بۆلەككە بۆلۈپ، جىسىمنىڭ بوشلۇقتىن چۈشۈشكە باشلىغاندىكى ئالدىنقى 4 s تا باسقان ئارىلىقىنىڭ ئارتۇقى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى (ھەربىر ξ_i ئۇچۇن كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ ئوڭ ئۇچى ئېلىنىدۇ) ۋە كېمى بىلەن ئېلىنغان تەقرىبىي قىممىتى (ھەربىر ξ_i ئۇچۇن كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ سول ئۇچى ئېلىنىدۇ)نى ھېسابلاڭ.

(3) جىسىمنىڭ ئالدىنقى 4 s تا باسقان ئارىلىقى s نى ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ ھەم s نىڭ ئېنىق قىممىتىنى تېپىڭ.

3. سۇپىتى تەكشى بولمىغان بىر ئىنچىكە تاياقنىڭ سىزىقلىق زىچلىقى $\rho(x)=x^2$ (تاياق ياتقان تۈز سىزىق x ئوق، تاياقنىڭ بىر ئۇچى كوئوردىنات بېشى قىلىپ ئېلىنىدۇ) بولۇپ، ئۇنىڭ ئۇزۇنلۇقى l بولسا، تاياقنىڭ ماسسىسى m نى ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ.

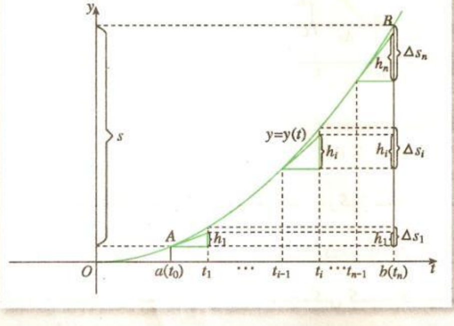
6-1 دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى

ئىلگىرىكى ئۆگىنىشلەردىن شۇنى بايقىيالايمىزكى، گەرچە ئىنتېگراللانغۇچى فۇنكسىيە $f(x)=x^3$ نىڭ كۆرۈنۈشى ناھايىتى ئاددىي بولسىمۇ، لېكىن $\int_0^1 x^3 dx$ نىڭ قىممىتىنى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىۋاستە پايدىلىنىپ ھېسابلاشتا ئاۋارىچىلىك خېلى كۆپ بولىدۇ. بەزى ئېنىق ئىنتېگراللارنى، مەسىلەن، $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ [1] نى ئېنىقلىمىدىن بىۋاستە پايدىلىنىپ ھېسابلاش مۇمكىن ئەمەس دېيەرلىكلا. ئۇنداق بولسا، ئىنتېگرالنى تېپىشقا بولىدىغان تېخىمۇ ئاددىي ھەم ئۈنۈملۈك ئۇسۇل بارمۇ؟ ئۇنىڭدىن باشقا، بىز دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالدىكى ئەڭ ئاساسىي ۋە ئەڭ مۇھىم ئىككى ئۇقۇم ــ ھاسىلە ۋە ئېنىق ئىنتېگرالنى ئۆگەندۇق، بۇ ئىككى ئۇقۇم ئارىسىدا ئىچكى باغلىنىش بارمۇ؟ ئەگەر ئۇلار ئارىسىدا ئىچكى باغلىنىش بولسا، ئېنىق ئىنتېگرالنى مۇشۇ خىل ئىچكى باغلىنىشتىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولامدۇ؟

❶ $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ نى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىۋاستە پايدىلىنىپ ھېسابلاپ كۆرۈڭ.

بىز ئاۋۋال ھاسىلە بىلەن ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ باغلىنىشىنى مۇھاكىمە قىلايلى.

ئىزدىنىش



1.6.1 ـ رەسىم

1.6.1 ـ رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان بىر جىسىمنىڭ ھەرىكەت قانۇنىيىتى $y=y(t)$ بولسا، ھاسىلە ئۇقۇمىدىن بىلەلەيمىزكى، بۇ جىسىمنىڭ خالىغان t پەيتتىكى تېزلىكى $v(t)=y'(t)$ بولىدۇ. بۇ جىسىمنىڭ ۋاقىت بۆلىكى $[a, b]$ ئىچىدىكى ئورۇن يۆتكىلىشىنى s دەپ پەرەز قىلىپ، s نى ئايرىم ـ ئايرىم $y(t)$ ۋە $v(t)$ بىلەن ئىپادىلىيەلەمسىز؟

روشەنكى، جىسىمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشى s فۇنكسىيە $y=y(t)$ نىڭ $t=b$ ۋە $t=a$ دىكى فۇنكسىيە قىممەتلىرىنىڭ ئايرىمىسىغا تەڭ، يەنى

$$s=y(b)-y(a). \quad ①$$

يەنە بىر تەرەپتىن، بىز ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ، ئورۇن يۆتكىلىش s نى $v=(t)$ غا ئاساسەن تاپالايمىز.

ئىنتېرۋال $[a, b]$ نى بۆلۈش نۇقتىسى

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b$$

ئارقىلىق تەڭ n دانە كىچىك ئىنتېرۋالغا بۆلسەك:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{i-1}, t_i], \cdots, [t_{n-1}, t_n],$$

ھەربىر كىچىك ئىنتېرۋالنىڭ ئۇزۇنلۇقى:

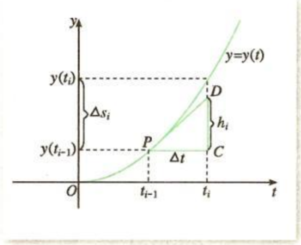
$$\Delta t=t_i-t_{i-1}=\frac{b-a}{n}.$$

Δt ناھايىتى كىچىك بولغاندا، $[t_{i-1}, t_i]$ دىكى $v(t)$ نىڭ ئۆزگىرىشى ناھايىتى كىچىك بولۇپ، جىسىمنى تەقرىبىي ھالدا $v(t_{i-1})$ تېزلىك بىلەن تۈز سىزىقلىق تەكشى ھەرىكەت قىلدى دەپ قاراشقا بولىدۇ، ئۇنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشى:

$$\Delta s_i \approx h_i=v(t_{i-1})\,\Delta t=y'\,(t_i-1)\,\Delta t=\frac{b-a}{n}y'\,(t_{i-1}). \quad ②$$

گېئومېترىيىلىك مەنىدىن پىكىر يۈرگۈزگەندە (2.6.1- رەسىم)، ئەگرى سىزىق $y=y(t)$ ئۈستىدە ياتقان ھەمدە t_{i-1} گە ماس كېلىدىغان نۇقتىنى P، P نۇقتىدىن ئۆتكەن ئۇرۇنمىنى PD دەپ پەرەز قىلساق، ھاسىلىنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىدىن PD ئۇرۇنمىنىڭ يانتۇلۇقى $y'\,(t_{i-1})$ گە تەڭ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز، شۇنىڭ بىلەن:

$$\Delta s_i \approx h_i=\tan\angle DPC\cdot\Delta t=y'\,(t_{i-1})\cdot\Delta t.$$



2.6.1 - رەسىم

1.6.1 - رەسىمگە بىرلەشتۈرۈپ پىكىر يۈرگۈزسەك، جىسىمنىڭ ئومۇمىي ئورۇن يۆتكىلىشى:

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n}h_i=\sum_{i=1}^{n}v(t_{i-1})\,\Delta t=\sum_{i=1}^{n}y'\,(t_{i-1})\,\Delta t.$$

روشەنكى، n قانچىكى چوڭ، يەنى Δt قانچىكى كىچىك بولسا، ئىنتېرۋال $[a, b]$ نىڭ كىچىك ئىنتېرۋاللارغا بۆلۈنۈشى شۇنچە ئۇششاق بولۇپ، $\sum_{i=1}^{n}v(t_{i-1})\,\Delta t=\sum_{i=1}^{n}y'\,(t_{i-1})\,\Delta t$ نىڭ s قا بولغان تەقرىبىي-

لىك دەرىجىسى شۇنچە يۇقىرى بولىدۇ. ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}v(t_{i-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}y'(t_{i-1})$$

$$=\int_a^b v(t)\,dt=\int_a^b y'(t)dt.$$

بۇنى ① گە بىرلەشتۈرۈپ پىكىر يۈرگۈزسەك:

$$s=\int_a^b v(t)\,dt=\int_a^b y'(t)dt=y(b)-y(a).$$

يۇقىرىقى ئىپادە شۇنى بىلدۈرىدۇكى، ئەگەر تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان جىسىمـ ـنىڭ ھەرىكەت قانۇنىيىتى $y=y(t)$ بولسا، ئۇ ھالدا $v(t)=y'(t)$ نىڭ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى ئېنىق ئىنتېگرالى دەل جىسىمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشى $y(b)-y(a)$ بولىدۇ.

ئومۇمەن، ئەگەر $f(x)$ ئىنتېرۋال $[a, b]$ دىكى ئۈزلۈكسىز فۇنكسىيە بولۇپ، يەنە $F'(x)=f(x)$ بولـ ـسا، ئۇ ھالدا

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

بۇ يەكۈن **دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى** (fundamental theorem of calculus)، شۇنداقلا **نيۇتون ـ لايبنىس تېئورېمىسى** (Newton – Leibniz Formula) دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، بىز كۆپ ھاللاردا $F(b)-F(a)$ نى $F(x)\big|_a^b$ قىلىپ يازىمىز، يەنى

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a).$$

دىففېرېنسىئال ـ ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى شۇنى بىلدۈرىدۇكى، ئېنىق ئىنتېگرال $\int_a^b f(x)dx$ نى ھېسابلاشتىكى ئاچقۇچلۇق مەسىلە $F'(x)=f(x)$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان $F(x)$ فۇنكسىـ ـيىنى تېپىشتىن ئىبارەت. ئادەتتە، بىز ئاساسىي ئېلېمېنتار فۇنكسىيىلەرنىڭ ھاسىلىسىنى تېـ ـپىش فورمۇلىسى ۋە ھاسىلە ئۈستىدە تۆت ئەمەل قائىدىسىنى تەتۈر يۆنىلىشتە قوللىنىپ $F(x)$ نى تاپىمىز.

1 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ:

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$;　　　(2) $\int_1^3\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

يېشىش:

(1) $\because\ (\ln x)'=\frac{1}{x}$,

$\therefore\ \int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln x\big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$

(2) $\because\ (x^2)'=2x,\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,

$$\therefore\ \int_1^3\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^3 2x\ dx-\int_1^3\frac{1}{x^2}dx$$

$$=x^2\Big|_1^3+\frac{1}{x}\Big|_1^3$$

$$=(9-1)+\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{22}{3}.$$

2 ـ مىسال. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلايلى:

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx,\ \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx,\ \int_0^{2\pi}\sin x\,dx.$$

ھېسابلاش نەتىجىسىدىن قانداق يەكۈننى بايقىيالايسىز؟ بايقىغان يەكۈنىڭىزنى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىدىن پايدىلىنىپ ئىپادىلەڭ.

يېشىش:

$\because\ (-\cos x)'=\sin x$,

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=2;$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

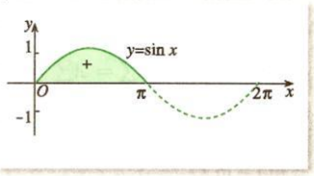
$$=(-\cos 2\pi)-(-\cos\pi)=-2;$$

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=(-\cos 2\pi)-(-\cos 0)=0.$$

بايقاشقا بولىدۇكى، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ قىممىتى مۇسبەت قىممەت ياكى مەنپىي قىممەت بولۇشى، شۇنداقلا 0 بولۇپ قېلىشىمۇ مۇمكىن.

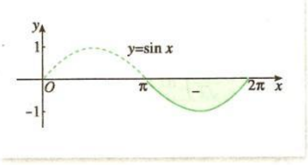
(1) ماس ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە x ئوقنىڭ يۇقىرى تەرىپىدە بولغاندا (3.6.1 ـ رەسىم)، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ قىممىتى مۇسبەت قىممەت بولىدۇ ھەمدە ئۇ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىگە تەڭ؛



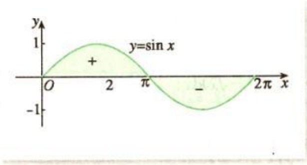
3.6.1 ـ رەسىم

(2) ماس ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە x ئوقنىڭ تۆۋەن تەرىپىدە بولغاندا (4.6.1 - رەسىم)، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ قىممىتى مەنپىي قىممەت بولىدۇ ھەمدە ئۇ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە يۈزىنىڭ قارىمۇ-قارشى سانىغا تەڭ.

(3) x ئوقنىڭ يۇقىرى تەرىپىدە ياتقان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزى x ئوقنىڭ تۆۋەن تەرىپىدە ياتقان ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىگە تەڭ بولغاندا، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ قىممىتى 0 بولىدۇ (5.6.1 - رەسىم) ھەمدە ئۇ x ئوقنىڭ يۇقىرى تەرىپىدىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىدىن x ئوقنىڭ تۆۋەن تەرىپىدىكى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى ئېلىۋەتكەنگە تەڭ.



4.6.1 - رەسىم



5.6.1 - رەسىم

دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى ھاسىلە بىلەن ئېنىق ئىنتېگرال ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىشنى يورۇتۇپ بېرىدۇ، شۇنداقلا ئۇ بىزنى ئېنىق ئىنتېگرالنى ھېسابلاشنىڭ بىر ئۈنۈملۈك ئۇسۇلى بىلەن تەمىن ئېتىدۇ. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئىلمىدىكى ئەڭ مۇھىم تېئورېما بولۇپ، ئۇ دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئىلمىنىڭ جۇش ئۇرۇپ تەرەققىي قىلىشى ۋە تەسىرى چوڭقۇر بىر پەن بولۇپ شەكىللىنىشىگە سەۋەب بولغان. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسىنى دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئىلمىدىكى ئەڭ مۇھىم، ئەڭ پارلاق نەتىجە دەپ تەرىپلەش ھەرگىزمۇ ئاشۇرۇۋەتكەنلىك ئەمەس.

مەشىق

تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ:

(1) $\int_0^5 4x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^5 (x^2-2x)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-1}^3 (3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^2 \left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$;

(6) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,\mathrm{d}x$.

CHAPTER

6.1 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ:

(1) $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)\mathrm{d}x$;　(2) $\int_1^2 \frac{x^2-2x-3}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_2^3 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$;　(4) $\int_1^4 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x+\sin x)\mathrm{d}x$;　(6) $\int_1^2 \left(\mathrm{e}^x-\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$.

2. ئېنىق ئىنتېگرال $\int_0^{3\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$ نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ ھەم بۇ قىممەتنىڭ نېمىنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى گېئومېتىرىيىلىك تۇرغۇدىن چۈشەندۈرۈڭ.

B گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ:

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$;　(3) $\int_1^3 2^x\,\mathrm{d}x$.

2. m نى مۇسبەت پۈتۈن سان دەپ پەرەز قىلىپ، تۆۋەندىكى تەڭلىكلەرنى ئىسپاتلاڭ:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\mathrm{d}x = 0$;　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,\mathrm{d}x = \pi$;　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,\mathrm{d}x = \pi$.

3. تەجرىبە قىلىنغان بىر جىسىم ئايروپىلاندىن قاڭقىپ چىققاندا پاراشوتى ئېچىلماي قالدى. قاڭقىپ چىقىپ ts تىن كېيىن، جىسىمنىڭ چۈشۈش تېزلىكى (تىك يۆنىلىشتىكى تەشكىل قىلغۇچى تېزلىك) تەقرىبىي ھالدا تۆۋەندىكىدەك بولغان:

$$v(t)=\frac{g}{k}(1-e^{-kt}),\ (k=0.2\,\mathrm{s}^{-1}\text{، }g=9.8\,\mathrm{m/s^2}\ \text{بولغاندا}).$$

(1) تەجرىبە قىلىنغان جىسىمنىڭ ts تىن كېيىنكى چۈشۈش ئارىلىقىنىڭ ئىپادىسىنى يېزىڭ؛

(2) ئەگەر تەجرىبە قىلىنغان جىسىم 5000m ئېگىزلىكتىكى بوشلۇقتىن قاڭقىپ چىقىپ تۆۋەنگە چۈشكەن بولسا، ئۇ ھالدا بۇ جىسىم تەخمىنەن قانچە سېكۇنتتىن كېيىن يەر يۈزىگە تېگىدۇ؟

7-1 ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئاددىي قوللىنىلىشى

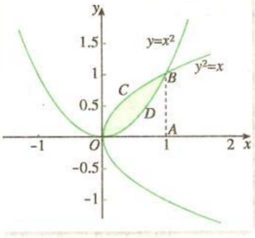
بىز ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى ھېسابلاشقا، تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان جىسىمنىڭ ئورۇن يۆتكىلىشىنى تېپىشقا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈپ ئۆتتۇق. ئەمەلىيەتتە، ئېنىق ئىنتېگرال ناھايىتى كەڭ قوللىنىلىدۇ. تۆۋەندە ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ بەزى ئاددىي قوللىنىلىشلىرىنى تونۇشتۇرىمىز.

1-7-1 ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېترىيىدىكى قوللىنىلىشى

1 ـ مىسال. ئەگرى سىزىق $y^2=x$ ۋە $y=x^2$ بىلەن قورشالغان شەكىلنىڭ يۈزى S نى تاپايلى.

تەھلىل: ئالدى بىلەن دەسلەپكى سىزمىسىنى سىزىۋالىمىز (1.7.1 ـ رەسىم). رەسىمدىن تاپماقچى بولغان شەكىلنىڭ يۈزىنى ئىككى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە يۈزلىرىنىڭ ئايرىمىسىغا ئايلاندۇرۇۋېلىپ، ئاندىن يۈز S نى ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ تېپىشقا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈۋالالايمىز. ئىنتېگراللانغۇچى فۇنكسىيە ۋە ئىنتېگرالنىڭ يۇقىرى، تۆۋەن چەكلىرىنى بەلگىلەش ئۈچۈن، ئىككى ئەگرى سىزىقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسىنى تېپىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ.

يېشىش: ئەگرى سىزىق $y^2=x$ ۋە $y=x^2$ نىڭ دەسلەپكى سىزمىسىنى سىزساق، تاپماقچى بولغان يۈز 1.7.1 ـ رەسىمدىكى بويالغان شەكىلنىڭ يۈزى بولىدۇ.



1.7.1 ـ رەسىم

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2 \end{cases}$$

نى يېشىپ، كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسى $x=0$ ۋە $x=1$ گە ئېرىشىمىز.

شۇڭا، تاپماقچى بولغان شەكىلنىڭ يۈزى:

$$S=S_{\text{ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە }OABC}-S_{\text{ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيە }OABD}$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$$

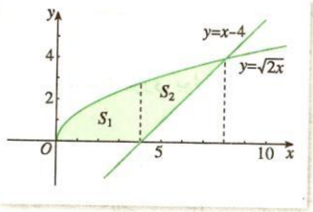
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

2 - مىسال. تۈز سىزىق $y=x-4$، ئەگرى سىزىق $y=\sqrt{2x}$ ۋە x ئوق بىلەن قورشالغان شەكىلنىڭ يۈزى S نى تاپايلى.

تەھلىل: ئالدى بىلەن دەسلەپكى سىزمىسىنى سىزىۋالىمىز (2.7.1 - رەسىم) ھەم تاپماقچى بولغان شەكىلنىڭ يۈزىنى تېپىش مەسىلىسىنى ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى تېپىش مەسىلىسىگە ئايلاندۇرۇشنىڭ ئامالىنى قىلىمىز. 1 - مىسالدىكىسىگە ئوخشاشمايدىغان يېرى شۇكى، بۇ يەردە تاپماقچى بولغان شەكىلنىڭ يۈزىنى S_1 ۋە S_2 دىن ئىبارەت ئىككى قىسىمغا ئايرىشقا توغرا كېلىدۇ. ئىنتېگراللانغۇچى فۇنكسىيە ۋە ئىنتېگرالنىڭ يۇقىرى، تۆۋەن چەكلىرىنى بەلگىلەش ئۈچۈن، يەنە تۈز سىزىق $y=x-4$ بىلەن ئەگرى سىزىق $y=\sqrt{2x}$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ ئابسىسساسىنى ۋە تۈز سىزىق $y=x-4$ بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنى تېپىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ.

يېشىش: تۈز سىزىق $y=x-4$ ۋە ئەگرى سىزىق $y=\sqrt{2x}$ نىڭ دەسلەپكى سىزمىسىنى سىزساق، تاپماقچى بولغان يۈز 2.7.1 - رەسىمدىكى بويالغان شەكىلنىڭ يۈزى بولىدۇ.



2.7.1 - رەسىم

تەڭلىمىلەر سىستېمىسى

$$\begin{cases}y=\sqrt{2x},\\ y=x-4\end{cases}$$

نى يېشىپ، تۈز سىزىق $y=x-4$ بىلەن ئەگرى سىزىق $y=\sqrt{2x}$ نىڭ كېسىشىش نۇقتىسىنىڭ كوئوردىناتى (8, 4) كە ئېرىشىمىز.

تۈز سىزىق $y=x-4$ بىلەن x ئوقنىڭ كېسىشىش نۇقتىسى (4, 0) بولىدۇ.

شۇڭا، تاپماقچى بولغان شەكىلنىڭ يۈزى:

$$
\begin{aligned}
S &= S_1+S_2 \\
&= \int_0^4 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x + \left[\int_4^8 \sqrt{2x}\,\mathrm{d}x - \int_4^8 (x-4)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 + \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_4^8 - \frac{1}{2}(x-4)^2 \Big|_4^8 \\
&= \frac{40}{3}.
\end{aligned}
$$

مۇلاھىزە ?

بۇ مسالنى يېشىشنىڭ باشقا ئۇسۇللىرى بارمۇ؟ ئەگەر بار بولسا، بۇ يېشىش ئۇسۇللىرىنى يېزىپ چىقىڭ ھەم ئۇلارنى سېلىشتۇرۇڭ.

يۇقىرىدا كەلتۈرۈلگەن مىساللاردىن تەكشىلىك شەكىللىرىنىڭ يۈزىنى ئېنىق ئىنتېگرالدىن پايدىلىنىپ تېپىشتا، ئادەتتە ئالدى بىلەن شەكىلنىڭ دەسلەپكى سىزمىسىنى سىزىۋېلىپ، ئاندىن ئىنتېگراللانغۇچى فۇنكسىيە ۋە ئىنتېگرالنىڭ يۇقىرى، تۆۋەن چەكلىرىنى شەكىلنىڭ بىۋاستە كۆرۈنۈشلۈكىگە تايىنىپ بەلگىلىۋېلىشقا توغرا كېلىدىغانلىقىنى بايقىيالايمىز.

مەشىق

تۆۋەندىكى ئەگرى سىزىق ۋە تۈز سىزىقلار بىلەن قورشالغان شەكىلنىڭ يۈزىنى تېپىڭ:

(1) $y=x^2$, $y=2x+3$;   (2) $y=e^x$, $y=e$, $x=0$.

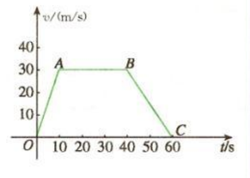
2-7-1 ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ فىزىكىدىكى قوللىنىلىشى

1. تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان جىسىمنىڭ باسقان مۇساپىسى

بىزگە مەلۇمكى، تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەت قىلغان جىسىمنىڭ باسقان مۇساپىسى s تېزلىك فۇنكسىيىسى $v=v(t)$ $(v(t)\geqslant 0)$ نىڭ ۋاقىت ئىنتېرۋالى $[a, b]$ دىكى ئېنىق ئىنتېگرالىغا تەڭ، يەنى

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t\,.$$

3 ـ مىسال. بىر ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىك ـ ۋاقىت ئەگرى سىزىقى 3.7.1 ـ رەسىمدە كۆرسىتىلدى، ئاپتوموبىلنىڭ مۇشۇ 1min تا ماڭغان مۇساپىسىنى تاپايلى.



3.7.1 ـ رەسىم

CHAPTER

يېشىش: تېزلىك - ۋاقىت ئەگرى سىزىقىدىن بەلگىلەيمىزكى:

$$v(t)=\begin{cases}3t, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ 30, & 10\leqslant t\leqslant 40,\\ -1.5t+90, & 40\leqslant t\leqslant 60.\end{cases}$$

شۇڭا، ئاپتوموبىلنىڭ مۇشۇ 1 min تا ماڭغان مۇساپىسى:

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{10}3t\,\mathrm{d}t+\int_{10}^{40}30\mathrm{d}t+\int_{40}^{60}(-1.5t+90)\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{2}t^2\Big|_0^{10}+30t\Big|_{10}^{40}+(-\frac{3}{4}t^2+90t)\Big|_{40}^{60}\\&=1\,350\ (\mathrm{m}).\end{aligned}$$

جاۋابى: ئاپتوموبىلنىڭ مۇشۇ 1 min تا ماڭغان مۇساپىسى 1350 m .

2. ئۆزگىرىشچان كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشى

بىر جىسىم تۇراقلىق كۈچ F (بىرلىكى: N) نىڭ تەسىرىدە تۈز سىزىقلىق ھەرىكەت قىلدى. ئەگەر جىسىمنىڭ F كۈچنىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشتە يۆتكەلگەن ئارىلىقى s (بىرلىكى: m) بولسا، ئۇ ھالدا F كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشى:

$$W=Fs.$$

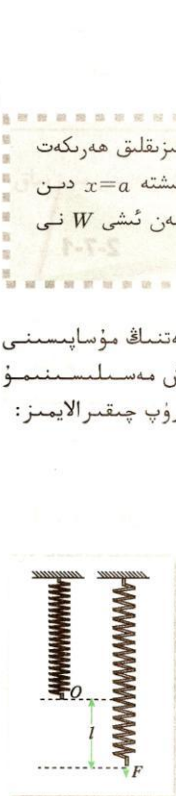
ئىزدىنىش

ئەگەر جىسىم ئۆزگىرىشچان كۈچ $F(x)$ نىڭ تەسىرىدە تۈز سىزىقلىق ھەرىكەت قىلغان ھەم ئۇ $F(x)$ كۈچنىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشتە $x=a$ دىن $x=b$ $(a<b)$ غا يۆتكىلىپ كەلگەن بولسا، ئۇ ھالدا ئۆزگىرىشچان كۈچ $F(x)$ نىڭ ئىشلىگەن ئىشى W نى قانداق ھېسابلاش كېرەك؟

ئەگرى تەرەپلىك تراپېتسىيىنىڭ يۈزىنى ۋە تۈز سىزىقلىق ئۆزگىرىشچان ھەرىكەتنىڭ مۇساپىسىنى ھېسابلىغاندىكىگە ئوخشاش، بىز ئۆزگىرىشچان كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشىنى تېپىش مەسىلىسىنىمۇ «تۆت باسقۇچلۇق ئۇسۇل»دىن پايدىلىنىپ ھەل قىلالايمىز ھەمدە تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

4 - مىسال. 4.7.1 - رەسىمدىكىدەك، ئېلاستىكلىق چېكىنىڭ دائىرىسى ئىچىدە، تەڭپۇڭ ئورۇندا تۇرغان بىر پۇرژىنا شۇ ئورۇندىن l m نېرىدىكى بىر ئورۇنغا تارتىپ كېلىنگەن بولسا، ئېلاستىكلىق كۈچنى يېڭىش ئۈچۈن ئىشلەنگەن ئىشنى تاپايلى.



4.7.1 - رەسىم

يېشىش: ئېلاستىكلىق چېكىنىڭ دائىرىسى ئىچىدە، پۇرژىنىنى تارتىش (ياكى سىقىش) ئۈچۈن كېتىدىغان كۈچ $F(x)$ بىلەن پۇرژىنىنىڭ تارتىلىش (ياكى سىقىلىش) ئۇزۇنلۇقى x ئوڭ تاناسىپ تۈزىدۇ، يەنى

$$F(x)=kx,$$

بۇنىڭدىكى تۇراقلىق سان k بولسا تاناسىپ كوئېففىتسىيېنتى.

ئۆزگىرىشچان ئىشنىڭ ئىشلىگەن ئىشنى تېپىش فورمۇلىسىغا ئاساسەن:

$$W=\int_0^l kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^l=\frac{1}{2}kl^2\ (\mathrm{J}).$$

جاۋابى: ئېلاستىكلىق كۈچنى يېڭىش ئۈچۈن ئىشلەنگەن ئىش $\frac{1}{2}kl^2$ J .

مەشىق

1. بىر جىسىم تۈز سىزىقنى بويلاپ $v=2t+3$ (t نىڭ بىرلىكى: s، v نىڭ بىرلىكى: m/s) تېزلىك بىلەن ھەرىكەت قىلغان بولسا، جىسىمنىڭ 3 ~ 5s ئارىلىقىدا باسقان مۇساپىسىنى تېپىڭ.

2. بىر جىسىم $F(x)=3x+4$ (x نىڭ بىرلىكى: m، F نىڭ بىرلىكى: N) كۈچنىڭ تەسىرىدە F كۈچنىڭ يۆنىلىشى بىلەن ئوخشاش يۆنىلىشتە $x=0$ ئورۇندىن $x=4$ ئورۇنغا يۆتكىلىپ كەلگەن بولسا، $F(x)$ كۈچنىڭ ئىشلىگەن ئىشنى تېپىڭ.

7.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئەگرى سىزىق ۋە تۈز سىزىقلار بىلەن قورشالغان شەكىلنىڭ يۈزىنى تېپىڭ:

(1) $y=\cos x,\ \ x=\frac{\pi}{2},\ \ x=\frac{3\pi}{2},\ \ y=0;$

(2) $y=9-x^2,\ \ y=x+7.$

2. $+q$ زەرەت بىلەن زەرەتلەنگەن نۇقتىۋى زەرەتنى r ئوقتىكى كوئوردىنات بېشىغا قويۇش ئارقىلىق بىر ئېلېكتر مەيدانى ھاسىل قىلىنغان. بۇ ئېلېكتر مەيداندا، كوئوردىنات بېشىدىن r ئارىلىقتا تۇرغان بىرلىك زەرەت ئۇچرايدىغان ئېلېكتر كۈچىنى فورمۇلا $F=k\frac{q}{r^2}$ (kتۇراقلىق سان)دىن پايدىلىنىپ ئېنىقلىغىلى بولىدۇ. بۇ ئېلېكتر مەيداندا، بىر بىرلىك مۇسبەت زەرەت ئېلېكتر مەيدان كۈچىنىڭ تەسىرىدە r ئوقنىڭ يۆنىلىشىنى بويلاپ $r=a$ ئورۇندىن $r=b(a<b)$ ئورۇنغا يۆتكىلىپ كەلگەن بولسا، ئېلېكتر مەيدان كۈچىنىڭ بۇ بىرلىك مۇسبەت زەرەتكە ئىشلىگەن ئىشنى تېپىڭ.

3. دەسلەپكى تېزلىك 40 m/s بىلەن يۇقىرىغا تىك ئېتىلغان بىر جىسىمنىڭ ts پەيتتىكى تېزلىكى $v=40-10t$ (بىرلىكى: m/s) بولسا، قانچە سېكۇنتتىن كېيىن بۇ جىسىمنىڭ ئېگىزلىكى ئەڭ يۇقىرى بولىدۇ؟ ئەڭ يۇقىرى ئېگىزلىكى قانچە مېتىر بولىدۇ؟

4. A جىسىم بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە $v=3t^2+1$ (t نىڭ بىرلىكى: s، v نىڭ بىرلىكى m/s) تېزلىك بىلەن ھەرىكەت قىلىدى. A جىسىمنىڭ بۇ تۈز سىزىق ئۈستىدە ھەرىكەتنى باشلىغاندىكى شۇ پەيتتە، ئۇنىڭ 5m ئالدىدىكى B جىسىممۇ مۇشۇ تۈز سىزىق ئۈستىدە $v=10t$ (t نىڭ بىرلىكى: s، v نىڭ بىرلىكى: m/s) تېزلىك بىلەن A جىسىمنىڭ يۆنىلىشىگە ئوخشاش يۆنىلىشتە ھەرىكەت قىلغان بولسا، ئىككى جىسىم قايسى پەيتتە ئۇچرىشىدۇ؟ ئۇلار ئۇچراشقان ئورۇن بىلەن A جىسىم ھەرىكەتنى باشلىغاندىكى ئورۇننىڭ ئارىلىقى قانچىلىك؟

5. پۇرژىنا ئۇچرىغان سىقىش كۈچى F بىلەن پۇرژىنىنىڭ سىقىلىش ئارىلىقى l نى گۇك قانۇنى $F=kl$ دىن پايدىلىنىپ ھېسابلىغىلى بولىدۇ. ئەگەر 10 N لۇق كۈچ پۇرژىنىنى 1 cm سىقالىسا، پۇرژىنىنى تەڭپۇڭ ئورۇنىدىن 10 cm سىقىش (ئېلاستىكلىق چېكىنىڭ دائىرىسى ئىچىدە) ئۈچۈن قانچىلىك ئىش ئىشلىنىشى كېرەك؟

6. تۈز رېلىستا كېتىۋاتقان بىر پويىز جىددىي ئەھۋالغا يولۇقۇپ، $v(t)=5-t+\frac{55}{1+t}$ (t نىڭ بىرلىكى: s، v نىڭ بىرلىكى: m/s) تېزلىكتىن جىددىي تورمۇزلانغاندىن كېيىن توختىغان.

(1) جىددىي تورمۇزلانغاندىن تارتىپ پويىز تامامەن توختاپ بولغىچە قانچىلىك ۋاقىت كەتكەن؟

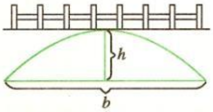
(2) پويىزنىڭ جىددىي تورمۇزلانغاندىن كېيىن باسقان مۇساپىسى قانچىلىك؟

B گۇرۇپپا

1. ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ خۇسۇسىيىتى ۋە ئۇنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىگە ئاساسەن، تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ قىممىتىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; (2) $\int_{0}^{1}(\sqrt{1-(x-1)^2}-x)\,dx$.

2. رەسىمدىكىدەك، بىر كۆۋرۈكنىڭ ئەگمىسى پارابولا شەكلىدە بولۇپ، ئۇنىڭ ئېگىزلىكى تۇراقلىق سان h قا، كەڭلىكى تۇراقلىق سان b غا تەڭ بولسا، ئەگمىنىڭ يۈزى $S=\frac{2}{3}bh$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.



(2 - مىسال ئۈچۈن)

3. ئەگرى سىزىق $y=x^2+2$ ۋە تۈز سىزىق $y=3x$، $x=0$، $x=2$ لەر بىلەن قورشالغان تەكشىلىك شەكلىنىڭ يۈزىنى تېپىڭ.

4. ئىسپاتلاڭ: ماسسىسى m (بىرلىكى: kg) بولغان جىسىم يەر شارى سىرتقى يۈزىدىن h (بىرلىكى: m) ئېگىزلىككە كۆتۈرۈلگەندە ئىشلەنگەن ئىش

$$W=G\frac{Mmh}{R(R+h)}$$

بولىدۇ، بۇنىڭدىكى G يەر شارى تارتىش كۈچى تۇراقلىق سانى، M يەر شارىنىڭ ماسسىسى، R بولسا يەر شارىنىڭ رادىئۇسى.

1 - باب

دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالغا كىرىش

مەقسەت

دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشىنىڭ دەۋر ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە ئۇنىڭ تارىخىي ئەھمىيىتىگە ئالاقىدار ماتېرىياللارنى توپلاپ، دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ ماتېماتىكا ئىدىيە تارىخى ۋە ئىلىم - پەن ئىدىيە تارىخىدىكى قىممىتىنى ھېس قىلىش.

جەريان

1. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال (differential and integral calculus) فۇنكسىيىنىڭ دىففېرېنسىئالى (differential)، ئىنتېگرالى (integral) ھەمدە ئالاقىدار ئۇقۇملار ۋە ئۇلارنىڭ قوللىنىلىشىنى تەتقىق قىلىدىغان ماتېماتىكىنىڭ تارمىقىدۇر. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالدىكى ئاساسىي ئۇقۇملاردىن لىمىت، ھاسىلە، ئىنتېگرال قاتارلىقلار بار. ھاسىلە ۋە ئېنىق ئىنتېگرال دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالدىكى يادرولۇق ئۇقۇم ھېسابلىنىدۇ.

◆ ئوقۇغۇچىلار «دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال» تونۇشتۇرۇلغان ئالاقىدار كىتابلارنى توپلاپ، دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالدا تەتقىق قىلىنىدىغان ئوبيېكتنى ۋە دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالغا دائىر ئاساسىي ئۇقۇملارنى بىلىۋېلىشى كېرەك.

2. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشى ماتېماتىكا ئىدىيە تارىخىدىلا ئەمەس، بەلكى ئىلىم - پەن ئىدىيە تارىخىدىمۇ نامايەندىسى ھېسابلىنىدۇ.

◆ ئوقۇغۇچىلار دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشى ۋە تەرەققىياتىغا دائىر تارىختىكى بەزى مۇھىم باھالاشلارنى توپلىشى كېرەك.

3. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشىنىڭ ئۇزاق يىللىق تارىخىي مەنبەسى بار.

◆ ئوقۇغۇچىلار ئىلىمىز ۋە قەدىمكى ياۋروپا تارىخىدىكى دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرال ئىدىيىسىگە ئالاقىدار بەزى ۋەكىللىك خاراكتېرگە ئىگە خىزمەتلەرنى توپلىشى كېرەك.

4. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشىنىڭ چوڭقۇر دەۋر ئارقا كۆرۈنۈشى بار، ئەينى زاماندىكى تېخنىكا تەرەققىياتى ماتېماتىكىغا نۇرغۇن تەلەپلەرنى قويغان.

◆ ئوقۇغۇچىلار ياۋروپادا ئەدەبىيات - سەنئەتنىڭ قايتا گۈللىنىشىدىن تارتىپ تاكى 17 - ئەسىرگىچە بولغان ئارىلىقتىكى جەمئىيەت ئەھۋالى، ئىقتىساد ئەھۋالى ۋە ئىلىم - پەن تەرەققىياتى، سودا ئىشلىرى، دېڭىز قاتنىشى ئىشلىرى قاتارلىقلارغا دائىر ماتېرىياللارنى توپلاپ، ئۇلارنىڭ ماتېماتىكىغا بولغان تەلەپلىرىنى بىلىۋېلىشى كېرەك.

5. نيۇتون بىلەن لايبنىس دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلغۇچىسىدۇر.

CHAPTER

لايبنىس

نيۇتون

◆ ئوقۇغۇچىلار نيۇتون ۋە لايبنىسنىڭ ھاياتىغا دائىر ماتېرىياللارنى ھەمدە ئۇلارنىڭ دىفېرېنسىئال - ئىنتېگرالنى بەرپا قىلىشتا ئىشلىگەن ئىجادىي خىزمەتلىرىنى توپلىشى كېرەك.

مۇلاھىزە

دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ بەرپا قىلىنىشى نېمىنى چۈشەندۈرىدۇ؟ ئۇنىڭ تارىخىي ئەھمىيىتى نېمە؟ سىز نېمىلەرنى ھېس قىلدىڭىز؟

تەلەپ

يۇقىرىدىكى مۇلاھىزە سوئالىغا ئاساسەن، گۇرۇپپىلار بويىچە ئايرىم - ئايرىم ماتېرىيال توپلاپ، ئاندىن توپلانغان ماتېرىياللارنى جەملەش. ھەربىر گۇرۇپپا بىردىن پراكتىكا دوكلاتى يېزىپ، گۇرۇپپىلار بويىچە ئايرىم - ئايرىم پىكىر ئالماشتۇرۇش.

ئاساسىي پايدىلانمىلار:

[1] « 中国大百科全书 ‹数学卷› (جۇڭگو ئېنسىكلوپېدىيىسى ‹ماتېماتىكا قىسمى› »، جۇڭگو قامۇس نەشرىياتى.

[2] «古今数学思想 (قەدىمكى ۋە ھازىرقى ماتېماتىكا ئىدىيىسى)»، 2 - قىسمى، شاڭخەي پەن - تېخنىكا نەشرىياتى.

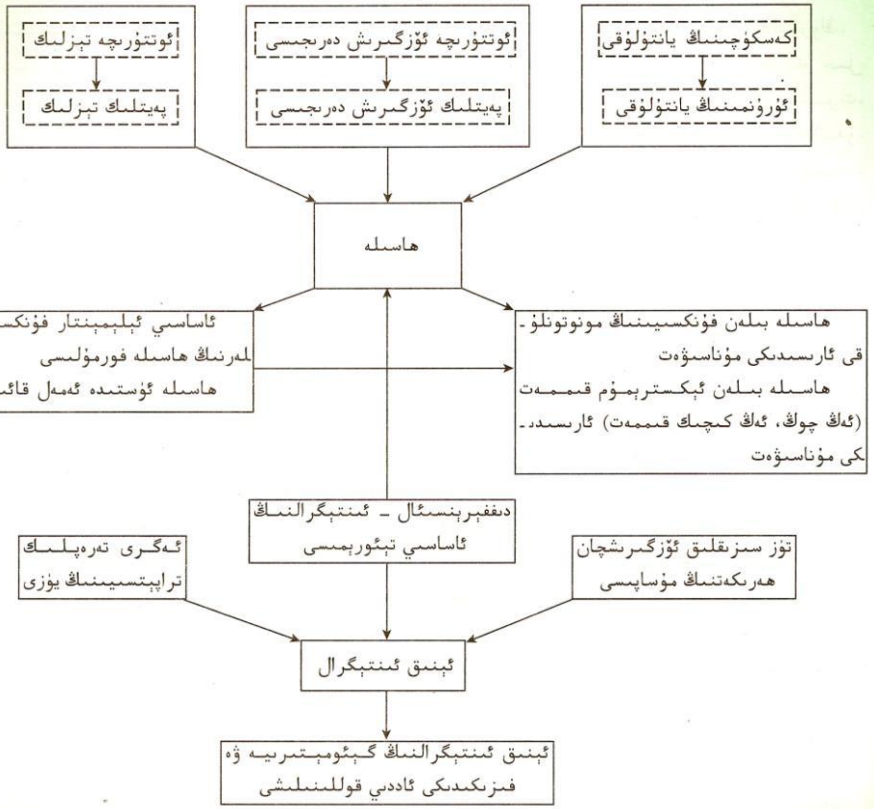
[3] «数学的源与流 (ماتېماتىكا مەنبەلىرى ۋە ئېقىملىرى)»، ئالىي مائارىپ نەشرىياتى.

[4] «数学的思想、方法和应用 (ماتېماتىكا ئىدىيىسى، ئۇسۇلى ۋە ئۇلارنىڭ قوللىنىلىشى)»،بېيجىڭ ئۇنىۋېرسىتېتى نەشرىياتى.

1 ـ باب

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $x=x_0$ دىكى ھاسىلىسى $f'(x_0)$ ياكى $y'|_{x=x_0}$ قىلىپ يېزىلىدۇ، ئۇنىڭ ئېنىقلىمىسى بەلگە تىلى بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلىنىدۇ:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

يېزىق تىلى بىلەن تۆۋەندىكىدەك بايان قىلىنىدۇ:

Δx نىڭ قىممىتى 0 گە ئىنتىلگەندە، $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ بىر مۇقىم سانغا ئىنتىلسە، ئۇ ھالدا بۇ مۇقىم سان $f'(x_0)$ بولىدۇ.

بۇ بابتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ھاسىلە ئۇقۇمى ھەققىدە قانداق تونۇشقا ئىگە بولدىڭىز؟ بەزىلەر ھاسىلە ئۇقۇمىنىڭ يادروسى ئۆزگىرىش دەرىجىسىدۇر دەيدۇ، سىز قانداق ئويلايسىز؟

2. ھاسىلىنىڭ مەنىسىنى فىزىكا ۋە گېئومېتىرىيە نۇرغۇسىدىن ئايرىم - ئايرىم شەرھلەپ بېرەلەمسىز؟

$f(12)=8$، $f'(12)=0$ دېگەن شەرت ئاستىدا، $y=f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ $x=12$ ئەتراپىدىكى گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلىنى ھاسىلىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىگە ئاساسەن سىزىپ چىقىڭ.

ھاسىلىنىڭ فىزىكىلىق مەنىسىگە ئاساسەن، ھاسىلىگە دائىر بەزى ئەمەلىي مىساللارنى كەلتۈرۈڭ.

3. نۇرغۇن ھەرىكەت ئۆزگىرىشى مەسىلىلىرى ئۇستىدىكى تەتقىقاتلارنى ئاخىرقى ھېسابتا ھەر خىل فۇنكسىيىلەرنى تەتقىق قىلىشقا يىغىنچاقلىغىلى بولىدۇ، بۇ بابتا ھەل قىلىغان مەسىلىلەردىن سىرت، سەييارىلەرنىڭ ھەرىكىتى، ئىسسىقلىق ئۆتكۈزۈش دېگەندەك مەسىلىلەرمۇ بۇنىڭغا مىسال بولالايدۇ. فۇنكسىيە تەتقىقاتىدا، فۇنكسىيىنىڭ قانداق ئۆزگىرىدىغانلىقى، يەنى ئۇنىڭ ئاشىدىغانلىقى ياكى كېمىيىدىغانلىقى، ئۇنىڭ ئېشىش - كېمىيىش دائىرىسى ۋە ئېشىش - كېمىيىشنىڭ تېز - ئاستىلىقى قاتارلىق مەسىلىلەر ئاساسىي تەتقىق قىلىش مەسىلىلىرى ھېسابلىنىدۇ. ھاسىلە دەل مۇشۇنداق مەسىلىلەرگە ئىخچام ھەم ئېنىق جاۋاب بېرەلەيدۇ: $f'(x)$ نىڭ ئالامىتىدىن $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ ئاشىدىغانلىقى ياكى كېمىيىدىغانلىقىنى، $f'(x)$ نىڭ مۇتلەق قىممىتىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكىدىن فۇنكسىيە ئۆزگىرىشىنىڭ تېز ياكى تەكشى ئىكەنلىكىنى بىلگىلى بولىدۇ. ھاسىلە — فۇنكسىيە تەتقىقاتىدىكى كۈچلۈك قورالدۇر.

بۇلاردىن باشقا، ھاسىلە يەنە فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممەت مەسىلىسىنى ھەل قىلىشنىڭ ۋە شۇ ئارقىلىق سەرخىللاشتۇرۇش مەسىلىسىنى ھەل قىلىشنىڭ ئومۇمىي ئۇسۇلى ھېسابلىنىدۇ. ئىككىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيىنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى كۋادراتقا كەلتۈرۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ تېپىش ناھايىتى ئەپچىل بولسىمۇ، ئەمما ئۇ ئالاھىدە ئەھۋالدىكى ئالاھىدە يېشىش ئۇسۇلى بولۇپ، ئۈچىنچى دەرىجىلىك فۇنكسىيە دېگەندەك ئادەتتىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ئېكستىرېمۇم قىممىتىنى تېپىش مەسىلىسىنى بۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغىلى بولمايدۇ. ھاسىلىدىن پايدىلانساق، ئالدى بىلەن تەڭلىمە $f'(x)=0$ نى قانائەتلەندۈرىدىغان نۇقتىنى تېپىۋېلىپ، ئاندىن ھاسىلىنىڭ مۇشۇ نۇقتىنىڭ ئىككى ئەتراپىدىكى ئالامىتىگە ئاساسەن ئېكستىرېمۇم قىممەتنى تاپالايمىز. مانا بۇ، ھاسىلىنىڭ قۇدرىتىنى يەنە بىر قېتىم نامايان قىلىدۇ.

بۇ بابتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، يۇقىرىدا دېيىلگەنلەر ھەققىدە ئازدۇر - كۆپتۇر چۈشەنچە ھاسىل قىلالىدىڭىزمۇ؟

4. ئېنىق ئىنتېگرال ئالاھىدە كۆرۈنۈشتىكى يىغىندىنىڭ لىمىتىدىن ئىبارەت. نۇرغۇن ئەمەلىي مەسىلىلەرنى مۇشۇ خىل ئالاھىدە كۆرۈنۈشتىكى يىغىندىنىڭ لىمىتىنى تېپىشقا يىغىنچاقلىغىلى بولىدۇ. شۇڭا، ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئارقا كۆرۈنۈشى ناھايىتى مول ھەمدە قوللىنىلىشىمۇ ناھايىتى كەڭ.

ئېنىق ئىنتېگرالنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ئۇنىڭ مەنىسىنى بىلىۋالدىڭىزمۇ؟ ئۇنىڭ مول ئارقا كۆرۈنۈشى ۋە كەڭ قوللىنىلىشى ھەققىدە دەسلەپكى چۈشەنچىگە ئىگە بولدىڭىزمۇ؟ ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي ئىدىيىسىنى ھېس قىلدىڭىزمۇ؟

5. دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالنىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى دىففېرېنسىئال - ئىنتېگرالدىكى ئەڭ ئاساسىي، ئەڭ مۇھىم ئىككى ئۇقۇم — ھاسىلە بىلەن ئېنىق ئىنتېگرال ئارىسىدىكى ئىچكى باغلىنىشنى يورۇتۇپ بېرىدۇ؛ شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، بۇ تېئورېما ئېنىق ئىنتېگرالنى ھېسابلىشىمىزدا كۆپ قوللىنىدىغان ئۈنۈملۈك ئۇسۇل ھېسابلىنىدۇ.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. P، Q لار ئەگرى سىزىق $y=x^2-2x-3$ نىڭ ئۈستىدە ياتقان ئىككى نۇقتا بولۇپ، P نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى 1، Q نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى 4 بولسا:

(1) كەسكۈچى PQ نىڭ يانتۇلۇقىنى تېپىڭ؛

(2) P نۇقتىدىن ئۆتكەن ئۇرۇنمىنىڭ تەڭلىمىسىنى تېپىڭ.

2. تۆۋەندىكى فۇنكسىيىلەرنىڭ ھاسىلىسىنى تېپىڭ.

(1) $y=2x\tan x$;

(2) $y=(x-2)^3(3x+1)^2$;

(3) $y=2^x\ln x$;

(4) $y=\frac{x^2}{(2x+1)^3}$.

3. يەر مەركىزىگىچە ئارىلىقى r، ماسسىسى m بولغان سۈنئىي ھەمراھ بىلەن يەر شارى ئارىسىدىكى ئالەملىك تارتىشىش كۈچى F نى فورمۇلا $F=\frac{GMm}{r^2}$ دىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولىدۇ، بۇنىڭدىكى M يەر شارىنىڭ ماسسىسى، G بولسا تۇراقلىق مىقدار. F نىڭ r غا نىسبەتەن پەيتلىك ئۆزگىرىش دەرىجىسىنى تېپىڭ.

(4 - مىسال ئۈچۈن)

4. تېمپېراتۇرىسى 80℃ بولغان بىر چىنە پەملچاينى تېمپېراتۇرىسى 20℃ بولغان ئۆيگە قويۇپ قويساق، چاينىڭ تېمپېراتۇرىسى تەدرىجىي تۆۋەنلەيدۇ، فۇنكسىيە $T=f(t)$ تېمپېراتۇرا T (بىرلىكى: ℃) بىلەن ۋاقىت t (بىرلىكى: min) ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەيدۇ.

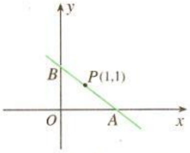
(1) $f'(t)$ نىڭ ئالامىتى قانداق بولىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

(2) $f'(3)=-4$ نىڭ ئەمەلىي مەنىسى نېمە؟ ئەگەر $f(3)=65$ (℃) بولسا، $f(t)$ فۇنكسىيىنىڭ $t=3$ بولغاندىكى گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلىنى سىزالامسىز؟

5. فۇنكسىيە $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ نىڭ مونوتونلۇق ئىنتېرۋالىنى تېپىڭ.

6. فۇنكسىيە $f(x)=x^2+px+q$ بېرىلگەن، $x=1$ بولغاندا $f(x)$ نى ئەڭ كىچىك قىممەت 4 كە ئىگە قىلىدىغان p ۋە q نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

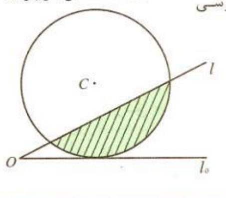
7. فۇنكسىيە $f(x)=x(x-c)^2$ نىڭ $x=2$ دە ماكسىمۇم قىممەتكە ئىگە بولىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، c نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

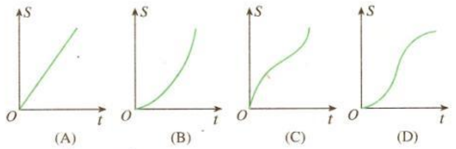


(8 - مىسال ئۈچۈن)

8. رەسىمدىكىدەك، $P(1, 1)$ نۇقتا ئارقىلىق AB تۈز سىزىقنى ئۆتكۈزسەك، ئۇ ئايرىم - ئايرىم x ئوقىنىڭ مۇسبەت يېرىمى ۋە y ئوقىنىڭ مۇسبەت يېرىمى بىلەن A، B نۇقتىلاردا كېسىشىدۇ. AB تۈز سىزىق قايسى ئورۇندا بولغاندا، $\triangle AOB$ نىڭ يۈزى ئەڭ كىچىك بولىدۇ؟ ئۇنىڭ ئەڭ كىچىك يۈزى قانچىلىك؟

9. رەسىمدىكىدەك، l تۈز سىزىق ۋە C چەمبەر بېرىلگەن. l تۈز سىزىق تەكشىلىك ئۈستىدە l_0 دىن باشلاپ O نۇقتىنى چۆرىدىگەن ھالدا سائەت ئىسترېلكىسىنىڭ قارشى





(9 - مىسال ئۈچۈن)

يۆنىلىشى بويىچە تەكشى تېزلىك بىلەن ئايلانغاندا (ئايلىنىش بۇلۇڭ گرادۇسى °90 تىن ئېشىپ كەتمەيدۇ)، ئۇ چەمبەر ئىچىدە سىياپ ئۆتكەن بۆلەك (رەسىمدىكى بويالغان شەكىل)نىڭ يۈزى S ۋاقىت t نىڭ فۇنكسىيىسى بولىدۇ، بۇ فۇنكسىيە گرافىكىنىڭ تەخمىنىي شەكلى ( ).

10. ئۇزۇنلۇقى 14.8m كېلىدىغان پولات چىۋىقتىن پاراللېلىپىپېد شەكىللىك قاچىنىڭ رامكىسىنى ياساشتا، ئەگەر قاچا ئاساسىنىڭ بىر تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى يەنە بىر تەرىپىدىن 0.5m ئۇزۇن بولۇش تەلەپ قىلىنسا، قاچىنىڭ ئېگىزلىكى قانچىلىك بولغاندا ئۇنىڭ سىغىمى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟ ئۇنىڭ ئەڭ چوڭ سىغىمى قانچىلىك؟

11. كوللېكتىپ ساياھەت

مەلۇم ساياھەت كوپېراتىپى يازلىق تەتىل مەزگىلىدە تۆۋەندىكىدەك ساياھەت ئۆمىكى تەشكىللەش چارىسىنى يولغا قويماقچى بولدى: ئادەم سانى 100 گە يەتكەن ساياھەت ئۆمىكىدىكى ھەربىر ئادەمدىن 1000 يۈەن ئېلىنىدۇ؛ ساياھەت ئۆمىكىدىكى ئادەم سانى 100 دىن ئاشسا، ھەر 1 ئادەم ئاشقاندا ئوتتۇرا ھېساب بىلەن ئۆمەكتىكى ھەربىر ئادەمدىن 5 يۈەن ئاز ئېلىنىدۇ؛ ساياھەت ئۆمىكىدىكى ئادەم سانى 180 دىن ئېشىپ كەتسە بولمايدۇ. ساياھەت ئۆمىكى قانداق تەشكىللەنسە، ساياھەت كوپېراتىپى ئالىدىغان پۇل ئەڭ كۆپ بولىدۇ؟

12. پرىنتېر قەغىزىنىڭ تېپىنى لايىھىلەش پرىنسىپى

(12 ـ مىسال ئۇچۇن)

رەسىمدىكىدەك، مەلۇم خىل پرىنتېر قەغىزىنىڭ يۈزى $623.7\,\mathrm{cm}^2$ بولۇپ، ئۇنىڭ ئۈستۈنكى ۋە ئاستىنقى گىرۋەكلىرى بىلەن بەت يۈزى (پرىنتېر قەغىزىنىڭ ئەمەلىي خەت بېسىلىدىغان قىسمى) نىڭ ئارىلىقى ئوخشاشلا 2.54 cm، ئوڭ، سول گىرۋەكلىرى بىلەن بەت يۈزىنىڭ ئارىلىقى ئوخشاشلا 3.17 cm بولۇش تەلەپ قىلىنىدۇ. ئەگەر ئۇزۇنىسىغا بېسىشقا توغرا كەلسە، پرىنتېر قەغىزىنىڭ ئۇزۇنلۇقى ۋە كەڭلىكى ئايرىم ـ ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، ئۇنىڭ ئەمەلىي خەت بېسىلىدىغان قىسمىنىڭ يۈزى ئەڭ چوڭ بولىدۇ (0.01 cm غىچە ئېنىقلىقتا، ھېسابلىغۇچ ئىشلىتىلسە بولىدۇ)؟

ھەر خىل تىپتىكى پرىنتېر قەغەزلىرىگە دائىر سانلىق مەلۇماتلارنى توپلاڭ ھەم ئۇلارغا يوشۇرۇنغان لايىھىلەش پرىنسىپىنى چۈشەندۈرۈڭ.

13. مەلۇم كالىچىلىق مەيدانىنىڭ يىللىق مۇقىم تەننەرخى 20000 يۈەن بولۇپ، ھەر يىلى ئەڭ كۆپ بولغاندا 400 كالا بېقىلىدۇ. ھەر 1 كالا بېقىلسا، تەننەرخ 100 يۈەن ئاشىدۇ. ئەگەر كىرىم فۇنكسىيىسى $R(q)=-\frac{1}{2}q^2+400q$ (q بېقىلغان كالىنىڭ سانى) بولسا، ھەر يىلى قانچە كالا باققاندا ئومۇمىي پايدا ئەڭ كۆپ بولىدۇ؟ ئەڭ كۆپ ئومۇمىي پايدا قانچە يۈەن (ھېسابلىغۇچ ئىشلىتىلسە بولىدۇ)؟

14. تۆۋەندىكى ئېنىق ئىنتېگراللارنى ھېسابلاڭ:

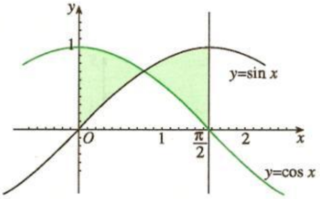
(1) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

15. تۆۋەندىكى تەڭلىكلەرنى ئېنىق ئىنتېگرالنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$; (2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.



(16 ـ مىسال ئۇچۇن)

16. ئەگرى سىزىق $y=\sin x$، $y=\cos x$ ۋە تۈز سىزىق $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$ لار بىلەن قورشالغان تەكشىلىك شەكلىنىڭ يۈزى (رەسىمدىكى بويالغان شەكىل)نى تېپىڭ.

17. ئېلاستىكلىق چېكىنىڭ دائىرىسى ئىچىدە، پۇرژىنا ئۇچرىغان سىقىش كۈچى F بىلەن سىقىلىش ئارىلىقى l نى گۇك قانۇنى $F=kl$ دىن پايدىلىنىپ ھېسابلىغىلى بولىدۇ. ئەسلىي ئۇزۇنلۇقى 90 cm بولغان بىر پۇرژىنىنى ھەر 1 cm سىقىش ئۈچۈن 0.049 N لۇق سىقىش كۈچى كېتىدۇ. ئۇنى 80 cm دىن 60 cm غىچە سىقالايدۇ. سىرتقى كۈچ بۇ پۇرژىنىنىڭ ئېلاستىكلىق كۈچىنى يېڭىپ قانچىلىك ئىش ئىشلىگەندە (ئېلاستىكلىق چېكىنىڭ دائىرىسى ئىچىدە)؟

B گۇرۇپپا

1. ئۆي ئىچىدىكى زەھەرلىك باكتېرىيىلەر كۆپىيىشكە باشلىغاندا، باكتېرىيە يوقىتىش دورىسىنى ئىشلىتىشكە توغرا كېلىدۇ. دورىنى دەسلەپ ئىشلەتكەندە، باكتېرىيىنىڭ سانى كۆپىيىۋېرىدۇ، ئەمما ۋاقىتنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ، ئۇنىڭ كۆپىيىش كۆلىمى بارا - بارا كىچىكلەيدۇ ھەم بەلگىلىك ۋاقىتقا يەتكەندە باكتېرىيە سانى ئازىيىشقا باشلايدۇ. ئەگەر باكتېرىيە يوقىتىش دورىسىنى ئىشلىتىپ t سائەت ئۆتكەندىن كېيىنكى باكتېرىيە سانى

$$b(t)=10^5+10^4t-10^3t^2.$$

بولسا:

(1) باكتېرىيە سانىنىڭ كۆپىيىشى ياكى ئازىيىشىنىڭ $t=5$ ۋە $t=10$ بولغاندىكى پەيتلىك تېزلىكىنى تېپىڭ؛

(2) باكتېرىيە سانى قايسى ۋاقىت بۆلىكىدە كۆپىيىدۇ؟ قايسى ۋاقىت بۆلىكىدە ئازىيىدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

2. بىر سېكتورنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى l ئىكەنلىكى بېرىلگەن. بۇ سېكتورنىڭ رادىئۇسى ۋە مەركىزىي بۇلۇڭى ئايرىم - ئايرىم قانچىلىك بولغاندا، ئۇنىڭ يۈزى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

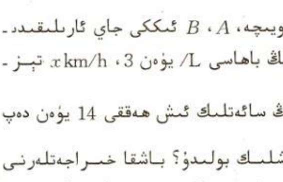
3. رادىئۇسى R بولغان چەمبەر شەكىللىك قەغەزدىن مەركىزىي بۇلۇڭى α بولغان بىر سېكتور كېسىۋېلىپ، كونۇس شەكىللىك بىر قاچا ياساشتا، سېكتورنىڭ مەركىزىي بۇلۇڭى α قانچىلىك بولغاندا، قاچىنىڭ سىغىمى ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

4. بىر پاراخوتنىڭ يېقىلغۇ خىراجىتى بىلەن پاراخوت تېزلىكىنىڭ كۋادراتى ئوڭ تاناسىپ تۈزىدۇ ھەمدە پاراخوتنىڭ تېزلىكى 10 km/h بولغاندا سائەتلىك يېقىلغۇ خىراجىتى 80 يۈەن بولىدۇ. ئەگەر پاراخوت يۈرۈش قىلغاندا كېتىدىغان باشقا خىراجەتلەر h / يۈەن 480 بولسا، 20 km لىق سەپەردە پاراخوت تېزلىكى قانچىلىك بولغاندا ئۇنىڭ ئومۇمىي يۈرۈش خىراجىتى ئەڭ ئاز بولىدۇ (1 km/h غىچە ئېنىقلىقتا)؟ بۇ چاغدا سائەتلىك خىراجىتى قانچە يۈەن بولىدۇ (1 يۈەنگىچە ئېنىقلىقتا، ھېسابلىغۇچ ئىشلىتىلسە بولىدۇ)؟

5. A ، B ئىككى جاي ئارىلىقىدىكى تاشيولدا ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىكى 50 ~ 100 km/h بولۇشى كېرەك. A ، B ئىككى جاينىڭ ئارىلىقى 130 km . قاتناش نىزامىدىكى بەلگىلىمە بويىچە، بېنزىننىڭ باھاسى L/ يۈەن 3، x km/h تېزلىك بىلەن ماڭغاندا ئاپتوموبىلنىڭ بېنزىن سەرپىياتى $\left(3+\frac{x^2}{360}\right)$ L/h ، شوپۇرنىڭ سائەتلىك ئىش ھەققى 14 يۈەن دەپ پەرەز قىلىنغان ئەھۋالدا، ئاپتوموبىلنىڭ تېزلىكى قانچىلىك بولسا ئەڭ تېجەشلىك بولىدۇ؟ باشقا خىراجەتلەرنى ئويلاشمىغاندا، A جايدىن B جايغا بېرىشتىكى بۇ قېتىملىق سەپەرنىڭ ئومۇمىي خىراجىتى قانچە يۈەن بولىدۇ؟

6. $f(x)=e^{|x|}$ دەپ پەرەز قىلىپ، $\int_{-2}^{4}f(x)dx$ نى تېپىڭ.

7. رەسىمدىكىدەك، تۈز سىزىق $y=kx$ پارابولا $y=x-x^2$ ۋە x ئوق بىلەن قورشالغان شەكىلنى يۈزلىرى تەڭ بولغان ئىككى بۆلەككە بۆلسە، k نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.



(7 - مىسال ئۈچۈن)

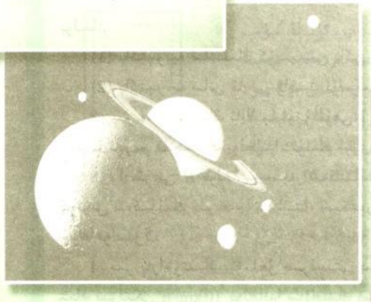
2 ـ باب

خۇلاسە چىقىرىش ۋە ئىسپاتلاش

1ـ2 ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە

2ـ2 بىۋاسىتە ئىسپاتلاش ۋە ۋاسىتىلىك ئىسپاتلاش

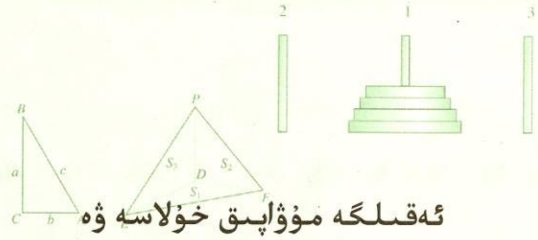
3ـ2 ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى



كۈندىلىك پائالىيەتلىرىمىزدە دائىم دېگۈدەك ھەر خىل خۇلاسىلەرنى چىقىرىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ. مەسىلەن، دوختۇرنىڭ بىمارنىڭ كېسىلىنى ئېنىقلىشى، رازۋېدكىچىنىڭ دېلونى پاش قىلىشى، ئارخېئولوگنىڭ خارابىلىكنىڭ يىلىغا ھۆكۈم قىلىشى، ماتېماتىكا ئالىمىنىڭ ھۆكۈملۈكنىڭ توغرا ـ ساختىلىقىنى ئىسپاتلىشى دېگەندەك، بۇلارنىڭ ھەممىسى خۇلاسە چىقىرىش پائالىيىتىنى ئۆز ئىچىگە ئالغان بولىدۇ. ماتېماتىكىدا، ئىسپاتلاش جەريانى خۇلاسە چىقىرىشتىن تېخىمۇ ئايرىلالمايدۇ.

بىز بۇ بابتا ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە دەپ ئاتىلىدىغان ئىككى خىل ئاساسىي خۇلاسىنى ئۆگىنىمىز. ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە يېڭى يەكۈنلەرنى قىياس قىلىش ۋە بايقاش، مەسىلىنى ھەل قىلىش پىكىر يولى ۋە يۆنىلىشى ئۈستىدە ئىزدىنىش ھەم ئۇنى ئوتتۇرىغا قويۇش رولىنى ئوينايدۇ؛ دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە يەكۈنلەرنى ئىسپاتلاش، بىلىم سىستېمىسىنى رەتلەش ۋە بەرپا قىلىش رولىغا ئىگە بولۇپ، ئۇ ئاكسىئوما سىستېمىسىدىكى ئاساسىي خۇلاسە چىقىرىش ئۇسۇلى ھېسابلىنىدۇ. شۇ سەۋەبتىن، ئۇلار ئۆزئارا زىچ باغلىنىشلىق ھەم بىر ـ بىرىنى تولۇقلايدىغان بۇ ئىككى خىل خۇلاسە ماتېماتىكىلىق يەكۈنلەرگە ئېرىشىشنىڭ ئاساسىي ۋاسىتىسى بولۇپ قالغان. شۇنىڭ بىلەن بىر ۋاقىتتا، بىز يەنە بىۋاسىتە ئىسپاتلاش (مەسىلەن، ئانالىز ئۇسۇلى، سىنتېز ئۇسۇلى، ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى) ۋە ۋاسىتىلىك ئىسپاتلاش (مەسىلەن، قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى) دەپ ئاتىلىدىغان ئىككى خىل ئاساسىي ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى ئۆگىنىپ، ئۆگىنىش جەريانىدا ئىسپاتلاشنىڭ ئىقتىدارى ۋە ئالاھىدىلىكىنى ھېس قىلىمىز، ماتېماتىكىلىق ئىسپاتلاشنىڭ ئاساسىي ئۇسۇلىنى بىلىۋالىمىز، لوگىكىلىق ئىسپاتلاشنىڭ ماتېماتىكا ۋە كۈندىلىك تۇرمۇشتىكى رولىنى ھېس قىلىپ، يوسۇنلۇق سۆزلەش، دەلىل بىلەن ئىسپاتلاشتىن ئىبارەت ياخشى ئادەتنى يېتىلدۈرىمىز.

2
1
3
$P\Rightarrow Q_1$
$Q_1\Rightarrow$
C D E A M
M M_2 M_1 O N_1 N_2
O P_1 Q_1 P_2 Q_2 R_2 P Q R
ساتۇرننىڭ قۇياشنى چۆرىدەپ ئاي-
لىنىش ترايېكتورىيىسى نېمە ئۈچۈن ئېللىپس
شەكلىدە بولىدۇ؟ ئېھرام تەخمىنەن قايسى
يىللاردا سېلىنغان؟ ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىچكى بۇ-
لۇڭلىرىنىڭ يىغىندىسى نېمە ئۈچۈن °180 قا
تەڭ بولىدۇ؟ ...ئىلمىي تەتقىقاتلار «خۇلاسە چى-
قىرىش ۋە ئىسپاتلاش»قا ئېھتىياج-
لىق بولىدۇ.



CHAPTER 2

1-2 ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە

خۇلاسە چىقىرىش كىشىلەرنىڭ ئايدىڭلىشىپ بولغان بىر ياكى بىرقانچە ھۆكۈمگە ئاساسەن يېڭى ھۆكۈمنى ئېنىقلىشىدىكى تەپەككۇر قىلىش جەريانىدۇر. بۇ پاراگرافتا، كىشىلەر كۈندىلىك پائالىيىتى ۋە ئىلمىي تەتقىقاتلىرىدا كۆپ ئىشلىتىدىغان ئىككى خىل خۇلاسە — ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىنى تونۇشتۇرىمىز.

1-1-2 ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە

ماتېماتىكىدا ھەر خىل قىياسلار بار. مەسىلەن، مەشھۇر گولدباخ (Goldbach) قىياسى، فېرمات (Fermat) قىياسى، خەرىتىدىكى «تۆت رەڭ قىياسى». گونسباۋ يەتتە كۆۋرۈك قىياسى دېگەندەك. بەزى قىياسلار نۇرغۇن ماتېماتىكا ئالىملىرى ۋە ماتېماتىكا ھەۋەسكارلىرىنى جەلپ قىلغان، بەزىلەر ھەتتا بۇنىڭ ئۈچۈن پۈتۈن ئۆمرىنى تەقدىم قىلغان. بۇ ماتېماتىكىلىق قىياسلارنىڭ قانداق ئوتتۇرىغا قويۇلغانلىقىنى بىلەمسىز؟ تۆۋەندە گولدباخنىڭ قىياسىنى ئوتتۇرىغا قويۇش جەريانىنى كۆرۈپ باقايلى.

ئېيتىشلارغا ئاساسلانغاندا، گولدباخ

$$3+7=10,\ 3+17=20,\ 13+17=30$$

بولىدىغانلىقىنى بايقاپ قېلىپ، بۇ ئىپادىلەرنى ئەتەيلەپ تۆۋەندىكىدەك ئۆزگەرتىپ يازغان:

$$10=3+7,\ 20=3+17,\ 30=13+17.$$

يۇقىرىقى ئىپادىلەر مۇنداق بىر قانۇنىيەتنى ئەكس ئەتتۈرگەن:

.تاق تۈپ سان + تاق تۈپ سان = جۈپ سان

شۇنىڭ بىلەن، گولدباخ: 10، 20، 30 نىڭ ئۈچىلىسى جۈپ سان، ئۇنداق بولسا، باشقا جۈپ سانلار-دىمۇ مۇشۇنىڭغا ئوخشاش قانۇنىيەت بارمىدۇ؟ دېگەن خىيالغا كەلگەن.

روشەنكى، ئىككى تاق تۈپ ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدىغان بىرىنچى جۈپ سان 6، يەنى

$$6=3+3.$$

ئەمدى 6 دىن چوڭ جۈپ سانلارغا قاراپ باقايلى:

$$8=3+5,$$
$$10=5+5,$$
$$12=5+7,$$
$$14=7+7,$$
$$16=5+11,$$
$$\cdots$$

بۇ جەريانىنى داۋاملاشتۇرۇپ، بىر قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

$$1000=29+971,$$
$$1002=139+863,$$
$$\cdots$$

گولدباخ يۇقىرىقى جەريانغا ئاساسلىنىپ، 6 دىن كىچىك بولمىغان ھەرقانداق جۈپ سان ئىككى تاق تۈپ ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدۇ دېگەن قىياسنى دادىللىق بىلەن ئوتتۇرىغا قويغان. بۇ قىياس توغرىمۇ؟ كۆپ يىللاردىن بۇيان، نۇرغۇن مۇنەۋۋەر ماتېماتىكا ئالىملىرى بۇ قىياسنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن تىرىشچانلىق كۆرسەتتى ھەم خېلى ياخشى ئىلگىرىلەشلەرگە ئېرىشتى.

ئەمدى گولدباخنىڭ قىياسنى ئوتتۇرىغا قويۇشتىكى خۇلاسە چىقىرىش جەريانىنى كۆرۈپ باقايلى: ئۇ بەزى جۈپ سانلار ئۈستىدە ئىسپاتلاش ئېلىپ بېرىش ئارقىلىق بۇ جۈپ سانلارنى ھامان ئىككى تاق تۈپ ساننىڭ يىغىندىسى قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى ھەمدە ئەكس مىسالمۇ كۆرۈلمىگەنلىكىنى بايقىغان. شۇنىڭ بىلەن «6 دىن كىچىك بولمىغان ھەرقانداق جۈپ سان ئىككى تاق تۈپ ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ» دېگەن قىياسنى ئوتتۇرىغا قويغان.

مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، مەلۇم تۈردىكى شەيئىنىڭ قىسمەن ئوبيېكتلىرى ئىگە بولغان بەزى ئالاھىدىلىكلەرگە ئاساسەن، بۇ تۈردىكى شەيئىنىڭ بارلىق ئوبيېكتلىرىمۇ ئاشۇ ئالاھىدىلىكلەرگە ئىگە بولىدىغانلىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىلىدىغان خۇلاسە ياكى ئايرىم پاكىتلاردىن ئومۇمىي يەكۈن ئومۇملاشتۇرۇپ چىقىلىدىغان خۇلاسە ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسە دەپ ئاتىلىدۇ (يىغما خۇلاسە ياكى قىسقىچە يىغىنچاقلاش، ئىندۇكسىيىلەش دەپمۇ ئاتىلىدۇ). سۆزنىڭ قىسقىسى، ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسە قىسمەنلىكتىن پۈتۈنلۈككە، ئايرىملىقتىن ئومۇمىيلىققا بولغان خۇلاسىدۇر.

مەسىلەن، مىس، تۆمۈر، ئاليۇمىن، ئالتۇن، كۈمۈش قاتارلىق مېتاللارنىڭ توك ئۆتكۈزىدىغانلىقىغا ئاساسەن، «بارلىق مېتاللار توك ئۆتكۈزىدۇ» دېگەن يەكۈننى يىغىنچاقلاپ چىقىشقا بولىدۇ. مانا بۇ، ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسە. ستاتىستىكىدا، بىز دائىم تەتقىق قىلماقچى بولغان بارلىق ئوبيېكتلار ئىچىدىن بىر قىسمىنى ئېلىپ، كۆزىتىش ياكى تەجرىبە ئىشلەش ئارقىلىق ئۇچۇرلارغا ئېرىشىمىز، ئاندىن ئېرىشىلگەن ئۇچۇرلارغا ئاساسەن پۈتۈنلۈك توغرىسىدا ھۆكۈم چىقىرىمىز. بۇمۇ ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسىدۇر.

ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ يېڭى پاكىتلارنى بايقاپ، يېڭى يەكۈنلەرگە ئېرىشكىلى بولىدۇ. تۆۋەندە ماتېماتىكىدىكى بىر مىسالنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

1 ـ مىسال. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ باش ئەزاسى $a_1=1$ ھەمدە $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى يىغىنچاقلاپ چىقايلى.

تەھلىل: سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى ئۇنىڭ n ـ ئەزاسى a_n بىلەن تەرتىپ نومۇرى n ئارىسىدىكى ماسلىق مۇناسىۋەتنى ئىپادىلەپ بېرەلىشى كېرەك. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن بېرىلگەن رېكۇررېنت فورمۇلىسىغا ئاساسەن بۇ سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنىڭ ئالدىنقى بىرقانچە ئەزاسىنى ھېسابلاپ چىقىمىز.

يېشىش: $n=1$ بولغاندا $a_1=1$؛

$n=2$ بولغاندا $a_2=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$؛

$n=3$ بولغاندا $a_3=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$؛

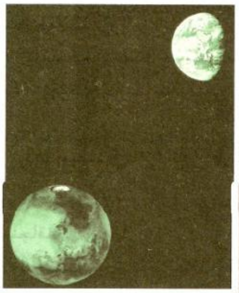
$n=4$ بولغاندا $a_4=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$.

بۇلارنى كۆزىتىش ئارقىلىق بىلەلەيمىزكى، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسىنىڭ ھەربىرى ماس تەرتىپ نومۇرىنىڭ ئەكس سانىغا تەڭ. بۇنىڭغا ئاساسەن قىياس قىلالايمىزكى، مىسالدا بېرىلگەن سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى:

$$a_n=\frac{1}{n}.$$

1 ـ مىسالدا، يىغىنچاقلاش ئارقىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى ھەققىدە بىر قىياسنى ئوتتۇرىغا قويدۇق. بۇ قىياسنىڭ توغرا ـ خاتالىقىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ مۇكەممەل ئىسپاتلاش زۆرۈرىيىتى بولسىمۇ، لېكىن بۇ قىياس بىزنىڭ تەتقىقاتىمىزنى بىر خىل يۆنىلىش بىلەن تەمىن ئېتىدۇ.

يىغىنچاقلاشتىن سىرت، كىشىلەر ئىجاد قىلىش، كەشىپ قىلىش پائالىيەتلىرىدە تەققاسلاش (ئانالوگىيە، ئوخشىتىش دەپمۇ ئاتىلىدۇ)نىمۇ كۆپ ئىشلىتىدۇ. مەسىلەن، ئېيتىشلارغا قارىغاندا، ئېلىمىزنىڭ قەدىمكى زامانىدا ئۆتكەن ھۈنەرۋەن لۇ بەن ھەرىنى ئوت ـ چۆپلەرنىڭ چىشلىق يوپۇرمىقى ۋە چېكەتكىنىڭ چىشىغا ئوخشىتىپ كەشىپ قىلغانىكەن؛ ئىنسانلار بېلىقلارنىڭ سىرتقى شەكلى ۋە سۇدا چۆكۈش، لەيلەش پرىنسىپىغا تەقلىد قىلىپ سۇ ئاستى كېمىسىنى كەشىپ قىلغان؛ ۋە باشقىلار. ئەمەلىيەتتە، بىئونىكا (جانلىقلارغا تەقلىد قىلىش ئىلمى)دىكى نۇرغۇن كەشپىياتلاردا دەسلەپكى ئوي ـ پىكىرلەر جانلىقلار مېخانىزمىغا ئوخشىتىش ئاساسىدا مەيدانغا كەلگەن.



يەنە ئالايلۇق، «مارستا جانلىق بارمۇ؟» دېگەن مەسىلىگە جاۋاب بېرىش ئۈچۈن، ئالىملار مارس بىلەن يەر شارىنى سېلىشتۇرۇپ، مارستا يەر شارىنىڭكىگە ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئالاھىدىلىكلەر بارلىقىنى بايقىغان. مەسىلەن، مارس قۇياشنى چۆرىدەپ ئايلىنىدىغان ھەم ئۆز ئوقىدىمۇ ئايلىنىدىغان سەييارە بولۇپ، ئۇنىڭدىمۇ ئاتموسفېرا قاتلىمى ۋە بىر يىل ئىچىدىكى پەسىل ئۆزگىرىشى بار، ئۇنىڭ ئۈستىگە، مارستا زور كۆپ قىسىم ۋاقىت ئىچىدىكى تېمپېراتۇرا يەر شارىدىكى بەزى جانلىقلارنىڭ ياشىشىغا باب كېلىدۇ، ۋە باشقىلار. شۇنىڭ بىلەن، ئالىملار يۇقىرىدىكىلەرگە ئاساسەن مارستا ھاياتلىق مەۋجۇت بولۇشى مۇمكىن دەپ قىياس قىلدى.

مۇلاھىزە ?

ئالىملارنىڭ يۇقىرىدىكى قىياسنى ئوتتۇرىغا قويۇشىنىڭ خۇلاسە چىقىرىش جەريانى قانداق بولىدۇ؟

يۇقىرىدىكى قىياسنى ئوتتۇرىغا قويۇش جەريانىدا، ئالىملار مارس بىلەن يەر شارىنىڭ بەزى ئوخشى-شىپ كېتىدىغان ئالاھىدىلىكلىرىنى سېلىشتۇردى، ئاندىن يەر شارىنىڭ مەلۇم بولغان بىر ئالاھىدىلىكى (ھاياتلىق مەۋجۇت)نى چىقىش قىلىپ، مارستىمۇ مۇشۇ ئالاھىدىلىك مەۋجۇت بولۇشى مۇمكىن دەپ قىياس قىلدى.

ماتېماتىكىلىق تەتقىقاتلاردىمۇ كۆپ ھاللاردا مۇشۇنداق خۇلاسە چىقىرىلىدۇ. مەسىلەن، شارنى تەتقىق قىلغاندا، تەبىئىي ھالدىلا ئۇنى چەمبەرگە باغلاپ تەسەۋۋۇر قىلىمىز. بىز ئىلگىرى چەمبەرنى خېلى ئەتراپلىق تەتقىق قىلغان ھەم چەمبەرگە دائىر بەزى ئۇقۇملارغا ئېنىقلىما بېرىپ، چەمبەرنىڭ بەزى خۇسۇسىيەتلىرىنى بايقىغانىدۇق (1.2 ـ جەدۋەلگە قاراڭ). شار بىلەن چەمبەرنىڭ شەكىل ۋە ئۇقۇم جە-ھەتتە ئوخشىشىپ كېتىدىغان يەرلىرى بار، يەنى ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسى مۇكەممەل سىممېترىكلىككە ئىگە ھەمدە ھەر ئىككىسى مۇقىم نۇقتىغىچە ئارىلىقى مۇقىم ئۇزۇنلۇقتا تەڭ بولغان نۇقتىلارنىڭ توپ-لىمى بولغانلىقتىن، بىز چەمبەردە بار بولغان ئالاھىدىلىكلەر شاردىمۇ بولۇشى مۇمكىن دەپ قىياس قىلالايمىز.

مەسىلەن، چەمبەرنىڭ ئۇرۇنمىسى بار بولۇپ، ئۇرۇنما بىلەن چەمبەر بىرلا نۇقتىدا ئۇرۇنىدۇ ھەمدە ئۇرۇنۇش نۇقتىسى بىلەن چەمبەر مەركىزىنىڭ ئارىلىقى چەمبەر رادى-ئۇسىغا تەڭ؛ بۇنىڭغا ئاساسەن، شۇنداق بىر تەكشىلىك مەۋجۇت بولۇشى مۇمكىنكى، بۇ تەكشىلىك بىلەن شار بىرلا نۇقتىدا ئۇرۇنىدۇ ھەمدە ئۇ-رۇنۇش نۇقتىسىدىن شار مەركىزىگىچە بولغان ئارىلىق شار رادىئۇسىغا تەڭ دەپ قىياس قىلالايمىز[1]؛ تەكشىلىكتىكى سىزىقداش بولمىغان 3 نۇقتا بىر تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ، بۇنىڭغا ئاساسەن، بوشلۇقتىكى تەكشىلىكداش بولمىغان 4 نۇقتا بىر شارنى بەلگىلەيدۇ دەپ قىياس قىلالايمىز؛ ۋە باشقىلار.

[1] بۇنداق تەكشىلىك ھەقىقەتەن مەۋجۇت، ئۇ شارنىڭ ئۇرۇنما تەكشىلىكى دەپ ئاتىلىدۇ.

ئىزدىنىش

چەمبەرنىڭ ئالاھىدىلىكىگە تەققاسلاپ، 1.2 ـ جەدۋەلگە شارنىڭ ئالاقىدار ئالا-ھىدىلىكلىرىنى يېزىڭ ھەم خۇلاسە چىقىرىش جەريانىنى بايان قىلىڭ.

1.2 ـ جەدۋەل

شارغا دائىر ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەتلەر	چەمبەرگە دائىر ئۇقۇم ۋە خۇسۇسىيەتلەر
	چەمبەرنىڭ ئايلانما ئۇزۇنلۇقى
	چەمبەرنىڭ يۈزى
	چەمبەر مەركىزى بىلەن خوردا (دىئامېتىر ئەمەس)نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسىنى تۇتاشتۇرغۇچى سىزىق خوردىغا تىك بولىدۇ.
	چەمبەر مەركىزىگىچە ئارىلىقلىرى تەڭ بولغان ئىككى خوردا تەڭ بولىدۇ، چەمبەر مەركىزىگىچە ئارىلىقلىرى تەڭ بولمىغان ئىككى خوردا تەڭ بولمايدۇ، چەمبەر مەركىزىگىچە ئارىلىقى يېقىن بولغان خوردا ئۇزۇنراق بولىدۇ.
	(x_0, y_0) نۇقتىنى مەركەز، r نى رادىئۇس قىلغان چەمبەرنىڭ تەڭلىمىسى: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

CHAPTER 2

مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، ئىككى تۈرلۈك ئوبيېكتنىڭ بەزى ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئالاھىدىلىكلىرى ۋە ئۇلار ئىچىدىكى بىر تۈرلۈك ئوبيېكتنىڭ بەزى مەلۇم بولغان ئالاھىدىلىكلىرىگە ئاساسەن، يەنە بىر تۈرلۈك ئوبيېكتنىڭمۇ مۇشۇ ئالاھىدىلىكلەرگە ئىگە ئىكەنلىكى كەلتۈرۈپ چىقىرىلىدىغان خۇلاسە **ئانالوگىيىلىك خۇلاسە** (قىسقىچە ئانالوگىيە دېيىلىدۇ، بەزىدە تەققاسلاش ياكى ئوخشىتىش دەپمۇ ئاتىلىدۇ)❶. سۆزنىڭ قىسقىسى، ئانالوگىيىلىك خۇلاسە ئالاھىدىلىكتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسە چىقىرىشتۇر.

❶ كېپلېر (Kepler، 1571 — 1630) مۇنداق دېگەن: «مېنىڭ تەققاسلاشنى قەدىرلىشىم باشقا ھەرقانداق نەرسىدىن ئېشىپ چۈشىدۇ، ئۇ مېنىڭ ئەڭ ئىشەنچلىك ئوقۇتقۇچۇم، ئۇ تەبىئەتنىڭ سىرىنى يورۇتۇپ بېرەلەيدۇ.»

ماتېماتىكىدا، ئىلگىرى ھەل قىلىنىپ بولغان مەسىلە ۋە ئېرىشىلىپ بولغان بىلىملەرگە ئاساسەن، تەققاسلاش ئارقىلىق يېڭى مەسىلىلەرنى ئوتتۇرىغا قويالايمىز ۋە يېڭى بايقاشلارنى ۋۇجۇدقا چىقىرالايمىز. مەسىلەن، ماتېماتىكا ئالىمى پولىيا (Polya) مۇنداق دېگەن: «تەققاسلاش بىر ئۇلۇغ يول باشلىغۇچى بولۇپ، ستېرېئومېترىيىدىكى مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا كۆپ ھاللاردا تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى تەققاسلاش مەسىلىلىرىگە تايىنىشقا توغرا كېلىدۇ.» ماتېماتىكىدا يەنە ۋېكتور بىلەن سان، چەكسىزلىك بىلەن چەكلىكلىك، تەڭ بولماسلىق بىلەن تەڭ بولۇشمۇ ئۆزئارا تەققاسلىنىدۇ، ۋە باشقىلار.

2 - **مىسال.** ھەقىقىي سانلارنى قوشۇش ئەملى بىلەن كۆپەيتىش ئەملىنى ئۆزئارا تەققاسلاپ، ئۇلارنىڭ ئوخشىشىپ كېتىدىغان ئەمەل خۇسۇسىيەتلىرىنى بايان قىلايلى.

تەھلىل: ھەقىقىي سانلارنى قوشۇش بىلەن كۆپەيتىشنىڭ ھەر ئىككىسىدە ئىككى سان ئەمەل بېرىشكە قاتنىشىدۇ، ھەر ئىككىسى مۇئەييەن ئەمەل قانۇنىيىتىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، بۇ ئىككى ئەمەلنىڭ ھەر ئىككىسىنىڭ تەتۈر ئەملى مەۋجۇت بولۇپ، «0» بىلەن «1» ئايرىم - ئايرىم قوشۇش ئەملى ۋە كۆپەيتىش ئەملىدە ئالاھىدە ئورۇن تۇتىدۇ. شۇڭا، بىز بۇ ئىككى خىل ئەمەلنى يۇقىرىقى 4 جەھەتتىن تەققاسلىساق بولىدۇ.

يېشىش: (1) ئىككى ھەقىقىي سان ئۈستىدە قوشۇش ئەملى ياكى كۆپەيتىش ئەملى بېجىرىلگەندىن كېيىن كېلىپ چىقىدىغان نەتىجە يەنىلا ھەقىقىي سان بولىدۇ.

(2) ئەمەل قانۇنى تۇرغۇسىدىن ئېيتقاندا، قوشۇش ئەملى بىلەن كۆپەيتىش ئەملىنىڭ ھەر ئىككىسى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى بىلەن گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرىدۇ، يەنى

$a+b=b+a$	$ab=ba$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(ab)c=a(bc)$

(3) تەتۈر ئەمەل تۇرغۇسىدىن ئېيتقاندا، بۇ ئىككى ئەمەلنىڭ ھەر ئىككىسىنىڭ تەتۈر ئەملى مەۋجۇت بولۇپ، قوشۇشنىڭ تەتۈر ئەملى ئېلىش، كۆپەيتىشنىڭ تەتۈر ئەملى بۆلۈش بولىدۇ. بۇ ئىككى خىل تەتۈر ئەمەلنى بېجىرىش نەتىجىسىدە، تەڭلىمە

$a+x=0$	$ax=1(a\neq 0)$

تۆۋەندىكىدەك بىردىنبىر يېشىمگە ئىگە بولىدۇ:

$x=-a$	$x=\frac{1}{a}$

ماتېماتىكىدا يەنە نۇرغۇن توپلاملارمۇ مۇشۇ 4 ئەمەل خۇسۇسىيىتىگە ئىگە بولىدۇ، فرانسىيىلىك تالانتلىق ماتېماتىكا ئالىمى گالۇۋا (Galois) مۇشۇنداق ئەمەل خۇسۇسىيىتىگە ئىگە توپلاملارنى ئىپادىلەش ئۈچۈن «گۇرۇپپا» ئۇقۇمىنى ئوتتۇرىغا قويغان.

(4) قوشۇش ئەمىلىدە، خالىغان ھەقىقىي سانغا 0 قوشۇلسا ئۇنىڭ چوڭ - كىچىكلىكى ئۆزگەرمەيدۇ؛ كۆپەيتىش ئەمىلىدە، 1 نىڭ رولى قوشۇش ئەمىلىدىكى 0 نىڭكىگە ئوخشىشىپ كېتىدۇ، يەنى خالىغان ھەقىقىي سان بىلەن 1 نىڭ كۆپەيتمىسى ئەسلىدىكى سانغا تەڭ بولىدۇ. دېمەك،

$$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$$

تەققاسلاشتىن پايدىلانغاندا كۆپ ھاللاردا تەققاسلاش ئوبيېكتىنى تېپىۋېلىشقا توغرا كېلىدۇ. مەسىلەن، ستېرېئومېترىيىدە، تۆت ياقلىقنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئۈچۈن، تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىن ئىلگىرى تەتقىق قىلىنىپ بولغان بىر ئوبيېكتنى تېپىۋېلىپ، مۇشۇ ئوبيېكتنىڭ خۇسۇسىيىتىگە تەققاسلاش ئارقىلىق تۆت ياقلىقنىڭ خۇسۇسىيىتى ھەققىدىكى قىياسلارغا ۋە بۇ قىياسلارنى ئىسپاتلاشنىڭ پىكىر يوللىرىغا ئېرىشىشكە بولىدۇ.

ئىزدىنىش

سىزنىڭچە، تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى قايسى خىل شەكىلنى تۆت ياقلىققا تەققاسلىنىدىغان ئوبيېكت قىلىشقا بولىدۇ؟

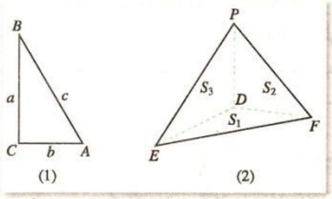
بىز تەققاسلاش ئوبيېكتىنى ھەر خىل تۇرغۇلاردىن بەلگىلەيمىز. مەسىلەن، تۆت ياقلىقنى قورشاپ چىققان گېئومېترىيىلىك ئېلېمېنتلارنىڭ سانى، ئورۇن مۇناسىۋىتى، ئۆلچىمى دېگەندەك. بۇنىڭدىكى ئاساسىي پرىنسىپ تەتقىق قىلىنىدىغان مەسىلىنىڭ ئېھتىياجىغا ئاساسەن مۇۋاپىق تەققاسلاش ئوبيېكتىنى تاللاشتىن ئىبارەت. ئالايلۇق، گېئومېترىيىلىك جىسىمنى تەشكىل قىلىدىغان ئېلېمېنتلار سانىدىن قارىغاندا، تۆت ياقلىق 4 تەكشىلىكتىن قورشالغان بولۇپ، ئۇ بوشلۇقتىكى سانى ئەڭ ئاز ئاساسىي ئېلېمېنت (تەكشىلىك)لار بىلەن قورشالغان يېپىق گېئومېترىيىلىك جىسىم بولىدۇ؛ تەكشىلىكتە، بىر يېپىق شەكىلنى ئىككى تۈز سىزىق بىلەن قورشىغىلى بولمايدۇ، ھالبۇكى، 3 تۈز سىزىق بىلەن بىر ئۈچبۇلۇڭ قورشىغىلى بولىدىغانلىقى، يەنى ئۈچبۇلۇڭ تەكشىلىكتىكى سانى ئەڭ ئاز ئاساسىي ئېلېمېنت (تۈز سىزىق)لار بىلەن قورشالغان يېپىق شەكىل بولغانلىقى ئۈچۈن، مۇشۇ تۇرغۇدىن ئويلاشقاندا، ئۈچبۇلۇڭنى تۆت ياقلىققا تەققاسلىنىدىغان ئوبيېكت قىلساق بولىدۇ.

ئەمدى ستېرېئو شەكىلنىڭ خۇسۇسىيىتى ھەققىدىكى قىياس ئەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى يەكۈنگە تەققاسلاش ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىلىدىغان بىر مىسالنى كۆرۈپ ئۆتەيلى.

3 - مىسال. تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭغا دائىر گوگۇ تېئورېمىسىغا تەققاسلاپ، بوشلۇقتىكى تۆت ياقلىقنىڭ خۇسۇسىيىتى ھەققىدە قىياس قىلىپ باقايلى.

تەھلىل: تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپى تىك بولغانلىقتىن، 3 يېقى ئىككى - ئىككىدىن تىك بولغان تۆت ياقلىقنى تاللاپ، ئۇنى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەققاسلاش ئوبيېكتى قىلىمىز.

1.1.2 - رەسىمدىكىدەك، Rt$\triangle ABC$ غا تۆت ياقلىق $P-DEF$ ماس كېلىدۇ؛ Rt$\triangle ABC$ نىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ كېسىشىپ بىر تىك بۇلۇڭ ھاسىل قىلىشىغا تۆت تەرەپلىك $P-DEF$ نىڭ 3 يېقىنىڭ بىر چوققىدا 3 تىك ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ ھاسىل قىلىشى ماس كېلىدۇ؛ Rt$\triangle ABC$ نىڭ ئىككى تىك تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى a، b غا تۆت ياقلىق $P-DEF$ نىڭ $\triangle DEF$، $\triangle FPD$، $\triangle DPE$ ياقلىرىنىڭ S_1، S_2، S_3 يۈزلىرى ماس كېلىدۇ؛ Rt$\triangle ABC$ نىڭ يانتۇ تەرىپىنىڭ ئۇزۇنلۇقى c غا تۆت ياقلىق $P-DEF$ نىڭ $\triangle PEF$ يېقىنىڭ يۈزى S ماس كېلىدۇ.



1.1.2 ـ رەسىم

بۇنىڭغا ئاساسەن، $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ دىكى گوگو تېئورېمىسىغا تەققاسلاپ، تۆت ياقلىق $P-DEF$ نىڭ تۆت يېقىنىڭ يۈزلىرى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى قىياس قىلالايمىز.

يېشىش: 1.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ دا، گوگو تېئورېمىسىغا ئاساسەن:

$$c^2=a^2+b^2.$$

شۇنىڭ بىلەن، تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭغا دائىر گوگو تېئورېمىسىغا تەققاسلاپ، تۆت ياقلىق $P-DEF$ تا تۆۋەندىكىنى كۆچكە ئىگە دەپ قىياس قىلالايمىز:

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$$ ❶

❶ بۇ يەكۈن توغرىمۇ؟ ئۆزۈڭلار ئىسپاتلاپ كۆرۈڭلار.

يۇقىرىدىكى خۇلاسە چىقىرىش جەريانىنى تۆۋەندىكىدەك ئومۇملاشتۇرۇشقا بولىدۇ:

بۇنىڭدىن ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسە ۋە ئانالوگىيىلىك خۇلاسىدە بار پاكىتقا ئاساسەن، كۆزىتىش، تەھلىل قىلىش، سېلىشتۇرۇش، تەسەۋۋۇر قىلىش، ئاندىن يىغىنچاقلاش ۋە تەققاسلاش ئارقىلىق قىياس ئوتتۇرىغا قويۇلىدىغانلىقىنى كۆرەلەيمىز، بىز ئۇلارنى ئومۇملاشتۇرۇپ ئەقىلگە مۇۋاپىق **خۇلاسە** (plausible reasoning) دەپ ئاتايمىز❷.

❷ فرانسىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى لاپلاس (Laplace، 1749 — 1827) مۇنداق دېگەن: «ئىندۇكسىيىلەش بىلەن تەققاسلاش ماتېماتىكىدىمۇ ھەقىقەتنى بايقاشتىكى ئاساسىي قورال ھېسابلىنىدۇ.»

ماتېماتىكىلىق تەتقىقاتلاردا، بىر يېڭى يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرىشتىن ئىلگىرى، ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە كۆپ ھاللاردا بىزنىڭ يەكۈننى قىياس قىلىشىمىز ۋە بايقىشىمىزغا ياردەم بېرىدۇ؛ بىر ماتېماتىكىلىق يەكۈننى ئىسپاتلاشتىن ئىلگىرى، ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە كۆپ ھاللاردا بىزنى ئىسپاتلاشنىڭ پىكىر يولى ۋە يۆنىلىشى بىلەن تەمىن ئېتىدۇ.

ئەمدى بىر مىسال كۆرەيلى.

4 ـ مىسال. 2.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، ئۈچ يىڭنە ۋە ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى بىر يىڭنىگە ئۆتكۈزۈلگەن بىرقانچە مېتال ياپراقچە بار. مېتال ياپراقچىلەرنىڭ ھەممىسىنى تۆۋەندىكى قائىدە بويىچە بىر يىڭنىدىن يەنە بىر يىڭنىگە يۆتكەش كېرەك:

2.1.2 - رەسىم

1. ھەر قېتىمدا بىرلا تەخسىنى يۆتكەشكە بولىدۇ؛

2. چوڭ تەخسىنى كىچىك تەخسىنىڭ ئۈستىگە قويۇشقا بولمايدۇ.

ئەمدى قىياس قىلىپ باقايلى: n دانە مېتال تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەشتە، كەم دېگەندە قانچە قېتىم يۆتكەش كېرەك؟

تەھلىل: 1، 2، 3، 4 دانە مېتال تەخسىنى يۆتكىلىدىغان ئەھۋالدىن قول سېلىپ، ئۇنىڭدىكى قانۇنىيەت ئۈستىدە ئىزدىنىمىز، ئاندىن يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ، n دانە مېتال تەخسىنى يۆتكەش ئۈچۈن كېتىدىغان قېتىم سانىنى يىغىنچاقلاپ چىقىمىز.

يېشىش: $n=1$ بولغاندا، مېتال تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەپ، بۇ يۆتكەشنى (13)[1] بىلەن ئىپادىلەيمىز، بۇ چاغدا جەمئىي بىر قېتىم يۆتكىگەن بولىمىز.

> ❶ (13) مېتال تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكىگەنلىكنى ئىپادىلەيدۇ، كېيىنكىلەرنىمۇ مۇشۇ قائىدە بويىچە ئىپادىلىنىدۇ.

$n=2$ بولغاندا، چوڭ تەخسىنى كىچىك تەخسىنىڭ ئۈستىگە قويۇپ قېلىشتىن ساقلىنىش ئۈچۈن، 2 - يىڭنىنى «ئۆتكۈنچى يىڭنە» قىلىۋالىمىز، يۆتكەش تەرتىپى مۇنداق:

(1) 1 - تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 2 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(2) 2 - تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(3) 1 - تەخسىنى 2 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز.

يۇقىرىدىكى يۆتكەشلەرنى بەلگە بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز.

(12) (13) (23).

بۇ چاغدا جەمئىي 3 قېتىم يۆتكىگەن بولىمىز.

$n=3$ بولغاندا، ئۈستى تەرەپتىكى 2 تەخسىنى بىر پۈتۈن گەۋدە دەپ قارىساق، تەخسە يۆتكەشنى $n=2$ بولغاندىكى ئەھۋالغا يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ، يۆتكەش تەرتىپى مۇنداق:

(1) ئۈستى تەرەپتىكى 2 تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 2 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(2) 3 - تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(3) ئۈستى تەرەپتىكى 2 تەخسىنى 2 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز.

(1) ۋە (2) باسقۇچتىكى يۆتكەشتە ئۆتكۈنچى يىڭنىگە ئايلىنىشقا توغرا كېلىدۇ. بۇ يۆتكەشلەرنى بەلگە بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز:

(13) (12) (32); (13); (21) (23) (13).

بۇ چاغدا جەمئىي 7 قېتىم يۆتكىگەن بولىمىز.

$n=4$ بولغاندا، ئۈستى تەرەپتىكى 3 تەخسىنى بىر پۈتۈن گەۋدە دەپ قارايمىز، يۆتكەش تەرتىپى مۇنداق:

(1) ئۈستى تەرەپتىكى 3 تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 2 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(2) 4 - تەخسىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(3) ئۈستى تەرەپتىكى 3 ياپراقچىنى 2 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز.

بۇ يۆتكەشلەرنى بەلگە بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەيمىز:

$$(12)\ (13)\ (23)\ (12)\ (31)\ (32)\ (12);\ (13);$$

$$(23)\ (21)\ (31)\ (23)\ (12)\ (13)\ (23).$$

بۇ چاغدا جەمئىي 15 قېتىم يۆتكىگەن بولىمىز.

ياپراقچە يۆتكەشنى مۇشۇ يەرگىچە داۋاملاشتۇرغاندىن كېيىن، بىز تەرتىپ بويىچە 1، 2، 3، 4 دانە مېتال ياپراقچىنى يۆتكەش ئۈچۈن كېتىدىغان قېتىم سانلىرىدىن تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقىنى ھاسىل قىلالايمىز:

$$1, 3, 7, 15.$$

بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنى كۆزىتىپ، ئۇنىڭدا تۆۋەندىكىدەك قانۇنىيەتنىڭ بارلىقىنى بايقىيالايمىز:

$$1=2^1-1,\ 3=2^2-1,\ 7=2^3-1,\ 15=2^4-1.$$

ئەمدى بۇنىڭغا ئاساسەن شۇنداق قىياس قىلالايمىزكى، ئەگەر n دانە مېتال ياپراقچىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەش ئۈچۈن كەم دېگەندە a_n قېتىم يۆتكەشكە توغرا كەلسە، ئۇ ھالدا سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى:

$$a_n=2^n-1(n \in \mathbf{N}^*). \qquad ①$$

ئىزدىنىش

n دانە مېتال ياپراقچىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەشتە، قانداق يۆتكىگەندە يۆتكەش قېتىم سانىنى ئەڭ ئاز قىلغىلى بولىدۇ؟

$n=1, 2, 3, 4$ بولغاندىكى يۆتكەش ئۇسۇللىرى ئۈستىدە ئىزدىنىش ئارقىلىق، n دانە مېتال ياپراقچىگە باب كېلىدىغان يۆتكەش ئۇسۇلىنى يىغىنچاقلاپ چىقىشقا بولىدۇ. n دانە ياپراقچە يۆتكەشنى تۆۋەندىكى 3 باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇندايمىز:

(1) ئۈستى تەرەپتىكى $(n-1)$ دانە ياپراقچىنى 1 - يىڭنىدىن 2 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(2) n ىنچى ياپراقچىنى 1 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز؛

(3) ئۈستى تەرەپتىكى $(n-1)$ دانە ياپراقچىنى 2 - يىڭنىدىن 3 - يىڭنىگە يۆتكەيمىز.

مۇشۇنداق قىلغاندا، n دانە ياپراقچە يۆتكەش ۋەزىپىسىنى $(n-1)$ دانە ياپراقچىنى 2 قېتىم يۆتكەش ۋە n ىنچى ياپراقچىنى 1 قېتىم يۆتكەشكە ئايلاندۇرغىلى بولىدۇ. ھالبۇكى، $(n-1)$ دانە ياپراقچىنى يۆتكەش ئۈچۈن $(n-2)$ دانە ياپراقچىنى 2 قېتىم يۆتكەش ۋە $(n-1)$ ىنچى ياپراقچىنى 1 قېتىم يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ، $(n-2)$ دانە ياپراقچىنى يۆتكەش ئۈچۈن $(n-3)$ دانە ياپراقچىنى 2 قېتىم يۆتكەش ۋە $(n-2)$ ىنچى ياپراقچىنى 1 قېتىم يۆتكەشكە توغرا كېلىدۇ، ⋯ مۇشۇنداق داۋاملاشتۇرۇپ، n دانە ياپراقچە يۆتكەشنى 1 دانە ياپراقچە يۆتكىگەندىكى ئەھۋالغا كەلتۈرگىلى بولىدۇ. بىز يۇقىرىدىكى بۇ جەريانغا ئاساسەن، رېكۇررېنت فورمۇلىسى

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbf{N}^* \text{ ھەمدە } n>1) \end{cases}$$

نى كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، بۇ فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ ① ئىپادىنىڭ توغرا ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلىيالايمىز.

ئومۇمەن، ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈن پەقەت بىر خىل قىياسلا بولۇپ، ئۇنىڭ ئىشەنچلىك بولۇشى ناتايىن❶.

❶ «ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە تەۋەككۇلچىلىك ۋە تالاش ـ تارتىش تۇسىنى ئالغان ۋاقىتلىق خۇلاسىدۇر.»

— پوليا

مەسىلەن، فرانسىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى فېرمات

$$2^{2^1}+1=5,$$
$$2^{2^2}+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=257,$$
$$2^{2^4}+1=65\,537$$

لەرنىڭ تۈپ سان بولىدىغانلىقىنى كۆزەتكەن، شۇنىڭ بىلەن ئۇ ئىندۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ، ھەرقانداق $2^{2^n}+1$ ❷ ($n \in \mathbf{N}^*$) كۆرۈنۈشتىكى سان چوقۇم تۈپ سان بولىدۇ دېگەن مەشھۇر فېرمات قىياسىنى ئوتتۇرىغا قويغان. بىراق، يېرىم ئەسىردىن كېيىن، ھېسابلاشقا ئۇستا ماتېماتىكا ئالىمى ئېيلېر (Euler) 5 ـ فېرمات سانى

❷ بۇ سان ئادەتتە فېرمات سانى دەپ ئاتىلىپ، F_n قىلىپ يېزىلىدۇ.

$$F_5=2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\times6\,700\,417$$

نىڭ تۈپ سان ئەمەسلىكىنى بايقاپ، فېرماتنىڭ قىياسىنى ئاغدۇرۇپ تاشلىغان.

مەشىق

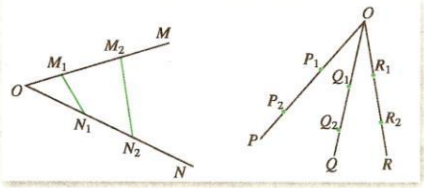
1. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا $a_1=1$، $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)$ ($n\geqslant 2$) بولسا، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى قىياس قىلىڭ.

2. «ئۈچبۇلۇڭلۇق سانلار»

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \cdots \\ 1 \quad 10 \quad 45 \quad \cdots \quad 45 \quad 10 \quad 1 \end{array}$$

نى كۆزىتىپ، قوشنا ئىككى توغرا قۇردىكى سانلارنىڭ مۇناسىۋىتىنى تېپىڭ.

3. رەسىمدىكىدەك، ئەگەر M_1، M_2 نۇقتىلار ۋە N_1، N_2 نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم OM ۋە ON نۇر ئۈستىدە ياتسا، ئۇ ھالدا $\frac{S_{\triangle OM_1N_1}}{S_{\triangle OM_2N_2}}=\frac{OM_1}{OM_2}\cdot\frac{ON_1}{ON_2}$ بولىدۇ. ئەگەر P_1، P_2 نۇقتىلار، Q_1، Q_2 نۇقتىلار ۋە R_1، R_2 نۇقتىلار ئايرىم ـ ئايرىم OP، OQ ۋە OR نۇر ئۈستىدە ياتسا، يۇقىرىدىكىگە ئوخشىشىپ كېتىدىغان قانداق يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ؟



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

2-1-2 دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە

كۈندىلىك تۇرمۇش ۋە ماتېماتىكا ئۆگىنىش جەريانىدا، بىز كۆپ ھاللاردا بەزى ئومۇمىي ھۆكۈملەرنى ئاساس قىلىپ، بەزى ئايرىم، كونكرېت ھۆكۈملەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز. مەسىلەن:

(1) بارلىق مېتاللار توك ئۆتكۈزىدۇ، ئۇران بولسا مېتال، شۇڭا ئۇران توك ئۆتكۈزىدۇ؛

(2) قۇياش سىستېمىسىدىكى سەييارىلەرنىڭ ھەممىسى ئېللىپس شەكىللىك ئوربىتىدا قۇياشنى چۆرىدەپ ئايلىنىدۇ، ئۇران — قۇياش سىستېمىسىدىكى سەييارە، شۇڭا ئۇران ئېللىپس شەكىللىك ئوربىتىدا قۇياشنى چۆرىدەپ ئايلىنىدۇ؛

(3) بارلىق تاق سانلار 2 گە پۈتۈن بۆلۈنمەيدۇ، $(2^{100}+1)$ تاق سان، شۇڭا $(2^{100}+1)$ بولسا 2 گە پۈتۈن بۆلۈنمەيدۇ؛

(4) تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيىلەرنىڭ ھەممىسى دەۋرىي فۇنكسىيە، $\tan\alpha$ دېگىنىمىز تىرىگونومېترىيىلىك فۇنكسىيە، شۇڭا $\tan\alpha$ دەۋرىي فۇنكسىيە بولىدۇ؛

(5) ئىككى تۈز سىزىق پاراللېل بولسا، ئىچكى بىر ياقلىق بۇلۇڭلار ئۆزئارا تولدۇرغۇچى بۇلۇڭلار بولىدۇ. ئەگەر $\angle A$ بىلەن $\angle B$ ئىككى پاراللېل سىزىقتىكى ئىچكى بىر ياقلىق بۇلۇڭلار بولسا، ئۇ ھالدا $\angle A+\angle B=180^\circ$ بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى خۇلاسىلەردە ئومۇمىي خاراكتېرلىك پرىنسىپنى چىقىش قىلغان ھالدا مەلۇم ئالاھىدە ئەھۋالدىكى يەكۈن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان. بىز بۇنداق خۇلاسە چىقىرىشنى **دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە**[1] (demonstrative reasoning) دەپ ئاتايمىز. سۆزنىڭ قىسقىسى، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە ئومۇمىيلىقتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسىدۇر.

[1] دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە لوگىكىلىق خۇلاسە دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

يۇقىرىدا كەلتۈرۈلگەن دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىگە دائىر مىساللارنىڭ ھەممىسىدە ئۈچ بۆلەك بار بولۇپ، ئۇ، «ئۈچ ھۆكۈملۈك (ياكى سىللوگىزم)» دەپ ئاتىلىدۇ. ئۈچ ھۆكۈملۈكتىكى 1 - بۆلەك «چوڭ ئاساس» دېيىلىدۇ، مەسىلەن، «بارلىق مېتاللار توك ئۆتكۈزىدۇ»، بۇنىڭدا بىر ئومۇمىي پرىنسىپ سۆزلەنگەن؛ 2 - بۆلەك «كىچىك ئاساس» دېيىلىدۇ، مەسىلەن، «ئۇران بولسا مېتال»، بۇنىڭدا بىر ئالاھىدە ئەھۋال كۆرسىتىلگەن؛ 3 - بۆلەك «يەكۈن» دېيىلىدۇ، مەسىلەن، «ئۇران توك ئۆتكۈزىدۇ»، بۇ بولسا كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈندۇر.

«ئۈچ ھۆكۈملۈك» دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىنىڭ ئومۇمىي ئەندىزىسى بولۇپ، تۆۋەندىكىلەرنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ:

(1) چوڭ ئاساس — مەلۇم بولغان ئومۇمىي پرىنسىپ؛

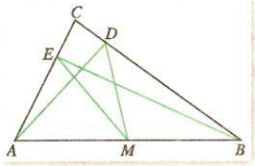
(2) كىچىك ئاساس — تەتقىق قىلىنىدىغان ئالاھىدە ئەھۋال؛

(3) يەكۈن — ئومۇمىي پرىنسىپقا ئاساسەن، ئالاھىدە ئەھۋال توغرىسىدا كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان ھۆكۈم.

مۇلاھىزە ؟

«ئۈچ ھۆكۈملۈك»تىن پايدىلىنىپ خۇلاسە چىقىرىلىدىغان مىساللاردىن يەنە بىرقانچىنى كەلتۈرەلەمسىز؟

ماتېماتىكىدىكى ئىسپاتلاشلار ئاساسلىقى دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ ئېلىپ بېرىلىدۇ. ئەمدى بىر مىسال كۆرۈپ باقايلى.



3.1.2 ـ رەسىم

5 ـ مىسال. 3.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك، تار بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ ABC دا $AD\perp BC$ (تىك ئاساسى D)، $BE\perp AC$ (تىك ئاساسى E). AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى M دىن D، E غىچە ئارىلىقلارنىڭ تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: (1) بىر ئىچكى بۇلۇڭى تىك بۇلۇڭ بولغان ئۈچبۇلۇڭ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ، .... چوڭ ئاساس

$\triangle ABD$ دا $AD\perp BC$، يەنى $\angle ADB=90^\circ$، .... كىچىك ئاساس

شۇڭا، $\triangle ABD$ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ. .... يەكۈن

ئوخشاش يول بىلەن، $\triangle AEB$ مۇ تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

(2) چۈنكى تىك بۇلۇڭلۇق ئۈچبۇلۇڭنىڭ يانتۇ تەرىپىدىكى مېدىئانىسى يانتۇ تەرەپنىڭ يېرىمىغا تەڭ، .... چوڭ ئاساس

M نۇقتا $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ نىڭ يانتۇ تەرىپى AB نىڭ ئوتتۇرا نۇقتىسى، DM بولسا يانتۇ تەرەپتىكى مېدىئانا، .... كىچىك ئاساس

شۇڭا، $DM=\frac{1}{2}AB$. .... يەكۈن

ئوخشاش يول بىلەن، $EM=\frac{1}{2}AB$.

شۇڭا، $DM=EM$.

«ئۈچ ھۆكۈملۈك»نى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

چوڭ ئاساس:	M دېگىنىمىز P .
كىچىك ئاساس:	S دېگىنىمىز M.
يەكۈن:	S دېگىنىمىز P.

«ئۈچ ھۆكۈملۈك»نى توپلام بىلىملىرىدىن پايدىلىنىپمۇ چۈشەندۈرەلەيمىز: ئەگەر توپلام M نىڭ بارلىق ئېلېمېنتلىرى P خۇسۇسىيەتكە ئىگە بولۇپ، S توپلام M نىڭ بىر قىسمىي توپلىمى بولسا، ئۇ ھالدا S تىكى بارلىق ئېلېمېنتلارمۇ P خۇسۇسىيەتكە ئىگە بولىدۇ.

بۇنىڭدىن كۆرەلەيمىزكى، مەسىلىلەرنى ئۈچ ھۆكۈملۈكتىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغاندا، ئالدى بىلەن نېمىنىڭ چوڭ ئاساس ۋە كىچىك ئاساس ئىكەنلىكىنى ئايدىڭلاشتۇرۇۋېلىش كېرەك. بىراق، چوڭ ئاساس روشەن ئايان بولۇپ تۇرغان ئەھۋالدا، باياننى ئىخچاملاش ئۈچۈن ئۇنى قىسقارتىۋېتىشكىمۇ بولىدۇ.

ئەمدى يەنە بىر مىسال كۆرۈپ باقايلى.

6 ـ مىسال. فۇنكسىيە $f(x)=-x^2+2x$ نىڭ $(-\infty, 1)$ ئىچىدە ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: بۇ مىسالنى ئىسپاتلاشتا تايىنىلىدىغان چوڭ ئاساس: ئەگەر مەلۇم ئىنتېرۋال (a, b) ئىچىدە $f'(x)>0$ بولسا، ئۇ ھالدا $y=f(x)$ فۇنكسىيە بۇ ئىنتېرۋال ئىچىدە مونوتون ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

CHAPTER 2

كىچىك ئاساس: $f(x)=-x^2+2x$ ئىنتېرۋال $(-\infty, 1)$ ئىچىدە $f'(x)>0$ نى قانائەتلەندۈرىدۇ، بۇ، مىسالنى ئىسپاتلاشنىڭ ئاچقۇچى.
ئىسپات: $f'(x)=-2x+2$ ، $x\in(-\infty, 1)$ بولغاندا، $1-x>0$ بولىدۇ، شۇڭا:

$$f'(x)=-2x+2=2(1-x)>0.$$

شۇنىڭ بىلەن، «ئۈچ ھۆكۈملۈك»كە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، $f(x)=-x^2+2x$ ئىنتېرۋال $(-\infty, 1)$ دا ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ.

باشقا ئىسپاتلاش ئۇسۇلى بارمۇ؟

دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدە، چوڭ ـ كىچىك ئاساسلار ۋە خۇلاسە چىقىرىش شەكلى توغرا بولسىلا، كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈن جەزمەن توغرا بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ ئاشقۇچى فۇنكسىيىدۇر، .... چوڭ ئاساس

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بولسا كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە،.. كىچىك ئاساس

شۇڭا، $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ئاشقۇچى فۇنكسىيە بولىدۇ. ....،.. يەكۈن

(1) يۇقىرىقى خۇلاسە چىقىرىش شەكلى توغرىمۇ؟
(2) خۇلاسىنىڭ يەكۈنى توغرىمۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

يۇقىرىدىكى خۇلاسە چىقىرىش شەكلى توغرا، ئەمما ئۇنىڭدىكى چوڭ ئاساس خاتا (چۈنكى $0<a<1$ بولغاندا، كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيە $y=a^x$ كېمەيگۈچى فۇنكسىيە بولىدۇ) بولغانلىقى ئۈچۈن، كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈن ئەلۋەتتە خاتا بولىدۇ.

«ئۈچ ھۆكۈملۈك»نى قەدىمكى گرېتسىيىلىك ئارىستوتېل بەرپا قىلغان، ئۇ يەنە ھەرقايسى پەنلەر سىستېمىسىنى دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ تۈرغۈزۈش ئىدىيىسىنىمۇ ئوتتۇرىغا قويغان. مەسىلەن، ئېۋكلىدنىڭ «گېئومېترىيە ئاساسلىرى»[1] تىپىك دېدۇكسىيىلىك سىستېما بولۇپ، ئۇنىڭدا 10 ئاكسىئوما ۋە پوستۇلاتقا[2] ئاساسلانغان ھالدا، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ باشقا بارلىق ھۆكۈملۈكلەر كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان.

مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، دەسلەپكى ئۇقۇم ۋە ئىسپاتلانمايدىغان بىر گۇرۇپپا دەسلەپكى ھۆكۈملۈك (ئاكسىئوما، پوستۇلات) نى ئىمكانقەدەر ئاز تاللاپ، بۇلارنى ئاساس قىلغان ھالدا، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ يەكۈنلەرنى ئىمكانقەدەر كۆپ كەلتۈرۈپ چىقىرىشتىن ئىبارەت بۇ خىل ئۇسۇل ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى دەپ ئاتىلىدۇ.

«گېئومېترىيە ئاساسلىرى»دىن كېيىن، ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى تەبىئىي پەن ۋە ئىجتىمائىي پەن ساھەلىرىدە كەڭ قوللىنىلدى. مەسىلەن، نيۇتون «تەبىئەت پەلسەپىسىدىكى ماتېماتىكىلىق پرىن-

[1] «ماتېماتىكا 2» نىڭ 2 ـ بابىدىكى ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە سەھىپىسى «ئېۋكلىدنىڭ (گېئومېترىيە ئاساسلىرى) ۋە ئاكسىئوملاشتۇرۇش ئۇسۇلى»غا قاراڭ.

[2] ئىسپاتلىمايلا توغرا دەپ قاراشقا بولىدىغان پەرەز پوستۇلات دەپ ئاتىلىدۇ.

سىپلار» دېگەن ئۇلۇغ ئەسىرىدە نيۇتون ئۈچ قانۇننى ئاكسىئوما سۈپىتىدە قوللىنىپ، ئاسمان جىسىملىرى بوشلۇقىغا دائىر بىر قاتار پەننىي نەزەرىيىنى دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقارغان ھەمدە نيۇتون مېخانىكىسىنىڭ بىر پۈرۈش مۇكەممەل نەزەرىيە سىستېمىسىنى ۋۇجۇدقا كەلتۈرگەن.

مۇشۇ يەرگە كەلگىچە، بىز ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن ئىبارەت ئىككى خىل خۇلاسە چىقىرىش شەكلىنى ئۆگەنگەن بولدۇق.

مۇلاھىزە؟

ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسە بىلەن دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىنىڭ ئاساسىي پەرقى نېمە؟

يىغىنچاقلاش ۋە تەققاسلاش كۆپ قوللىنىلىدىغان ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسىدۇر. خۇلاسە چىقىرىش شەكلىدىن قارىغاندا، يىغىنچاقلاش قىسمەنلىكتىن پۈتۈنلۈككە، ئايرىملىقتىن ئومۇمىيلىققا بولغان خۇلاسە چىقىرىش، تەققاسلاش دېگىنىمىز ئالاھىدىلىكتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسە چىقىرىش؛ دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە بولسا ئومۇمىيلىقتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسە چىقىرىش ھېسابلىنىدۇ. خۇلاسىلەشتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈندىن قارىغاندا، ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسىنىڭ يەكۈنىنىڭ توغرا بولۇشى ناتايىن بولۇپ، ئۇنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئىسپاتلاشقا توغرا كېلىدۇ؛ ھالبۇكى، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدە چوڭ ـ كىچىك ئاساسلار ۋە خۇلاسە چىقىرىش شەكلى توغرا بولسىلا، كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈن چوقۇم توغرا بولىدۇ.

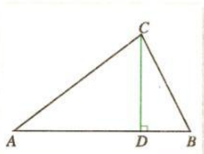
دۇنيانى بىلىش جەريانىدا، كىشىلەرنىڭ كۆزىتىش، تەجرىبە ئىشلەش ئارقىلىق تەسىرات ـ تەجرىبىلەرگە ئېرىشىشىگە توغرا كېلىدۇ؛ شۇنداقلا ئېرىشكەن بۇ تەسىرات ـ تەجرىبىلىرىنىڭ توغرا ـ ساختىلىقىنى پەرق ئېتىشىگە ياكى جۇغلىغان بىلىملىرىنى پىششىقلاش، رەتلەش ئارقىلىق ئېدىتلاشتۇرۇشى ۋە سىستېمىلاشتۇرۇشىغا توغرا كېلىدۇ. ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسە بىلەن دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە دەل مۇشۇ ئىككى ھالقىدا ئايرىم ـ ئايرىم مۇھىم رول ئوينايدۇ.

ماتېماتىكا تورغۇسىدىن ئېيتقاندا، دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە ماتېماتىكىلىق يەكۈنلەرنى ئىسپاتلاش، ماتېماتىكا سىستېمىسىنى بەرپا قىلىشنىڭ مۇھىم تەپەككۇر جەريانى ھېسابلىنىدۇ، ھالبۇكى، ماتېماتىكىلىق يەكۈن، ئىسپاتلاش پىكىر يوللىرى قاتارلىقلارنى بايقاشتا ئاساسلىقى يەنىلا ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسىگە تايىنىشقا توغرا كېلىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، بىز ئىسپاتلاشنى ئۆگىنىۋېلىپلا قالماي، يەنە قىياس قىلىشنىمۇ ئۆگىنىۋېلىشىمىز كېرەك.

مەشىق

1. مۇشۇ پاراگرافنىڭ بېشىدىكى دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە (2) ~ (5) نى ئۈچ ھۆكۈملۈك شەكلىدە يېزىڭ.

2. ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=cq^n$ $(cq\neq 0)$ بولغان سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى $\{a_n\}$ نىڭ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاڭ ھەم ئىسپاتلاش جەريانىدىكى ئۈچ ھۆكۈملۈكنى تەھلىل قىلىڭ.



(3 ـ مىسال ئۈچۈن)

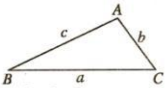
3. رەسىمدىكىدەك، $\triangle ABC$ دا $AC>BC$ بولۇپ، CD نىڭ AB تەرەپتىكى ئېگىزلىك ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، $\angle ACD>\angle BCD$ نى ئىسپاتلاڭ.

ئىسپات: $\triangle ABC$ دا $CD\perp AB$، $AC>BC$ بولغانلىقتىن، $AD>BD$ بولىدۇ، شۇڭا $\angle ACD>\angle BCD$.

يۇقىرىقى ئىسپاتلاش جەريانىدىكى خاتالىقنى كۆرسىتىڭ.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

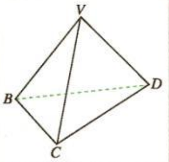
تەكشىلىك ۋە بوشلۇقتىكى كوسىنۇس تېئورېمىسى



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

1 ـ رەسىم

تەكشىلىكتە، كوسىنۇس تېئورېمىسى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپى بىلەن بىر ئىچكى بۇلۇڭى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى يورۇتۇپ بېرىدۇ (1 ـ رەسىم). كوسىنۇس تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ، بېرىلگەن ئىككى تەرەپ ۋە ئۇلارنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا ئاساسەن ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچىنچى تەرىپىنى ھېسابلاپ چىقىقلى ياكى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپىگە ئاساسەن ئۇنىڭ ئۈچ ئىچكى بۇلۇڭىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ.



2 ـ رەسىم

تۆۋەندە تۆت ياقلىقنى ئۈچبۇلۇڭغا تەققاسلاپ ھەم تۆت ياقلىقنىڭ ياقلىرىنى ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپلىرىگە، تۆت ياقلىقنىڭ ياقلىرىنىڭ يۈزىنى ئۈچبۇلۇڭنىڭ تەرەپلىرىنىڭ ئۇزۇنلۇقىغا، تۆت ياقلىقنىڭ ئىككى يېقىدىن ھاسىل بولغان ئىككى ياقلىق بۇلۇڭنى ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئىككى تەرىپىنىڭ ئارا بۇلۇڭىغا ماس كەلتۈرۈپ، قانداق يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغانلىقىغا قاراپ باقايلى.

1 ـ ۋە 2 ـ رەسىملەرگە ئاساسەن، تۆۋەندىكى تەققاسلاش مۇناسىۋەتلىرىگە ئېرىشەلەيمىز (ئىككى ياقلىق بۇلۇڭ $V-BC-D$ ،$V-CD-B$ ،$V-BD-C$ ،$C-VB-D$ ،$B-VC-D$ ،$B-VD-C$ لارنى تەرتىپ بويىچە α_1 ، α_2 ، α_3 ، β_1 ، β_2 ، β_3 دەپ پەرەز قىلىمىز):

$\triangle ABC$	تۆت ياقلىق $V-BCD$
a, b, c	$S_{\triangle VBC}, S_{\triangle VCD}, S_{\triangle VBD}, S_{\triangle BCD}$
A, B, C	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$

كوسىنۇس تېئورېمىسىغا تەققاسلاپ، تۆۋەندىكى قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالايمىز:

$$S^2_{\triangle BCD}=S^2_{\triangle VBC}+S^2_{\triangle VCD}+S^2_{\triangle VBD}-2S_{\triangle VBC}S_{\triangle VCD}\cos\beta_2-2S_{\triangle VCD}S_{\triangle VBD}\cos\beta_3-2S_{\triangle VBD}S_{\triangle VBC}\cos\beta_1,$$

$S^2_{\triangle VBC}=$ ____,

$S^2_{\triangle VBD}=$ ____,

$S^2_{\triangle VCD}=$ ____.

مانا بۇ، «تۆت ياقلىققا دائىر كوسىنۇس تېئورېمىسى».

بۇ قىياسنى قانداق ئىسپاتلاش كېرەك؟ بۇ يەردە بىز كوسىنۇس تېئورېمىسىنىڭ ئىسپاتلىنىشىغا تەققاسلاش ئارقىلىق «تۆت ياقلىققا دائىر كوسىنۇس تېئورېمىسى»نى ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى بارلىققا كەلتۈرىمىز.

بۇنىڭ ئۈچۈن $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ نىڭ ئىسپاتلىنىشىنى مىسالغا ئالىمىز.

①، ②، ③ لەرنىڭ كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلىيالامسىز؟

1 ـ رەسىمگە ئاساسەن:

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B, & ① \\ b=c\cos A+a\cos C, & ② \\ c=a\cos B+b\cos A. & ③ \end{cases}$$

$a\times$① دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$a^2=ab\cos C+ac\cos B. \quad ④$$

② ۋە ③ نى ④ كە قويساق:

$$a^2=b(b-c\cos A)+c(c-b\cos A)$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

ئەمدى يۇقىرىقى كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىغا تەققاسلاپ، تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلايمىز:

$$S^2_{\triangle BCD}=S^2_{\triangle VBC}+S^2_{\triangle VCD}+S^2_{\triangle VBD}-2S_{\triangle VBC}S_{\triangle VCD}\cos\beta_2-2S_{\triangle VCD}S_{\triangle VBD}\cos\beta_3-2S_{\triangle VBD}S_{\triangle VBC}\cos\beta_1.$$

2 ـ رەسىمگە ئاساسەن:

$$S_{\triangle BCD}=S_{\triangle VBC}\cos\alpha_1+S_{\triangle VCD}\cos\alpha_2+S_{\triangle VBD}\cos\alpha_3, \quad ⑤$$
$$S_{\triangle VBC}=S_{\triangle BCD}\cos\alpha_1+S_{\triangle VBD}\cos\beta_1+S_{\triangle VCD}\cos\beta_2, \quad ⑥$$
$$S_{\triangle VCD}=S_{\triangle BCD}\cos\alpha_2+S_{\triangle VBC}\cos\beta_2+S_{\triangle VBD}\cos\beta_3, \quad ⑦$$
$$S_{\triangle VBD}=S_{\triangle BCD}\cos\alpha_3+S_{\triangle VBC}\cos\beta_1+S_{\triangle VCD}\cos\beta_3. \quad ⑧$$

⑤، ⑥، ⑦، ⑧ لەر- نى ①، ②، ③ لەرگە تەققاسلاپ كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

$\times S_{\triangle BCD}$⑤ دىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$S^2_{\triangle BCD}=S_{\triangle BCD}S_{\triangle VBC}\cos\alpha_1+S_{\triangle BCD}S_{\triangle VCD}\cos\alpha_2+S_{\triangle BCD}S_{\triangle VBD}\cos\alpha_3. \quad ⑨$$

⑥، ⑦، ⑧ لەرنى ⑨ غا قويساق:

$$S^2_{\triangle BCD}=S_{\triangle VBC}(S_{\triangle VBC}-S_{\triangle VBD}\cos\beta_1-S_{\triangle VCD}\cos\beta_2)+S_{\triangle VCD}(S_{\triangle VCD}-S_{\triangle VBC}\cos\beta_2-S_{\triangle VBD}\cos\beta_3)+$$
$$S_{\triangle VBD}(S_{\triangle VBD}-S_{\triangle VBC}\cos\beta_1-S_{\triangle VCD}\cos\beta_3)$$
$$=S^2_{\triangle VBC}+S^2_{\triangle VCD}+S^2_{\triangle VBD}-2S_{\triangle VBC}S_{\triangle VCD}\cos\beta_2-2S_{\triangle VCD}S_{\triangle VBD}\cos\beta_3-2S_{\triangle VBD}S_{\triangle VBC}\cos\beta_1.$$

«تۆت ياقلىققا دائىر كوسىنۇس تېئورېمىسى» نىڭ قالغان مۇناسىۋەت ئىپادىلىرىنىمۇ يۇقىرىدىكىدەك ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالايمىز.

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا $a_1=1$، $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ بولسا، بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسىنى قىياس قىلىڭ.

2. كۆپيۈنگۈ كۆپ ياقلىقنىڭ ياق سانى F، چوققا سانى V ۋە قىر سانى E ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئۈستىدە ئىزدىنىڭ.

قىرسانى (E)	چوققا سانى (V)	ياق سانى (F)	كۆپيۈنگۈ كۆپ ياقلىق
9	6	5	ئۈچ قىرلىق پرىزما
12	8	6	پاراللېلېپىپېد
15	10	7	بەش قىرلىق پرىزما
6	4	4	ئۈچ قىرلىق پىرامىدا
8	5	5	تۆت قىرلىق پىرامىدا
10	6	6	بەش قىرلىق پىرامىدا

CHAPTER

3. خالىغان مۇسبەت پۈتۈن سان n غا نىسبەتەن، 2^{n-1} بىلەن $(n+1)^2$ نىڭ چوڭ ـ كىچىكلىك مۇناسىۋىتىنى قىياس قىلىڭ.

4. $\triangle ABC$ دا، تەڭسىزلىك $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geqslant\frac{9}{\pi}$ كۈچكە ئىگە؛ تۆت تەرەپلىك $ABCD$ دا، تەڭسىزلىك $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\geqslant\frac{16}{2\pi}$ كۈچكە ئىگە؛ بەش تەرەپلىك $ABCDE$ دا، تەڭسىزلىك $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}\geqslant\frac{25}{3\pi}$ كۈچكە ئىگە. بۇنىڭغا ئاساسەن، n تەرەپلىك $A_1A_2\cdots A_n$ دا قانداق تەڭسىزلىك كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى قىياس قىلىڭ.

5. تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا، ئەگەر $a_{10}=0$ بولسا، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى تەڭلىك كۈچكە ئىگە بولىدۇ:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}\ (n<19 \text{ ھەمدە } n\in\mathbf{N}^*)$$

يۇقىرىدىكى بۇ خۇسۇسىيەتكە تەققاسلاپ قىياس قىلىڭ: تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{b_n\}$ دا، ئەگەر $b_9=1$ بولسا، ئۇ ھالدا قانداق تەڭلىك مەۋجۇت بولىدۇ؟

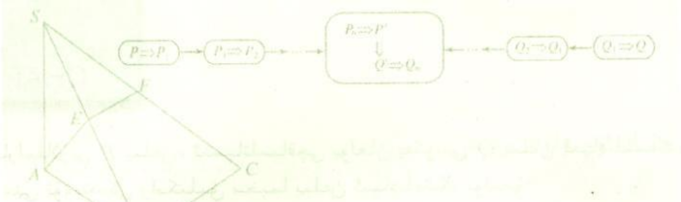
6. ئۈچ ھۆكۈملۈكتىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ: تراپېتسىيە $ABCD$ دا $AD\,/\!/\,BC$، $AB=DC$ بولسا، ئۇ ھالدا $\angle B=\angle C$ بولىدۇ.

B گۇرۇپپا

1. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا $a_1=-\frac{2}{3}$ بولۇپ، ئۇنىڭ ئالدىنقى n ئەزاسىنىڭ يىغىندىسى S_n غا نىسبەتەن تەڭلىك $S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n$ $(n\geqslant 2)$ كۈچكە ئىگە بولسا، S_1، S_2، S_3، S_4 لەرنى ھېسابلاڭ ھەم S_n نىڭ ئىپادىلىنىش شەكلىنى قىياس قىلىڭ.

2. فۇنكسىيىنى ئۆگەنگەندە، ئۇنى سانغا تەققاسلىدۇق؛ سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقنى ئۆگەنگەندە، ئۇنى فۇنكسىيىگە تەققاسلىدۇق. سىزنىڭ ئۆگىنىش جەريانىڭىزدا يەنە قانداق تەققاسلاش پائالىيەتلىرى ئېلىپ بېرىلدى؟

3. ئۆزىڭىز قىزىقىدىغان بىرەر ماتېماتىكىلىق ئېنىقلىما، فورمۇلا ياكى تېئورېمىنى تاللاپ، ئۇنىڭ كېلىش مەنبەسى ئۈستىدە ئىزدىنىڭ، دەلىللىرىڭىزنى كىتاب كۆرۈش، توردىن ماتېرىيال ئىزدەش ئارقىلىق تېپىپ چىقسىڭىزمۇ بولىدۇ.



2-2 بىۋاسىتە ئىسپاتلاش ۋە ۋاسىتىلىك ئىسپاتلاش

بىزگە مەلۇمكى، ئەقلىگە مۇۋاپىق خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان يەكۈننىڭ توغرىلىقىنى ئىسپاتلاشقا توغرا كېلىدۇ، بۇ، ماتېماتىكىنىڭ باشقا پەنلەردىن پەرقلىنىدىغان گەۋدىلىك ئالاھىدىلىكىدۇر. ماتېماتىكىلىق يەكۈننىڭ توغرىلىقىنى چوقۇم لوگىكىلىق خۇلاسىلەش شەكلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاش كېرەك. بۇ پاراگرافتا، بىۋاسىتە ئىسپاتلاش ۋە ۋاسىتىلىك ئىسپاتلاشتىن ئىبارەت ئىككى خىل ئاساسىي ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى ئۆگىنىمىز.

2-2-1 سىنتېز ئۇسۇلى ۋە ئانالىز ئۇسۇلى

سىنتېز ئۇسۇلى ۋە ئانالىز ئۇسۇلى بىۋاسىتە ئىسپاتلاشتا قوللىنىلىدىغان ئەڭ ئاساسىي ئىككى خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى، شۇنداقلا ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان تەپەككۇر شەكلى ھېسابلىنىدۇ.

1. سىنتېز ئۇسۇلى

ماتېماتىكىلىق ئىسپاتلاشلاردا، بىز كېرەك بولغان يەكۈننى كۆپ ھاللاردا بېرىلگەن شەرت ۋە بەزى ماتېماتىكىلىق ئېنىقلىما، ئاكسىئوما، تېئورېمىلاردىن پايدىلىنىپ خۇلاسىلەپ چىقىمىز. مەسىلەن:

$a, b>0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)\geqslant 4abc$ نى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات:

$$\because\ b^2+c^2\geqslant 2bc,\ a>0,$$
$$\therefore\ a(b^2+c^2)\geqslant 2abc.$$
$$\because\ c^2+a^2\geqslant 2ac,\ b>0,$$
$$\therefore\ b(c^2+a^2)\geqslant 2abc.$$
$$\therefore\ a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc.$$

ئومۇمەن، بېرىلگەن شەرت ۋە بەزى ماتېماتىكىلىق ئېنىقلىما، تېئورېما، ئاكسىئوما قاتارلىقلاردىن پايدىلىنىپ، بىرقاتار خۇلاسىلەپ ئىسپاتلاشلار ئارقىلىق ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈننىڭ كۈچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشتىن ئىبارەت بۇ خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى **سىنتېز ئۇسۇلى**[1] (synthetical method) دەپ ئاتىلىدۇ.

بېرىلگەن شەرت، ئەسلىدە بار ئېنىقلىما، ئاكسىئوما، تېئورېما قا-

❶ سىنتېز ئۇسۇلى ئوڭ كەلتۈرۈپ چىقىرىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى ياكى سەۋەبتىن نەتىجىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش ئۇسۇلى دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

CHAPTER

تارلىقلارنى P بىلەن، ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈننى Q بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا سىنتېز ئۇسۇلىنى تۆۋەندىكى رامكىلىق سخېما بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$\boxed{P\Rightarrow Q_1}\to\boxed{Q_1\Rightarrow Q_2}\to\boxed{Q_2\Rightarrow Q_3}\to\cdots\to\boxed{Q_n\Rightarrow Q}$$

1 ـ مىسال. $\triangle ABC$ نىڭ ئۈچ ئىچكى بۇلۇڭى A، B، C نىڭ قارشى تەرەپلىرى ئايرىم ـ ئايرىم a، b، c ھەمدە A، B، C لار تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى، a، b، c لار تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقى بېرىلگەن. $\triangle ABC$ نىڭ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: A، B، C نىڭ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇ ئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقىنى بەلگە تىلى بىلەن ئىپادىلىسەك $2B=A+C$ بولىدۇ؛ a، b، c نىڭ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقىنى بەلگە تىلى بىلەن ئىپادىلىسەك $b^2=AC$ بولىدۇ. A، B، C نىڭ $\triangle ABC$ نىڭ ئىچكى بۇلۇڭلىرى ئىكەنلىكى بىر يوشۇرۇن شەرت بولۇپ، ئۇنى روشەن ئىپادىلىسەك $A+B+C=\pi$ بولىدۇ. بۇ چاغدا، بۇلۇڭ ۋە تەرەپلەرنى بىرلىككە كەلتۈرەلىسەكلا، ئۇ ھالدا يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ بۇلۇڭ ۋە تەرەپلەر ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت ئۈستىدە ئىزدىنىپ، بۇ ئارقىلىق ئۈچبۇلۇڭنىڭ شەكلىگە ھۆكۈم قىلالايمىز. بۇ يەردە، كوسىنۇس تېئورېمىسى دەل تەلەپنى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئىسپاتلاشنى مۇشۇ تېئورېمىدىن پايدىلىنىپ ئېلىپ بارساق بولىدۇ.

ئىسپات: A، B، C نىڭ تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقىغا ئاساسەن:

$$2B=A+C. \quad ①$$

چۈنكى A، B، C لار $\triangle ABC$ نىڭ ئىچكى بۇلۇڭى، شۇنىڭ ئۈچۈن

$$A+B+C=\pi. \quad ②$$

① ۋە ② گە ئاساسەن:

$$B=\frac{\pi}{3}. \quad ③$$

a، b، c نىڭ تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقىغا ئاساسەن:

$$b^2=ac. \quad ④$$

كوسىنۇس تېئورېمىسى ۋە ③ كە ئاساسەن:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac.$$

④ كە ئاساسەن:

$$a^2+c^2-ac=ac,$$

يەنى

$$(a-c)^2=0.$$

شۇڭا

$$a=c$$

بولۇپ، بۇنىڭدىن تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

$$A=C. \quad ⑤$$

②، ③ ۋە ⑤ كە ئاساسەن:

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

شۇڭا، $\triangle ABC$ تەڭ تەرەپلىك ئۈچبۇلۇڭ بولىدۇ.

ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ئىسپاتلاشتا، كۆپ ھاللاردا بايان قىلىش تىلىنى تىلىنى ئالماشتۇرۇشقا توغرا كېلىدۇ، مەسىلەن، يېزىق تىلىنى بەلگە تىلىغا ئالماشتۇرۇش ياكى بەلگە تىلىنى شەكىل تىلىغا ئالماشتۇرۇش دېگەندەك. شۇنداقلا، يەنە ئىنچىكىلىك بىلەن تەھلىل قىلىپ، مەسىلىدىكى يوشۇرۇن شەرتنى روشەن ئىپادىلەپ چىقىش كېرەك.

2. ئانالىز ئۇسۇلى

ماتېماتىكىلىق ھۆكۈملۈكلەرنى ئىسپاتلاشتا، يەنە دائىم دېگۈدەك ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈن Q دىن باشلاپ تەتۈرىچە كەلتۈرۈپ چىقىرىپ، Q نىڭ كۈچكە ئىگە بولۇشىغا كاپالەتلىك قىلىدىغان شەرتىنى، يەنى Q نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان يېتەرلىك شەرت P_1 نى تېپىپ چىقىشقا، ئاندىن P_1 نىڭ كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، يەنە P_1 نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان يېتەرلىك شەرت P_2 نى؛ P_2 نىڭ كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، يەنە P_2 نى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان يېتەرلىك شەرت P_3 نى تېپىپ، ··· بۇنى تاكى شۈبھىسىز كۈچكە ئىگە بولىدىغان بىر شەرت (بېرىلگەن شەرت، تېئورېما، ئېنىقلىما، ئاكسىئوما دېگەندەك) تېپىپ چىقىلغانغا قەدەر داۋاملاشتۇرۇشقا توغرا كېلىدۇ.

مەسىلەن، ئاساسىي تەڭسىزلىك $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ ($a>0$، $b>0$) نىڭ ئىسپاتلىنىشىدا دەل يۇقىرىقى ئۇسۇل قوللىنىلغان:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

نى ئىسپاتلاش كېرەك، يۇقىرىدىكى بۇ تەڭسىزلىكنى كۈچكە ئىگە قىلىش ئۈچۈن، پەقەت

$$a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0$$

نى ئىسپاتلاش كېرەك، بۇ تەڭسىزلىكنى كۈچكە ئىگە قىلىش ئۈچۈن، پەقەت

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$$

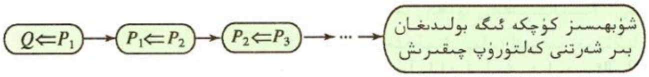
نى ئىسپاتلاش كېرەك.

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$ شۈبھىسىز كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئەسلىي تەڭسىزلىكمۇ كۈچكە ئىگە بولىدۇ.

ئومۇمەن، ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈندىن باشلاپ ئۇنى كۈچكە ئىگە قىلىدىغان يېتەرلىك شەرتلەرنى قەدەممۇقەدەم تېپىپ، ئاخىرىدا ئىسپاتلىماقچى بولغان بۇ يەكۈننى شۈبھىسىز كۈچكە ئىگە قىلىدىغان بىر شەرت (بېرىلگەن شەرت، تېئورېما، ئېنىقلىما، ئاكسىئوما قاتارلىق) كە ھۆكۈم قىلىشقا يىغىنچاقلاشتىن ئىبارەت بۇ خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى **ئانالىز ئۇسۇلى**[1] (analytical method) دەپ ئاتىلىدۇ.

ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈننى Q بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا ئانالىز ئۇسۇلىنى رامكىلىق سخېما بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

[1] ئانالىز ئۇسۇلى تەتۈرىچە كەلتۈرۈپ چىقىرىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى ياكى نەتىجىدىن سەۋەبنى تېپىش ئۇسۇلى دەپمۇ ئاتىلىدۇ.



2 ـ مىسال. $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$ نى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: ئىسپاتلىماقچى بولغان تەڭسىزلىكتىن ئىسپاتلاشنىڭ چىقىش نۇقتىسىنى بايقاش تەس ـ رەك، شۇنىڭ ئۈچۈن ئىسپاتلىماقچى بولغان تەڭسىزلىكتىن بىۋاسىتە قول سېلىپ، ئۇنى كىچىك ئىگە قىلىدىغان يېتەرلىك شەرتنى تەھلىل قىلىمىز.

ئىسپات: $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ بىلەن $2\sqrt{5}$ نىڭ ھەر ئىككىسى مۇسبەت سان بولغانلىقتىن،

$$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$$

نى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$$

نى ئىسپاتلاش، بۇنى ئىسپاتلاش ئۈچۈن، پەقەت

$$10+2\sqrt{21}<20$$

نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$2\sqrt{21}<10$$

نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$\sqrt{21}<5$$

نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$21<25$$

نى ئىسپاتلاش كېرەك.

21<25 شۈبھىسىز كىچىك ئىگە بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئەسلىي تەڭسىزلىك كىچىك ئىگە بولىدۇ.

بۇ مىسالدا، ئەگەر «21<25» تىن باشلاپ قەدەممۇ قەدەم تەتۈرچە كەلتۈرۈپ چىقارساق، ئۇ ھالدا يەنە كۈننى سىنتېز ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاپ چىقىشقا بولىدۇ. بىراق، «21<25» تىن قول سېلىپ ئىسپاتلاشنى ئويلاپ تېپىش ناھايىتى تەس، شۇڭا ئۇنى سىنتېز ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاش قىيىنراق بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

سىنتېز ئۇسۇلى بىلەن ئانالىز ئۇسۇلىنى سېلىشتۇرۇپ، ئۇلارنىڭ ئۆزىگە خاس ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرىڭ. ئىلگىرىكى ماتېماتىكا ئۆگىنىشلىرىنى ئەسلەپ، بۇ ئىككى خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلىغا بولغان يېڭى تونۇشلىرىڭىزنى ئېيتىپ بېرىڭ.

ئەمەلىيەتتە، بىز مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا كۆپ ھاللاردا سىنتېز ئۇسۇلى بىلەن ئانالىز ئۇسۇلىنى بىرلەشتۈرۈپ ئىشلىتىمىز: شەرتنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن يەكۈننى ئۆزگەرتىپ، ئوتتۇرا كۈنچى يەكۈن Q نى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز؛ يەكۈننىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن شەرتنى ئۆزگەرتىپ، ئوتتۇرا كۈنچى يەكۈن P' نى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز. بۇ چاغدا، ئەگەر P' دىن Q' نى كەلتۈرۈپ چىقارغىلى بولسا، ئۇ ھالدا يەكۈننىڭ كىچىك ئىگە ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاشقا بولىدۇ. ئەمدى بىر مىسال كۆرەيلى.

3 ـ مىسال. $\alpha,\ \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$ ھەمدە

$$\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\alpha, \quad ①$$

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = \sin^2\beta \quad ②$$

ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\tan^2\beta}{2(1+\tan^2\beta)}$ نى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: بېرىلگەن شەرت بىلەن يەكۈننى سېلىشتۇرساق، يەكۈندە θ بولۇشىنىڭ كۆرۈلمىگەنلىكىنى بايقاشقا بولىدۇ، شۇڭا بىرىنچى باسقۇچتا بېرىلگەن شەرتتىكى θ نى يوقىتىش كېرەك. بېرىلگەن شەرتنىڭ قۇرۇلما ئالاھىدىلىكىنى كۆزەتسەك، ئۇنىڭدا سانلىق مۇناسىۋەت $(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$ نىڭ يوشۇرۇنغانلىقىنى بايقاشقا بولىدۇ، شۇنىڭ بىلەن $①^2-2\times②$ دىن $4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$ نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ. $4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$ بىلەن يەكۈننى سېلىشتۇرساق، بولۇشلار ئوخشاش، ئەمما فۇنكسىيە ناملىرىنىڭ ئوخشاش ئەمەسلىكىنى بايقايمىز، شۇنىڭ بىلەن يەكۈندىكى فۇنكسىيە ناملىرىنى بىرلىككە كەلتۈرۈشنىڭ، يەنى تانگېنس فۇنكسىيىسىنى سىنۇس (كوسىنۇس) فۇنكسىيىسىگە ئايلاندۇرۇۋېلىشنىڭ ئامالىنى قىلىمىز. يەكۈننى $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$ قا ئايلاندۇرۇۋېلىپ، ئۇنىڭ بىلەن $4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$ نى سېلىشتۇرساق، $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$ دىكى بولۇشنىڭ كوسىنۇسىنى سىنۇسقا ئايلاندۇرساقلا مەقسەتكە يەتكىلى بولىدىغانلىقىنى بايقايمىز.

ئىسپات: $(\sin\theta+\cos\theta)^2-\sin\theta\cos\theta=1$ بولغانلىقتىن، ① ۋە ② نى ئۇنىڭغا قويساق:

$$4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1. \quad ③$$

يەنە بىر تەرەپتىن،

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\tan^2\beta}{2(1+\tan^2\beta)}$$

نى ئىسپاتلاش دېگەنلىك

$$\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1-\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}{2\left(1+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right)}$$

نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$$

نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\sin^2\beta)$$

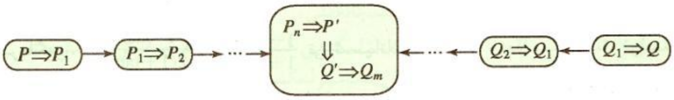
نى ئىسپاتلاش، يەنى

$$4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$$

نى ئىسپاتلاش دېگەنلىك بولىدۇ.

ئاخىرقى بۇ ئىپادە ③ بىلەن ئوخشاش بولغانلىقتىن، مەسىلە ئىسپاتلانغان بولىدۇ.

بېرىلگەن شەرت، ئېنىقلىما، تېئورېما، ئاكسىئوما قاتارلىقلارنى P بىلەن، ئىسپاتلىماقچى بولغان يەكۈننى Q بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا يۇقىرىدىكى جەرياننى رامكىلىق سخېما بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:



مەشىق

1. خالىغان θ بۇلۇڭغا نىسبەتەن $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

2. $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$ نى ئىسپاتلاڭ.

3. $\tan\alpha+\sin\alpha=a$، $\tan\alpha-\sin\alpha=b$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(a^2-b^2)^2=16ab$ نى ئىسپاتلاڭ.

2-2-2 قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى

قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى ۋاستىلىك ئىسپاتلاشنىڭ بىر خىل ئاساسىي ئۇسۇلى. بۇ خىل ئۇسۇل بىزگە ناتونۇش ئەمەس، كۈندىلىك تۇرمۇش ياكى بىر قىسىم ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا، بەزىدە ئاڭسىز ھالدا قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى ئىشلىتىپ قالىمىز.

مۇلاھىزە؟

3 مېتال پۇل ئۈستەلگە ئوڭ تەرىپى❶ يۇقىرىغا قارىغان ھالەتتە قويۇلغان. ھەر قېتىمدا 2 مېتال پۇلنى ئىككى قولىمىز بىلەن تەڭلا ئۆرۈسەك، مەيلى قانداق ئۆرۈشىمىزدىن قەتئىينەزەر، ئۈچىلىسىنىڭ تەتۈر تەرىپى يۇقىرىغا قارىغان ھالەتكە كەلتۈرگىلى بولمايدۇ. بۇنىڭ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

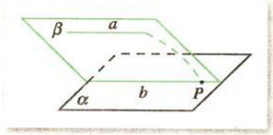
❶ پۇل سانى بار تەرىپى، بۇنى ئادەتتە ئوڭ قويۇش ئوڭ چۈشۈش دەپمۇ ئاتايمىز.

بۇ خىل ھادىسىنىڭ سەۋەبىنى بىۋاستە ئىسپات ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپمۇ چۈشەندۈرگىلى بولىدۇ، ئەمما بۇ يەردە قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى قوللىنىمىز.

3 مېتال پۇلنى بىرقانچە قېتىم ئۆرۈگەندىن كېيىن ئۇلارنى ھەممىسىنىڭ تەتۈر تەرىپى يۇقىرىغا قارىغان ھالەتكە كەلتۈرگىلى بولىدۇ دەپ پەرەز قىلايلى. ھەربىر مېتال پۇلنى ئوڭ قويۇلۇشتىن تەتۈر قويۇلۇش ھالىتىگە كەلتۈرۈش ئۈچۈن تاق سان قېتىم ئۆرۈشكە توغرا كېلىدۇ، شۇڭا 3 مېتال پۇلنى ھەممىسىنىڭ تەتۈر تەرىپى يۇقىرىغا قارىغان ھالەتكە كەلتۈرۈش ئۈچۈن كېتىدىغان ئۆرۈش قېتىم سانى 3 تاق ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ، يەنى ئۆرۈش قېتىم سانى تاق سان بولىدۇ. بىراق، ھەر قېتىمدا 2 مېتال پۇلنى ئىككى قول بىلەن تەڭلا ئۆرۈيدىغانلىقىمىز ئۈچۈن، 3 مېتال پۇلنىڭ ئۆرۈلۈش قېتىم سانى چوقۇم 2 نىڭ ھەسسىسى بولىدۇ، يەنى ئۆرۈش

قىتىم سانى جۈپ سان بولىدۇ. بۇ زىتلىق پەرىزىمىزنىڭ خاتا، ئەسلىي يەكۈننىڭ توغرا ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ، يەنى مەيلى قانداق ئۆرۈسەكمۇ، 3 مىتال پۇلنى ھەممىسىنىڭ تەتۈر تەرىپى يۇقىرىغا قارىغان ھالەتكە كەلتۈرگىلى بولمايدۇ.

ئومۇمەن، ئەسلىي ھۆكۈملۈك كۈچكە ئىگە ئەمەس (يەنى ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ شەرتى ئاستىدىكى يەكۈن كۈچكە ئىگە ئەمەس) دەپ پەرەز قىلىنىپ، توغرا خۇلاسىلەش ئارقىلىق ئاخىرىدا زىتلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىلىدىغان ۋە بۇنىڭغا ئاساسەن پەرەزنىڭ خاتا ئىكەنلىكى چۈشەندۈرۈلۈپ، بۇ ئارقىلىق ئەسلىي ھۆكۈملۈكنىڭ كۈچكە ئىگە ئىكەنلىكى ئىسپاتلىنىدىغان بۇ خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى **قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى** (reduction to absurdity) دەپ ئاتىلىدۇ.



1.2.2 – رەسىم

4 - مىسال. 1.2.2 – رەسىمدىكىدەك، a، b ئىككى تۈز سىزىق ۋە α تەكشىلىك بېرىلگەن. ئەگەر $a \not\subset \alpha$، $b \subset \alpha$ ھەمدە $a \parallel b$ بولسا، $a \parallel \alpha$ نى ئىسپاتلايلى.

ئىسپات: $a \parallel b$ بولغانلىقى ئۈچۈن، a، b تۈز سىزىقلار بىر β تەكشىلىكنى بەلگىلەيدۇ.

$a \not\subset \alpha$، $a \subset \beta$ بولغانلىقى ئۈچۈن، α بىلەن β ئوخشاش بولمىغان ئىككى تەكشىلىك بولىدۇ.

$b \subset \alpha$ ھەمدە $b \subset \beta$ بولغانلىقى ئۈچۈن، $\alpha \cap \beta = b$ بولىدۇ.

ئەمدى a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ ئورتاق نۇقتىسى يوق ئىكەنلىكىنى قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايمىز. a تۈز سىزىق بىلەن α تەكشىلىكنىڭ P دىن ئىبارەت ئورتاق نۇقتىسى بار دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $P \in \alpha \cap \beta = b$، يەنى P نۇقتا تۈز سىزىق a بىلەن b نىڭ ئورتاق نۇقتىسى بولىدۇ، بۇ، $a \parallel b$ غا زىت كېلىدۇ.

شۇنىڭ ئۈچۈن $a \parallel \alpha$.

5 - مىسال. $\sqrt{2}$ نىڭ ئىرراتسىئونال سان بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: بىرساننىڭ ئىرراتسىئونال سان بولىدىغانلىقىنى بىۋاسىتە ئىسپاتلاش قىيىن، شۇڭا بۇ يەردە قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى قوللىنىمىز.

$\sqrt{2}$ نى ئىرراتسىئونال سان ئەمەس دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا بۇ سان راتسىئونال سان بولىدۇ.

بىزگە مەلۇمكى، ھەرقانداق راتسىئونال سانىنى $\frac{m}{n}$ (m، n ئۆزئارا تۈپ سانلار، $m \in \mathbf{Z}$، $n \in \mathbf{N}^*$) كۆرۈنۈشتە يازغىلى بولىدۇ. ئەمدى بۇنىڭدىن زىتلىقنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغان – بولمايدىغانلىقىغا قاراپ باقايلى.

ئىسپات: $\sqrt{2}$ نى ئىرراتسىئونال سان ئەمەس دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا بۇ سان راتسىئونال سان بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، ئۆزئارا تۈپ[1] مۇسبەت پۈتۈن سان m، n مەۋجۇت بولۇپ، نەتىجىدە $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ بولىدۇ، شۇڭا

$$m = \sqrt{2}\, n,$$

شۇنىڭ ئۈچۈن

[1] ئىككى مۇسبەت پۈتۈن سان m، n ئۆزئارا تۈپ دېگەنلىك m، n نىڭ ئەڭ چوڭ ئومۇمىي بۆلگۈچىسى 1، يەنى $(m, n) = 1$ بولىدىغانلىقىنى كۆرسىتىدۇ.

$$m^2=2n^2.$$

دېمەك، m جۈپ سان بولىدۇ. $m=2k$ (k مۇسبەت پۈتۈن سان) دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$4k^2=2n^2,$$

يەنى

$$n^2=2k^2.$$

شۇنىڭ بىلەن m مۇ جۈپ سان بولىدۇ. بۇ، m، n لارنىڭ ئۆز ئارا تۈپ ئىكەنلىكىگە زىت كېلىدۇ.

يۇقىرىقى بۇ زىتلىقتىن پەرىزىمىزنىڭ خاتا ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز، شۇڭا $\sqrt{2}$ ئىرراتسىئونال سان.

$\sqrt{2}$ بايقالغان ھامان، كىشىلەر راتسىئونال سانلاردىن سىرت، 1 بىلەن ئومۇمىي ئۆلچەمگە ئىگە بولمىغان يەنە بىر تۈرلۈك سان، يەنى ئىرراتسىئونال ساننىڭ مەۋجۇت ئىكەنلىكىنى تونۇپ يەتتى، نەتىجىدە، ماتېماتىكا تارىخىدا تۇنجى قېتىملىق كرىزىس يۈز بېرىپ، ماتېماتىكىنىڭ ئىلگىرىلەش قەدىمىنى راسا تېزلەتتى.

يۇقىرىقى مىساللاردىن قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنىڭ مۇھىم ھالقىسى توغرا خۇلاسە چىقىرىش ئارقىلىق زىتلىقنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز. بۇ يەردىكى زىتلىق بېرىلگەن شەرت بىلەن، پەرەز قىلىنغىنى بىلەن، شۇنداقلا ئېنىقلىما، ئاكسىئوما، تېئورېما، پاكىتلار بىلەن زىتلاشسىمۇ بولىۋېرىدۇ.

«قىيىن» مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتا قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى كۆپ ھاللاردا كۈچلۈك قورال سۈپىتىدىكى رولىنى جارى قىلدۇرىدۇ. ئەنگلىيىلىك يېقىنقى زامان ماتېماتىكا ئالىمى خاردى مۇنداق دېگەن: « ···تەتۈر ئىسپاتلاش ئۇسۇلى (قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى) ماتېماتىكا ئالىملىرىنىڭ ئەڭ قۇدرەتلىك يارىغىدۇر. شاھماتتا ئويۇن باشلىغاندا بىرەر ئورۇقنى قۇربان قىلىپ ئۇستۇنلۇكنى ئىگىلەشتىكى ئورۇقتا يول قويۇش ئۇسۇلىغا سېلىشتۇرغاندا، بۇ ئۇنىڭدىنمۇ ئاقىلانە ئۇسۇل ھېسابلىنىدۇ. شاھمات ئوينىغۇچىلار ئۆتۈپ كەتسە بىرەر پېشكا ياكى كۆپ دېگەندە باشقا بىرەر ئورۇقنى قۇربان قىلىدۇ، ھالبۇكى، ماتېماتىكا ئالىملىرى بولسا پۈتۈن ئويۇننى قارشى تەرەپكە قوش قوللاپ بېرىۋېتىدۇ!»

ئەمەلىيەتتە، ماتېماتىكا تارىخىدىكى نۇرغۇن كلاسسىك ئىسپاتلار (مەسىلەن، «تۈپ سانلارنىڭ سانى چەكسىز كۆپ بولىدۇ»، « $\sqrt{2}$ ئىرراتسىئونال سان بولىدۇ» دېگەندەكلەرنى ئىسپاتلاش)دا مۇشۇ قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى قوللىنىلغان. قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار ئالاقىدار كىتابلارنى تېپىپ، قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنىڭ رولى ۋە قوللىنىلىشىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ بىلىۋالسا بولىدۇ.

مەشىق

1. ئىسپاتلاڭ: $\triangle ABC$ دا، ئەگەر $\angle C$ تىك بۇلۇڭ بولسا، ئۇ ھالدا $\angle B$ چوقۇم تار بۇلۇڭ بولىدۇ.
2. ئىسپاتلاڭ: $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ لەرنىڭ تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزۈشى مۇمكىن ئەمەس.

2 - باب

2.2 - كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1 . $a \neq 0$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، x كە دائىر تەڭلىمە $ax=b$ نىڭ پەقەت ۋە پەقەت بىرلا يىلتىزى بارلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

2 . A، B نىڭ ھەر ئىككىسى تار بۇلۇڭ ھەمدە $A+B \neq \frac{\pi}{2}$ بولۇپ، $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $A+B=\frac{\pi}{4}$ نى ئىسپاتلاڭ.

3 . $\frac{1-\tan\alpha}{2+\tan\alpha}=1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $3\sin 2\alpha=-4\cos 2\alpha$ نى ئىسپاتلاڭ.

4 . $\triangle ABC$ نىڭ a، b، c تەرەپلىرىنىڭ ئەكس سانلىرى تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزسە، $B<\frac{\pi}{2}$ نى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

1 . a، b، c لار بىر ئۈچبۇلۇڭنىڭ ئۈچ تەرىپى ھەمدە $s^2=2ab$، $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ بولسا، $s<2a$ نى ئىسپاتلاڭ.

2 . ھەقىقىي سان a، b، c لار تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزىدۇ ھەمدە نۆل بولمىغان ھەقىقىي سان x، y ئايرىم - ئايرىم a بىلەن b ۋە b بىلەن c نىڭ تەڭ ئايرىمىلىق ئوتتۇرا ئەزاسى بولىدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ نى ئىسپاتلاڭ.

3 . ئەگەر $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$ بولسا، $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$ نى ئىسپاتلاڭ.

3-2 ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى

ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى بىر خىل ئالاھىدە ئىسپاتلاش ئۇسۇلى بولۇپ، ئاساسلىقى مۇسبەت پۈتۈن سانغا ئالاقىدار ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ئىسپاتلاشتا قوللىنىلىدۇ. مەسىلەن، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\{a_n\}$ دا $a_1=1$، $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن بولسا، $n=1, 2, 3, 4$ بولغاندىكى ئالدىنقى 4 ئەزانى ئىندۇكسىيىلەش (يىغىنچاقلاش) ئارقىلىق بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=\frac{1}{n}$ بولىدىغانلىقىنى قىياس قىلالايمىز. بىراق، بىز پەقەت بۇ قىياسنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاغا نىسبەتەن كۆچكە ئىگە ئىكەنلىكىنىلا جەزملەشتۈرەلەيمىزكى، ئۇنىڭ كېيىنكى ئەزالارغا نىسبەتەنمۇ كۈچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى مۇئەييەنلەشتۈرۈشكە جۈرئەت قىلالمايمىز. شۇنىڭ ئۈچۈن، بۇ قىياسنى ئىسپاتلاشقا توغرا كېلىدۇ.

بىز تەبىئىي ھالدا $n=5$ تىن تۆۋەنگە قاراپ بىرمۇ بىر تەكشۈرۈپ ئىسپاتلاش كېرەك دەپ ئويلايمىز. ئومۇمەن، مۇسبەت پۈتۈن سان n غا ئالاقىدار ھۆكۈملۈككە دۇچ كەلگەندە، n كىچىكرەك بولغاندا بىرمۇبىر تەكشۈرۈپ ئىسپاتلىساق بولىدۇ، بىراق، n چوڭراق بولغاندا، بىرمۇبىر تەكشۈرۈپ ئىسپاتلاشتا ئاۋارىچىلىك ناھايىتى كۆپ بولىدۇ. بولۇپمۇ n بارلىق مۇسبەت پۈتۈن سانلارنى ئالغاندا ھامان كۈچكە ئىگە بولىدىغان ھۆكۈملۈكنى ئىسپاتلاشقا توغرا كەلگەندە، بىرمۇبىر تەكشۈرۈپ ئىسپاتلاش مۇمكىن بولماي قالىدۇ. شۇڭا، $n=5$ تىن تۆۋەنگە قاراپ بىرمۇبىر تەكشۈرۈپ ئىسپاتلاش كېرەك دېگەن بۇ خىيالنىڭ رولى ئانچە چوڭ ئەمەس. بۇ يەردە، يېڭىۋاشتىن يول ئېچىپ، تۆۋەندىكىدەك بىر خىل ئۇسۇلنى تېپىشىمىز كېرەك: چەكلىك باسقۇچلار بىلەن خۇلاسە چىقىرىپ، n بارلىق مۇسبەت پۈتۈن سانلارنى ئالغاندا ھۆكۈملۈكنىڭ ھامان كۈچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاش.

ئەمدى گەپنى دومىنو قارتىسى ئويۇنىدىن باشلايلى. بۇ بىر خىل قارتا تىزىش ئويۇنى بولۇپ، تىزىغاندا خالىغان ئىككى قوشنا قارتىنىڭ ئالدىدىكى بىرىنىڭ يىقىلىشى چوقۇم كېيىنكى بىرىنىڭمۇ يىقىلىشىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىدىغانلىقىغا كاپالەتلىك قىلىنىشى كېرەك. بۇنىڭدا، 1 ـ قارتا يىقىتىلسىلا، ئۇنىڭ يىقىلىشى بىلەن 2 ـ قارتا يىقىلىدۇ، 2 ـ قارتىنىڭ يىقىلىشى بىلەن 3 ـ قارتىمۇ يىقىلىدۇ، …ئاخىرىدا، مەيلى قانچە قارتا بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، قارتىلارنىڭ ھەممىسى يىقىلىدۇ.

مۇلاھىزە؟

بۇ ئويۇندا، بارلىق دومىنو قارتىلىرىنىڭ تولۇق يىقىلىپ بولۇشىنىڭ شەرتى نېمە؟

كۆرەلەيمىزكى، تۆۋەندىكى ئىككى شەرت قانائەتلەندۈرۈلسىلا، بارلىق دومىنو قارتىلىرى چوقۇم تولۇق يىقىلىپ بولىدۇ:

(1) 1 ـ قارتا يىقىلىشى كېرەك؛

(2) خالىغان ئىككى قارتىنىڭ ئالدىدىكى بىرىنىڭ يىقىلىشى چوقۇم كېيىنكى بىرىنىڭ يىقىلىشىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالىشى كېرەك.

مۇلاھىزە؟

سىزنىڭچە، (2) شەرتنىڭ رولى نېمە؟

كۆرەلەيمىزكى، (2) شەرتتە ئەمەلىيەتتە بىر رېكۇررېنت مۇناسىۋەتنى (تەدرىجىي كەلتۈرۈپ چىقىرىش مۇناسىۋىتى)بېرىلگەن:

k ىنچى قارتا يىقىلغاندا، ئۇنىڭغا قوشنا $k+1$ ىنچى قارتىمۇ يىقىلىدۇ.

شۇنداق قىلىپ، پەقەت 1 ـ قارتا يىقىلسىلا، قالغان قارتىلارمۇ ئارقا ـ ئارقىدىن يىقىلىدۇ. ئەمەلىيەتتە، قارتىلارنىڭ سانى قانچە بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، (1)، (2) شەرتلەرنىڭ كۆچكە ئىگە بولۇشىغا كاپالەتلىك قىلىنسىلا، بارلىق قارتىلار چوقۇم تولۇق يىقىلىپ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

سىزنىڭچە، سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=\frac{1}{n}$ بولىدۇ دېگەن بۇ قىياسنى ئىسپاتلاش بىلەن يۇقىرىقى دومىنو قارتىسى ئويۇنىنىڭ ئوخشىشىپ كېتىدىغان يېرى بارمۇ؟ بۇ مەسىلىنى دومىنو قارتىسى ئويۇنىغا تەققاسلاپ ھەل قىلالامسىز؟

شەرتكە ئاساسەن، $n=1$ بولغاندا قىياسنىڭ كۆچكە ئىگە بولىدىغانلىقىنى ئاسانلا بىلەلەيمىز، بۇ، ئويۇننىڭ (1) شەرتىگە باراۋەر كېلىدۇ. ئاندىن ئويۇننىڭ (2) شەرتىگە تەققاسلاپ، تۆۋەندىكى رېكۇررېنت فورمۇلىسىنى ئىسپاتلاش توغرىسىدا پىكىر يۈرگۈزىمىز:

ئەگەر $n=k$ بولغاندا قىياس كۆچكە ئىگە، يەنى $a_k=\frac{1}{k}$ بولسا، ئۇ ھالدا $n=k+1$ بولغاندا قىياس يەنىلا كۆچكە ئىگە، يەنى $a_{k+1}=\frac{1}{k+1}$.

ئەمەلىيەتتە، ئەگەر $a_k=\frac{1}{k}$ بولسا، ئۇ ھالدا

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1+a_k}=\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{k+1},$$

يەنى $n=k+1$ بولغاندا قىياس يەنىلا كۆچكە ئىگە.

شۇنداق قىلىپ، بۇ قىياسقا نىسبەتەن، $n=1$ بولغاندا قىياس كۆچكە ئىگە بولسا، ئۇ $n=2$ بولغاندىمۇ كۆچكە ئىگە بولىدۇ؛ $n=2$ بولغاندا قىياس كۆچكە ئىگە بولسا، ئۇ $n=3$ بولغاندىمۇ كۆچكە ئىگە بولىدۇ؛ $n=3$ بولغاندا قىياس كۆچكە ئىگە بولسا، ئۇ $n=4$ بولغاندىمۇ كۆچكە ئىگە بولىدۇ؛ $n=4$ بولغاندا

CHAPTER

قىياس كۆچكە ئىگە بولسا، ئۇ $n=5$ بولغاندىمۇ كۆچكە ئىگە بولىدۇ، ··· شۇڭا خالىغان مۇسبەت پۈتۈن سان n غا نىسبەتەن، قىياس ھامان كۆچكە ئىگە بولىدۇ، يەنى بۇ سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=\frac{1}{n}$.

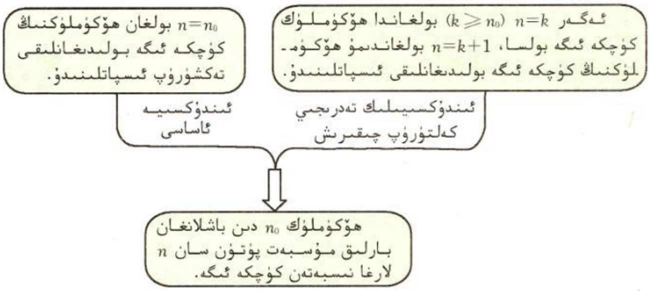
ئومۇمەن، مۇسبەت پۈتۈن سان n غا مۇناسىۋەتلىك بىر ھۆكۈملۈكنى ئىسپاتلاشنى تۆۋەندىكى باسقۇچلار بىلەن تاماملاشقا بولىدۇ:

(1) (ئىندۇكسىيە ئاساسى) n **بىرىنچى قىممەت** n_0 ($n_0 \in \mathbf{N}^*$) **نى ئالغاندا ھۆكۈملۈكنىڭ كۆچكە ئىگە بولىدىغانلىقى ئىسپاتلىنىدۇ؛**

(2) (ئىندۇكسىيىلىك تەدرىجىي كەلتۈرۈپ چىقىرىش) $n=k$ ($k \geqslant n_0$، $k \in \mathbf{N}^*$) **بولغاندا ھۆكۈملۈكنى كۆچكە ئىگە دەپ پەرەز قىلىپ،** $n=k+1$ **بولغاندىمۇ ھۆكۈملۈكنىڭ كۆچكە ئىگە بولىدىغانلىقى ئىسپاتلىنىدۇ.**

يۇقىرىدىكى بۇ ئىككى باسقۇچ ئورۇندالسىلا، ھۆكۈملۈكنىڭ n_0 دىن باشلانغان بارلىق مۇسبەت پۈتۈن سان n لارغا نىسبەتەن ھامان كۆچكە ئىگە بولىدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىشقا بولىدۇ.

يۇقىرىدىكى ئىسپاتلاش ئۇسۇلى **ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى** (mathematical induction) دەپ ئاتىلىدۇ. ئۇنى رامكىلىق سخېما بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:



ئەمدى ئىككى مىسال كۆرەيلى.

1 - مىسال. ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايلى:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ (n \in \mathbf{N}^*).$$

ئىسپات: (1) $n=1$ بولغاندا،

$$\text{سول تەرەپ}=1^2=1,$$

$$\text{ئوڭ تەرەپ}=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}=1$$

بولۇپ، تەڭلىك كۆچكە ئىگە.

(2) $n=k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) بولغاندا تەڭلىك كۆچكە ئىگە، يەنى

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},
\end{aligned}
$$

يەنى $n=k+1$ بولغاندا تەڭلىك يەنىلا كۆچكە ئىگە بولىدۇ.

(1) ۋە (2) گە ئاساسەن، تەڭلىكنىڭ ھەرقانداق $n \in \mathbf{N}^*$ غا نىسبەتەن ھامان كۆچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز.

2 - مىسال. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\frac{1}{1\times4}$، $\frac{1}{4\times7}$، $\frac{1}{7\times10}$، …، $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$، … بېرىلگەن، S_1، S_2، S_3، S_4 لەرنى ھېسابلاپ، ئاندىن ھېسابلاش نەتىجىسىگە ئاساسەن، S_n نىڭ ئىپادىسىنى قىياس قىلايلى ھەم قىياسىمىزنى ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايلى.

يېشىش:

$S_1=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{4}$;

$S_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times7}=\frac{2}{7}$;

$S_3=\frac{2}{7}+\frac{1}{7\times10}=\frac{3}{10}$;

$S_4=\frac{3}{10}+\frac{1}{10\times13}=\frac{4}{13}$.

يۇقىرىقى تۆت نەتىجىدىكى ئاددىي كەسىرلەردە، سۈرەت ئەزا سانى n بىلەن بىردەك بولۇپ، مەخرەجنى ئەزا ساندىن پايدىلىنىپ $3n+1$ قىلىپ ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى كۆرەلەيمىز. شۇنىڭ بىلەن مۇنداق قىياس قىلىشقا بولىدۇ:

$$S_n=\frac{n}{3n+1}.$$

تۆۋەندە بۇ قىياسنى ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلايمىز.

(1) $n=1$ بولغاندا،

$$\text{سول تەرەپ}=S_1=\frac{1}{4},$$

$$\text{ئوڭ تەرەپ}=\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3\times1+1}=\frac{1}{4}$$

بولۇپ، قىياس كۆچكە ئىگە بولىدۇ.

(2) $n=k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ بولغاندا قىياس كۆچكە ئىگە، يەنى

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1},$$

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k+1}{3(k+1)+1}.$$

شۇڭا، $n=k+1$ بولغاندا قىياس يەنىلا كۆچكە ئىگە بولىدۇ.

(1) ۋە (2) گە ئاساسەن، قىياسنىڭ ھەرقانداق $n \in \mathbf{N}^*$ غا نىسبەتەن هامان كۆچكە ئىگە ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز.

مەشىق

ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

1. باش ئەزاسى a_1، ئومۇمىي ئايرىمىسى d بولغان تەڭ ئايرىمىلىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=a_1+(n-1)d$، ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسى $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ بولىدۇ.

2. باش ئەزاسى a_1، ئومۇمىي نىسبىتى q بولغان تەڭ نىسبەتلىك سانلار ئارقىمۇئارقىلىقىنىڭ ئومۇمىي ئەزا فورمۇلىسى $a_n=a_1q^{n-1}$، ئالدىنقى n ئەزاسى يىغىندىسىنىڭ فورمۇلىسى $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q \neq 1)$ بولىدۇ.

3.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

(1) $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$;

(2) n مۇسبەت پۈتۈن سان بولغاندا، $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ بولىدۇ؛

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

2. سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى $\frac{1}{1\times2}$ ، $\frac{1}{2\times3}$ ، $\frac{1}{3\times4}$ ، … ، $\frac{1}{n(n+1)}$ ، … بېرىلگەن، S_1 ، S_2 ، S_3 لەرنى ھېسابلاپ، بۇنىڭغا ئاساسەن S_n نىڭ فورمۇلىسىنى قىياس قىلىڭ ھەم قىياسىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

B گۇرۇپپا

ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

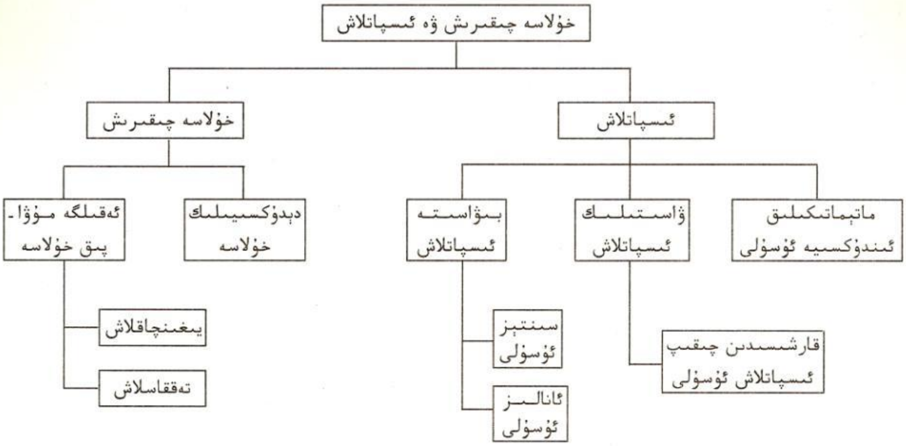
1. $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

2. $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

CHAPTER

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. يىغىنچاقلاش (ئىندۇكسىيىلەش) بىلەن تەققاسلاش (ئانالوگىيە، ئوخشىتىش)نىڭ ھەر ئىككىسى ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە بولۇپ، ئالدىنقىسى ئالاھىدىلىكتىن ئومۇمىيلىققا، قىسمەنلىكتىن پۈتۈنلۈككە بولغان خۇلاسە، كېيىنكىسى بولسا ئالاھىدىلىكتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسە. بىراق، بۇ ئىككى خىل خۇلاسىدە بېرىلگىنىگە ئاساسەن نامەلۇمغا ھۆكۈم قىلغىلى بولۇپ، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسىنى قىياس قىلىشتا ئىشلەتكىلى بولىدۇ، شۇنداقلا قىياسنىڭ يەكۈنىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئىسپاتلاشقا توغرا كېلىدۇ. ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسىدىن پايدىلىنىپ قىياس قىلىشقا دائىر بىرقانچە مىسال كەلتۈرەلەمسىز؟

2. دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسىگە ئوخشىمايدۇ، ئۇ ئومۇمىيلىقتىن ئالاھىدىلىككە بولغان خۇلاسە بولۇپ، ماتېماتىكىلىق ئىسپاتلاشنىڭ ئاساسىي خۇلاسە چىقىرىش شەكلى، شۇنداقلا ئاكسىئوما سىستېمىسىدا قوللىنىلىدىغان خۇلاسە چىقىرىش شەكلى ھېسابلىنىدۇ. يەنە بىر تەرەپتىن، ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە بىلەن دېدۇكسىيىلىك خۇلاسە يەنە بىر ـ بىرىنى تولۇقلاپ تۇرىدۇ، ئۇلارنىڭ ئالدىنقىسى كېيىنكىسىنىڭ ئاساسى بولۇپ، كېيىنكىسىدە ئالدىنقىسىنىڭ ئىشەنچلىكلىكى ئىسپاتلىنىدۇ. ئىسپاتلاش ئېلىپ بېرىش جەريانىدا ئەقىلگە مۇۋاپىق خۇلاسە ۋە دېدۇكسىيىلىك خۇلاسىدىن قانداق پايدىلانغانلىقىڭىزنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈڭ.

3. بىۋاستە ئىسپاتلاش بىلەن ۋاستىلىك ئىسپاتلاش ماتېماتىكىلىق ئىسپاتلاشلاردىكى ئىككى خىل

2 ـ باب

ئاساسىي ئىسپاتلاش ئۇسۇلىدۇر. بۇ بابتا بىۋاسىتە ئىسپاتلاشتا قوللىنىلىدىغان ئىككى ئاساسىي ئۇ-سۇل، يەنى سىنتېز ئۇسۇلى ۋە ئانالىز ئۇسۇلى ھەمدە ۋاسىتىلىك ئىسپاتلاشتا قوللىنىلىدىغان بىر ئا-ساسىي ئۇسۇل، يەنى قارشىسىدىن چىقىپ ئىسپاتلاش ئۇسۇلى تونۇشتۇرۇلدى. بۇ بىرقانچە خىل ئىس-پاتلاش ئۇسۇلىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئايرىم ـ ئايرىم سۆزلەپ بېرەلەمسىز؟ ئادەتتە قانداق ئەھۋالدا ماس ھالدىكى قانداق ئىسپاتلاش ئۇسۇلىنى تاللايدىغانلىقىڭىزنى ئېيتىپ بېقىڭ. بەزىلەر: خۇلاسە چىقىرىش ۋە ئىسپاتلاش ماتېماتىكىدىكى ئومۇمىي تەپەككۇر قىلىش شەكلى، شۇنداقلا ماتېماتىكىنى ئۆگىنىش، ما-تېماتىكا بىلەن شۇغۇللىنىشتىكى ئاساسىي ماھارەت دەيدۇ، سىز بۇنىڭغا قانداق قارايسىز؟

4. ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلى ئاساسلىقى مۇسبەت پۈتۈن سانغا ئالاقىدار ماتېماتىكىلىق مەسىلىلەرنى ئىسپاتلاشتا قوللىنىلىدۇ. ئىسپاتلاش ئېلىپ بارغاندا، ئۇنىڭ ئىككى باسقۇچى (ئىندۇك-سىيە ئاساسى ۋە ئىندۇكسىيىلىك تەدرىجىي كەلتۈرۈپ چىقىرىش)نىڭ بىرىمۇ كەم بولۇپ قالماسلىقى كېرەك. ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىكى ئىككى باسقۇچنىڭ ئۆزىگە خاس رولىنى دەپ بېرە-لەمسىز؟ ئۇلار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندە بېرىلگەن شەكىللەردىكى دۈگىلەكلەرنىڭ تىزىلىش قائىدىسىگە ئاساسەن قىياس قىلىڭ: (5) شەكىل قانچە دۈگىلەكتىن تەركىب تاپىدۇ؟ ئۇلار قانداق تىزىلىدۇ؟ n ـ شەكىلدە جەمئىي قانچە دۈگىلەك بار؟

(1) (2) (3) (4) (5)

(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{\text{دانە }2n}-\underbrace{22\cdots2}_{\text{دانە }n}}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ نىڭ قىممىتىنى قىياس قىلىڭ.

3. $f(n)>0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$، $f(2)=4$ ھەم خالىغان n_1، $n_2 \in \mathbf{N}^*$ غا نىسبەتەن، $f(n_1+n_2)=f(n_1)f(n_2)$ كۈچكە ئىگە بولسا، $f(n)$ نىڭ ئىپادىلىنىش شەكلىنى قىياس قىلىڭ.

4. خالىغان بىر مۇسبەت پۈتۈن ساننى ئېلىپ، تۆۋەندىكى ئىككى خىل ئەمەلنى قايتا ـ قايتا بېجىرىڭ:

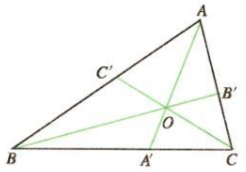
(1) تاق سان بولسا، بۇ ساننى 3 كە كۆپەيتىپ يەنە 1 نى قوشۇڭ؛

(2) جۈپ سان بولسا، بۇ ساننى 2 گە بۆلۈڭ.

بۇنىڭغا ئاساسەن قانداق قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالايسىز؟

5. O نۇقتا $\triangle ABC$ نىڭ ئىچىدىكى خالىغان بىر نۇقتا ئىكەنلىكى بېرىلگەن، A بىلەن O نى، B بىلەن O نى، C بىلەن O نى تۇتاشتۇرۇپ ھەم ئۇلارنى داۋاملاشتۇرغاندا، ئۇلار قارشى تەرەپ بىلەن ئايرىم ـ ئايرىم A'، B'، C' نۇقتىلاردا كېسىشسە، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكى تەڭلىك كۈچكە ئىگە بولىدۇ:

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1.$$



(5 ـ مىسال ئۈچۈن)

بۇ، تەكشىلىك گېئومېترىيىسىدىكى بىر مىسال بولۇپ، ئۇنى ئىسپاتلاشتا ئادەتتە تۆۋەندىكى «يۈز ئۇسۇلى» قوللىنىلىدۇ:

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

ئەمدى تەققاسلاپ قىياس قىلىپ بېقىڭ: بوشلۇقتىكى تۆت ياقلىق $V-BCD$ غا نىسبەتەن، يۇقىرىدىكىگە ئوخشىشىپ كېتىدىغان قانداق يەكۈن بار؟ بۇ يەكۈننى «ھەجىم ئۇسۇلى»دىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ.

6. $A+B=\frac{5}{4}\pi$ ھەمدە $A, B\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ نى ئىسپاتلاڭ.

7. ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

$$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n.$$

B گۇرۇپپا

1 . رەسىمدىكىدەك، چەمبەر ئىچىگە 1 كېسىك سىزىلسا، ئۇ چەمبەرنى 2 بۆلەككە بۆلىدۇ؛ ئۆزئارا كېسىشكەن 2 كېسىك سىزىلسا، ئۇلار 4 كېسىككە بۆلۈنىدۇ ھەم چەمبەرنى 4 بۆلەككە بۆلىدۇ؛ 3 كېسىك سىزىلسا، ئۇلار ئەڭ كۆپ بولغاندا 9 كېسىككە بۆلۈنىدۇ ھەم چەمبەرنى ئەڭ كۆپ بولغاندا 7 بۆلەككە بۆلىدۇ؛ 4 كېسىك سىزىلسا، ئۇلار ئەڭ كۆپ بولغاندا 16 كېسىككە بۆلۈنىدۇ ھەم چەمبەرنى ئەڭ كۆپ بولغاندا 11 بۆلەككە بۆلىدۇ. ئۇنداق بولسا:

(1) چەمبەر ئىچىگە 5 كېسىك سىزغاندا، ئۇلار ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە كېسىككە بۆلۈنىدۇ؟ چەمبەرنى ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە بۆلەككە بۆلىدۇ؟

① ② ③ ④ ⑤

(2) قىياس قىلىڭ: چەمبەر ئىچىدىكى ئىككى ـ ئىككىدىن كېسىشكەن n تال كېسىك ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە كېسىككە بۆلۈنىدۇ؟

(3) قىياس قىلىڭ: چەمبەر ئىچىدىكى ئىككى ـ ئىككىدىن كېسىشكەن n تال كېسىك چەمبەرنى ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە بۆلەككە بۆلىدۇ؟ قىياسىڭىزنى ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ.

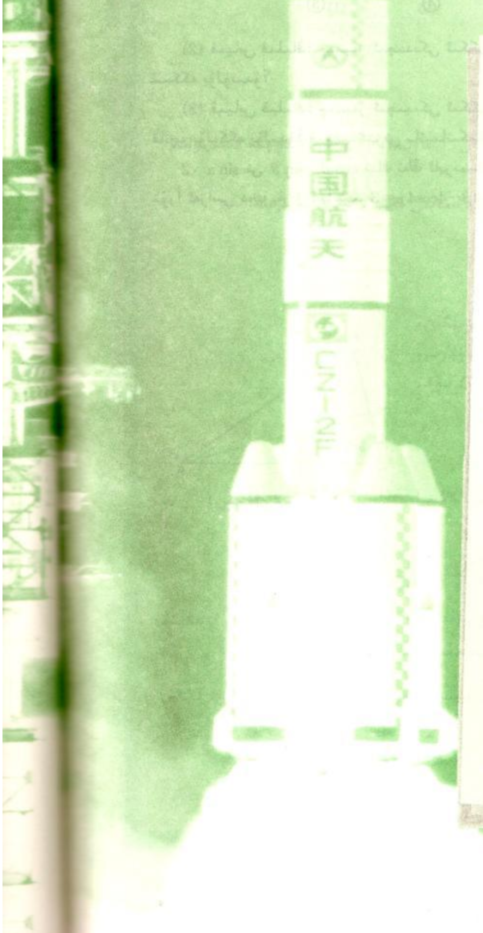
2 . $\sin\alpha$ نى $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ نىڭ تەڭ ئايرىمىلىق ئوتتۇرا ئەزاسى، $\sin\beta$ نى $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ نىڭ تەڭ نىسبەتلىك ئوتتۇرا ئەزاسى دەپ پەرەز قىلىپ، $\cos4\beta-4\cos4\alpha=3$ نى ئىسپاتلاڭ.

3 ـ باب

سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە كومپلېكس ساننىڭ كىرگۈزۈلۈشى

1ـ3 سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە كومپلېكس سان ئۇقۇمى

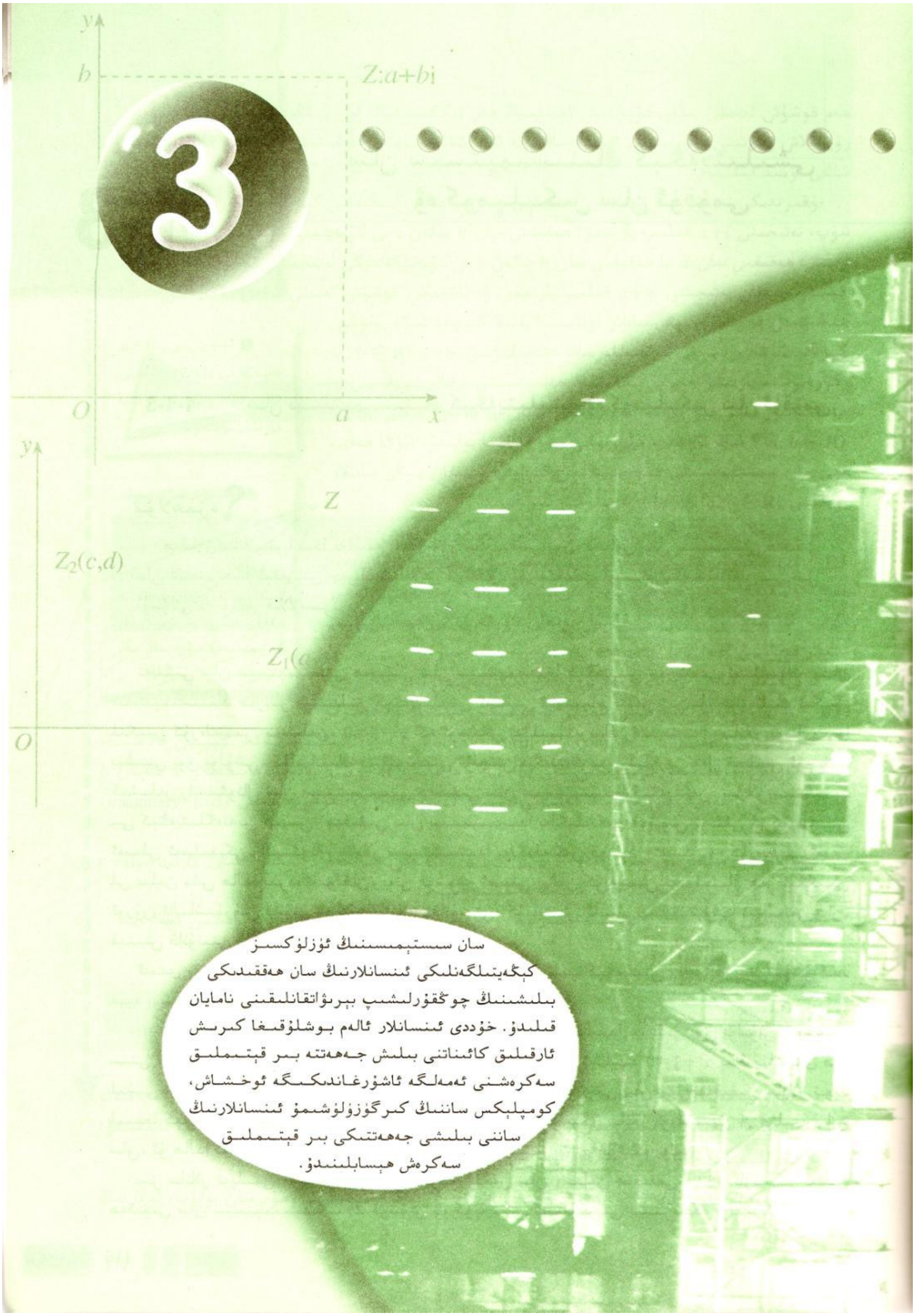
2ـ3 كومپلېكس ساننىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە تۆت ئەمەل



ھەقىقىي سانلار توپلىمىدا $x^2+1=0$ گە ئوخشاش تەڭلىمىلەرنىڭ يىلتىزى يوق ئىكەنلىكى بىزگە مەلۇم. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئالگېبرالىق تەڭلىمىلەرنى تەتقىق قىلىشتا، ئەگەر ھەقىقىي سان سىستېمىسى بىلەنلا چەكلەنسەك، بەزى مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشقا ئامالسىز بولماي قالىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، ئىرراتسىئونال ساننى كىرگۈزۈش ئارقىلىق راتسىئونال سان سىستېمىسىنى ھەقىقىي سان سىستېمىسىغا كېڭەيتكەندىكىگە ئوخشاش، ھەقىقىي سان سىستېمىسىنىمۇ يېڭى سان كىرگۈزۈش ئارقىلىق يەنىمۇ كېڭەيتىپ، يۇقىرىقىدەك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش ئىمكانىيىتىگە ئېرىشتۈرگىلى بولامدۇ؟ دېگەن بىر ئوي تەبىئىيلا ئوتتۇرىغا چىقىدۇ. كومپلېكس ساننىڭ كىرگۈزۈلۈشى مۇشۇ ئوي بىلەن بىۋاستە مۇناسىۋەتلىك.

كومپلېكس ساننى كىشىلەر 16 ـ ئەسىردە بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە ۋە بىر نامەلۇملۇق ئۈچىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمىلەرنىڭ يىلتىزىنى تېپىش فورمۇلىسىنى مۇھاكىمە قىلغاندا كىرگۈزگەن. ئۇ ماتېماتىكا، مېخانىكا، ئېلېكتر ئىلمى ۋە باشقا پەنلەردە كەڭ قوللىنىلىدۇ. كومپلېكس سان ۋېكتور، تەكشىلىكتىكى ئانالىتىك گېئومېتىرىيە، تىرىگونومېتىرىيىلىك فۇنكسىيە قاتارلىقلار بىلەن زىچ باغلىنىشلىق بولۇپ، ماتېماتىكىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ئۆگىنىشىمىزنىڭ ئاساسى ھېسابلىنىدۇ.

بۇ بابتا، تەڭلىمە يېشىش قاتارلىق كونكرېت مەسىلىلەر ئارقىلىق، كومپلېكس سان ئوقۇمىنى كىرگۈزۈشنىڭ زۆرۈرلۈكىنى ھېس قىلىمىز، ھەقىقىي سان سىستېمىسىدىن كومپلېكس سان سىستېمىسىغا بولغان كېڭىيىش جەريانىنى بىلىۋالىمىز، كومپلېكس سانغا دائىر بەزى ئاساسىي بىلىملەرنى ئۆگىنىپ، ئىنسانلارنىڭ ئەقلىي تەپەككۇرىنىڭ سان سىستېمىسىنىڭ كېڭىيىشىدە ئوينىغان رولىنى ھېس قىلىمىز.


3
Z:a+bi
b
O
a
x
y
Z
$Z_2(c,d)$
$Z_1(a$
O
سان سىستېمىسىنىڭ ئۈزلۈكسىز
كېڭەيتىلگەنلىكى ئىنسانلارنىڭ سان ھەققىدىكى
بىلىشىنىڭ چوڭقۇرلىشىپ بېرىۋاتقانلىقىنى نامايان
قىلىدۇ. خۇددى ئىنسانلار ئالەم بوشلۇقىغا كىرىش
ئارقىلىق كائىناتنى بىلىش جەھەتتە بىر قېتىملىق
سەكرەشنى ئەمەلگە ئاشۇرغاندىكىگە ئوخشاش،
كومپلېكس ساننىڭ كىرگۈزۈلۈشىمۇ ئىنسانلارنىڭ
ساننى بىلىشى جەھەتتىكى بىر قېتىملىق
سەكرەش ھېسابلىنىدۇ.

1-3 سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە كومپلېكس سان ئۇقۇمى

1-1-3 سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىشى ۋە كومپلېكس سان ئۇقۇمى

مۇلاھىزە؟

ھەقىقىي سانلار توپلىمىدا تەڭلىمە $x^2+1=0$ نىڭ يېشىمى يوق. تەبىئىي سان سىستېمىسىنى ھەقىقىي سان سىستېمىسىغا كېڭەيتىش جەريانىغا باغلاش ئارقىلىق، بۇ تەڭلىمىنى يېشىمگە ئىگە قىلىدىغان بىر خىل ئۇسۇلنى تەسەۋۋۇر قىلالامسىز؟

تەبىئىي سان سىستېمىسىنى ھەقىقىي سان سىستېمىسىغا كېڭەيتىش جەريانىنى ئەسلىسەك، سان سىستېمىسىنىڭ ھەربىر قېتىملىق كېڭەيتىلىشى ئەمەلىي ئېھتىياج بىلەن زىچ مۇناسىۋەتلىك ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز. مەسىلەن، $x^2-2=0$ گە ئوخشاش تەڭلىمىلەرنىڭ راتسىئونال سانلار توپلىمىدا يېشىمى يوق بولۇشى، كۋادراتنىڭ دىئاگونالىنى ئۆلچەش دېگەندەك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش ئۈچۈن، كىشىلەر راتسىئونال سان سىستېمىسىنى ھەقىقىي سان سىستېمىسىغا كېڭەيتكەن. سانلار سىستېمىسى كېڭەيتىلگەندىن كېيىن، ھەقىقىي سان سىستېمىسىدا بەلگىلەنگەن قوشۇش ئەمەلى ۋە كۆپەيتىش ئەمەلى ئەسلىدىكى راتسىئونال سانلار سىستېمىسىدا بەلگىلەنگەن قوشۇش ئەمەلى ۋە كۆپەيتىش ئەمەلى بىلەن ماس ھالدا بىردەك بولغان، يەنى قوشۇش ئەمەلى بىلەن كۆپەيتىش ئەمەلىنىڭ ھەر ئىككىسى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى، كۆپەيتىش ئەمەلى يەنە قوشۇشقا نىسبەتەن تارقىتىش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرگەن.

ئەمدى بىز، ھەقىقىي سان سىستېمىسىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ كېڭەيتىش مەسىلىسىنى مۇشۇ ئىدىيە بويىچە تەتقىق قىلىمىز.

$x^2+1=0$ گە ئوخشاش تەڭلىمىلەرنىڭ ھەقىقىي سان سىستېمىسىدا يېشىمى يوق بولۇش مەسىلىسىنى ھەل قىلىش ئۈچۈن، يېڭى بىر سان i نى كىرگۈزۈپ، i نى تەڭلىمە $x^2+1=0$ نىڭ يىلتىزى قىلىشنى، يەنى $i \cdot i=-1$ قىلىشنى تەسەۋۋۇر قىلىمىز. ئاندىن بۇ يېڭى سان i نى ھەقىقىي سانلار توپلىمىغا كىرگۈزۈپ، بىر يېڭى سانلار توپلىمىغا ئېرىشىمىز، بۇ يېڭى سانلار توپلىمىنى A قىلىپ يازساق، ئۇ ھالدا تەڭلىمە $x^2+1=0$ سانلار توپلىمى A دا يېشىم $x=i$ غا ئىگە بولىدۇ.

بىز سانلار توپلىمى A دىكى يېڭىدىن كىرگۈزۈلگەن سان i بىلەن ھەقىقىي سانلار ئارىسىدا يەنىلا ھەقىقىي سان سىستېمىسىدىكىدەك قوشۇش ۋە كۆپەيتىش ئەمەللىرىنى بېجىرىشكە بولىدىغانلىقىنى

ھەم قوشۇش ئەمىلى بىلەن كۆپەيتىش ئەمىلىنىڭ ھەر ئىككىسىنىڭ ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى، كۆپەيتىش ئەمىلىنىڭ يەنە قوشۇشقا نىسبەتەن تارقىتىش قانۇنىنى قانائەتلەندۇرۇشىنى ئۈمىد قىلىمىز.

يۇقىرىدىكى تەسەۋۋۇرغا ئاساسەن، ھەقىقىي سان a بىلەن يېڭىدىن كىرگۈزۈلگەن سان i نى قوشۇپ، نەتىجىنى a+i قىلىپ يازىمىز؛ ھەقىقىي سان b بىلەن i نى كۆپەيتىپ، نەتىجىنى bi قىلىپ يازىمىز؛ ھەقىقىي سان a غا ھەقىقىي سان b بىلەن i نى كۆپەيتكەندىكى نەتىجىنى قوشۇپ، قوشۇشتىن كېلىپ چىققان نەتىجىنى a+bi قىلىپ يازىمىز؛ ۋە باشقىلار. قوشۇش ئەمەلى بىلەن كۆپەيتىش ئەمىلىنىڭ ئەمەل قانۇنلىرى يېڭى سانلار توپلىمىدا يەنىلا كۈچكە ئىگە بولۇشى كېرەك. شۇڭا، يۇقىرىقى بۇ ئەمەللەرنىڭ نەتىجىلىرىنى a+bi $(a, b \in \mathbf{R})$ كۆرۈنۈشتە يازىمىز ھەم بۇ سانلارنىڭ ھەممىسىنى سانلار توپلىمى A غا كىرگۈزىمىز. بۇ يەردە، ھەقىقىي سان a بىلەن i نى a+bi $(a, b \in \mathbf{R})$[1] نىڭ ئالاھىدە كۆرۈنۈشى دەپ قاراشقا بولىدۇ، شۇڭا ھەقىقىي سان سىستېمىسىنى كېڭەيتىشتىن كېلىپ چىققان يېڭى سانلار توپلىمى $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ بولۇشى كېرەك.

[1] a+i نى a+1i دەپ، bi نى 0+bi دەپ، a نى a+0i دەپ، i نى 0+1i دەپ قاراشقا بولىدۇ.

بىز توپلام $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ دىكى سانلارنى، يەنى a+bi $(a, b \in \mathbf{R})$ كۆرۈنۈشتىكى سانلارنى **كومپلېكس سان** (complex number) دەپ، ئۇنىڭدىكى i نى **مەۋھۇم سان بىرلىكى**[2] (imaginary unit) دەپ، بارلىق كومپلېكس سانلاردىن ھاسىل بولغان توپلام $\mathbf{C}$ نى **كومپلېكس سانلار توپلىمى** (set of complex number) دەپ ئاتايمىز.

[2] مەۋھۇم سان بىرلىكى i نى شۋېتسارىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى ئېيلېر (Euler) ئەڭ بۇرۇن ئىشلەتكەن، ئۇ imaginary (تەسەۋۋۇردىكى، پەرەزدىكى دېگەن مەنىدە) سۆزىنىڭ باش ھەرپى.

كومپلېكس ساننى ئادەتتە z ھەرپى بىلەن ئىپادىلەيمىز، يەنى $z=a+b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbf{R})$، بۇنداق ئىپادىلەش شەكلى **كومپلېكس ساننىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى** (algebraic form of complex number) دەپ ئاتىلىدۇ. ئەگەر كېيىن ئالاھىدە چۈشەندۈرۈش بېرىلمىسە، كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ دا ھامان $a, b \in \mathbf{R}$ بولۇپ، بۇنىڭدىكى a بىلەن b ئايرىم - ئايرىم كومپلېكس ساننىڭ **ھەقىقىي قىسمى** (real part) ۋە **مەۋھۇم قىسمى** (imaginary part) دەپ ئاتىلىدۇ.

كومپلېكس سانلار توپلىمى $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ دىن خالىغان ئىككى سان a+bi، c+di $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ نى ئېلىپ، تۆۋەندىكىدەك بەلگىلىۋالىمىز:

a+bi بىلەن c+di تەڭ بولۇشنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى $a=c$ ھەم $b=d$ بولۇشتىن ئىبارەت.

مۇلاھىزە ؟

كومپلېكس سانلار توپلىمى $\mathbf{C}$ بىلەن ھەقىقىي سانلار توپلىمى $\mathbf{R}$ ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

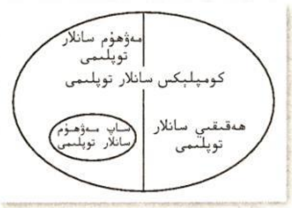
پەقەت ۋە پەقەت $b=0$ بولغاندىلا، كومپلېكس سان a+bi ھەقىقىي سان بولىدۇ؛ پەقەت ۋە پەقەت $a=b=0$ بولغاندىلا، ئۇ ھەقىقىي سان 0 گە تەڭ بولىدۇ؛ $b \neq 0$ بولغاندا، ئۇ مەۋھۇم سان دەپ ئاتىلىدۇ؛ $a=0$ ھەم $b \neq 0$ بولغاندا، ئۇ ساپ مەۋھۇم سان دەپ ئاتىلىدۇ.

مەسىلەن، 3+2i، $\frac{1}{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$، $-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$، $-0.2\mathrm{i}$ لارنىڭ ھەممىسى مەۋھۇم سان بولۇپ، ئۇلارنىڭ

هەقىقىي قىسمى ئايرىم ـ ئايرىم 3، $\frac{1}{2}$، $\sqrt{3}-$، 0، مەۋھۇم قىسمى ئايرىم ـ ئايرىم 2، $\sqrt{3}-$، $-\frac{1}{2}$، -0.2 بولىدۇ ھەم ئۇلارنىڭ ئىچىدە $-0.2\mathrm{i}$ ساپ مەۋھۇم سان بولىدۇ.

روشەنكى، ھەقىقىي سانلار توپلىمى $\mathbf{R}$ كومپلېكس سانلار توپلىمى $\mathbf{C}$ نىڭ ھەقىقىي قىسمىي توپلىمى بولىدۇ، يەنى $\mathbf{R} \subsetneqq \mathbf{C}$.

دېمەك، كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ نى تۆۋەندىكىدەك تۈرگە ئايرىشقا بولىدۇ.



1.1.3 ـ رەسىم

كومپلېكس سان z ⎨ ھەقىقىي سان $(b=0)$،
مەۋھۇم سان $(b \neq 0)$ $(a=0$ بولغاندا، ساپ مەۋھۇم سان بولىدۇ).

كومپلېكس سانلار توپلىمى، ھەقىقىي سانلار توپلىمى، مەۋھۇم سانلار توپلىمى ۋە ساپ مەۋھۇم سانلار توپلىمى ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى 1.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

مىسال. m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، كومپلېكس سان

$$z=m+1+(m-1)\mathrm{i}$$

(1) ھەقىقىي سان بولىدۇ؟ (2) مەۋھۇم سان بولىدۇ؟ (3) ساپ مەۋھۇم سان بولىدۇ؟

تەھلىل: چۈنكى $m \in \mathbf{R}$، شۇنىڭ ئۈچۈن $m+1$، $m-1$ نىڭ ھەر ئىككىسى ھەقىقىي سان بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، m نىڭ ئالىدىغان قىممىتىنى كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ نىڭ ھەقىقىي سان، مەۋھۇم سان، ساپ مەۋھۇم سان بولۇش شەرتلىرىگە ئاساسەن ئېنىقلاشقا بولىدۇ.

يېشىش: (1) $m-1=0$، يەنى $m=1$ بولغاندا، كومپلېكس سان z ھەقىقىي سان بولىدۇ؛

(2) $m-1 \neq 0$، يەنى $m \neq 1$ بولغاندا، كومپلېكس سان z مەۋھۇم سان بولىدۇ؛

(3) $m+1=0$ ھەمدە $m-1 \neq 0$، يەنى $m=-1$ بولغاندا، كومپلېكس سان z ساپ مەۋھۇم سان بولىدۇ.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى كومپلېكس سانلارنىڭ ھەقىقىي قىسمى ۋە مەۋھۇم قىسمىنى ئېيتىپ بېرىڭ:

$-2+\frac{1}{3}\mathrm{i}$, $\sqrt{2}+\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, i, 0.

2. تۆۋەندىكى سانلارنىڭ قايسىسى ھەقىقىي سان، قايسىسى مەۋھۇم سان، قايسىسى ساپ مەۋھۇم سان ئىكەنلىكىنى كۆرسىتىڭ ھەم سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

$2+\sqrt{7}$, 0.618, $\frac{2}{7}\mathrm{i}$, 0, i, i^2, $5\mathrm{i}+8$, $3-9\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $\mathrm{i}(1-\sqrt{3})$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

3. ئەگەر $(x+y)+(y-1)\mathrm{i}=(2x+3y)+(2y+1)\mathrm{i}$ بولسا، ھەقىقىي سان x، y نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3 ـ باب

2-1-3 كومپلېكس ساننىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى

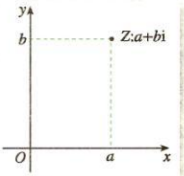
مۇلاھىزە

بىزگە مەلۇمكى، ھەقىقىي سانلار بىلەن سان ئوقىدىكى نۇقتىلار بىرگە بىر ماس كېلىدۇ، شۇڭا ھەقىقىي سانىنى سان ئوقىدىكى نۇقتا بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ھەقىقىي ساننىڭ مۇشۇ گېئومېترىيىلىك مەنىسىگە تەققاسلىساق، كومپلېكس ساننىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى قانداق بولار؟

كومپلېكس سانلارنىڭ تەڭ بولۇش ئېنىقلىمىسىغا ئاساسلانساق، ھەرقانداق بىر كومپلېكس سان $z=a+bi$ نى تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (a, b) بىلەن بىردىنبىر ئېنىقلاشقا بولىدۇ. تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى (a, b) لار بىلەن تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلار بىرگە بىر ماس كېلىدىغانلىقى ئۈچۈن، كومپلېكس سانلار توپلىمى بىلەن تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدىكى نۇقتىلار توپلىمى ئارىسىدا بىرگە بىر ماسلىق تۇرغۇزۇشقا بولىدۇ.

2.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، Z نۇقتىنىڭ ئابسىسساسى a، ئوردىناتى b بولسا، كومپلېكس سان $z=a+bi$ نى $Z(a, b)$ نۇقتا بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. كومپلېكس سانىنى ئىپادىلەش ئۈچۈن تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسى تۇرغۇزۇلغان بۇ تەكشىلىك **كومپلېكس تەكشىلىك** دەپ، x ئوق **ھەقىقىي ئوق**، y ئوق بولسا **مەۋھۇم ئوق** دەپ ئاتىلىدۇ. روشەنكى، ھەقىقىي ئوقتىكى نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ھەقىقىي سانىنى ئىپادىلەيدۇ؛ كوئوردېنات بېشى (باشلىنىش نۇقتىسى)دىن سىرت، مەۋھۇم ئوقتىكى نۇقتىلارنىڭ ھەممىسى ساپ مەۋھۇم سانىنى ئىپادىلەيدۇ.

كومپلېكس ساننىڭ بۇ خىل گېئومېترىيىلىك ئىپادىلىنىشىنى نورۋېگىيىلىك ئۆلچەش ئالىمى ۋېسېل (Caspar Wessel) 1797 ـ يىلى ئوتتۇرىغا قويغان، شۋېتسارىيىلىك كىتاب ساقلىغۇچى ئارگاند (Jean – Robert Argand) دەرھال كىتاب چىقىرىپ ئۇنى مۇھاكىمە قىلغان ھەم گائۇسنىڭ ئېتىراپ قىلىشىغا ئېرىشكەن. شۇڭا، بۇ خىل گېئومېترىيىلىك ئىپادىلەش ئارگاند شەكلى (Argand diagram) دەپمۇ ئاتىلىدۇ.



2.1.3 ـ رەسىم

مەسىلەن، كومپلېكس تەكشىلىكتىكى كوئوردېنات بېشى $(0, 0)$ ھەقىقىي سان 0 نى، ھەقىقىي ئوقتىكى $(2, 0)$ نۇقتا ھەقىقىي سان 2 نى، مەۋھۇم ئوقتىكى $(0, -1)$ نۇقتا ساپ مەۋھۇم سان $-i$ نى، $(-2, 3)$ نۇقتا بولسا مەۋھۇم سان $-2+3i$ نى ئىپادىلەيدۇ.

مۇشۇ خىل ئىپادىلەش ئۇسۇلىغا ئاساسلانغاندا، ھەربىر كومپلېكس سانغا كومپلېكس تەكشىلىكتىكى بىردىنبىر نۇقتا ماس كېلىدۇ؛ ئەكسىچە، كومپلېكس تەكشىلىكتىكى ھەربىر نۇقتىغا بىردىنبىر كومپلېكس سان ماس كېلىدۇ. بۇنىڭدىن بىلىشكە بولىدۇكى، كومپلېكس سانلار توپلىمى **C** بىلەن كومپلېكس تەكشىلىكتىكى بارلىق نۇقتىلاردىن ھاسىل بولغان توپلام بىرگە بىر ماس كېلىدۇ، يەنى

كومپلېكس تەكشىلىكتىكى $Z(a, b)$ نۇقتا $\xleftrightarrow{\text{بىرگە بىر ماس}}$ كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$

بۇ، كومپلېكس ساننىڭ بىر خىل گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىدۇر.

تەكشىلىكتىكى تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ھەربىر تەكشىلىك ۋېكتورىنى بىر تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپى بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ، ھالبۇكى، تەرتىپلىك ھەقىقىي سانلار جۈپلىرى بىلەن كومپلېكس سانلار بىرگە بىر ماس كېلىدۇ. شۇڭا، كومپلېكس ساننى تەكشىلىك ۋېكتورى بىلەنمۇ ئىپادىلىيەلەيمىز.

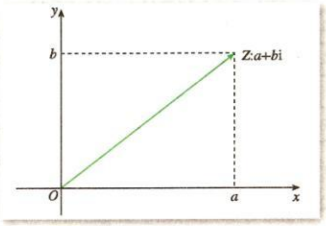
3.1.3 ـ رەسىمدىكىدەك، كومپلېكس تەكشىلىكتىكى Z نۇقتا كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ نى ئىپادىلەيدۇ دەپ پەرەز قىلىپ، O بىلەن Z نى تۇتاشتۇرساق، روشەنكى $\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتورنى Z نۇقتا بىردىنبىر ئېنىقلايدۇ؛ ئەكسىچە، Z نۇقتىنىمۇ (كوئوردېنات بېشىغا نىسبەتەن ئېيتقاندا) $\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتور بىردىنبىر ئېنىقلايدۇ. شۇڭا، كومپلېكس سانلار توپلىمى $\mathbf{C}$ بىلەن كومپلېكس تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلاردىن ھاسىل بولغان توپلاممۇ بىرگە بىر ماس كېلىدۇ (ھەقىقىي سان 0 بىلەن نۆل ۋېكتور ماس كېلىدۇ)، يەنى

تەكشىلىكتىكى $\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتور $\xleftrightarrow{\text{بىرگە بىر ماس}}$ كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$

بۇ، كومپلېكس ساننىڭ يەنە بىر خىل گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىدۇر.

$\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتورنىڭ مودۇلى r كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ نىڭ مودۇلى دەپ ئاتىلىپ، $|z|$ ياكى $|a+b\mathrm{i}|$ قىلىپ يېزىلىدۇ. ئەگەر $b=0$ بولسا، ئۇ ھالدا $z=a+b\mathrm{i}$ بىر ھەقىقىي سان a بولۇپ، ئۇنىڭ مودۇلى $|a|$ (يەنى a نىڭ مۇتلەق قىممىتى)غا تەڭ بولىدۇ. مودۇلنىڭ ئېنىقلىمىسىدىن بىلەلەيمىزكى،

$$|z|=|a+b\mathrm{i}|=r=\sqrt{a^2+b^2}\ (r\geqslant 0,\ r\in\mathbf{R}).$$



3.1.3 ـ رەسىم

ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، ئادەتتە كومپلېكس سان $z=a+b\mathrm{i}$ نى Z نۇقتا ياكى $\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتور دەپ ئېيتىمىز ھەم تەڭ ۋېكتورلار ئوخشاش بىر كومپلېكس ساننى ئىپادىلەيدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

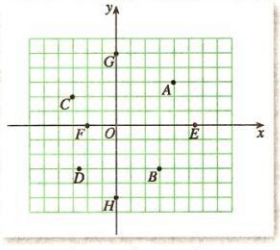
مەشىق

1. رەسىمدە بېرىلگەن كومپلېكس تەكشىلىكتىكى نۇقتىلار ئىپادىلىگەن كومپلېكس سانلارنى ئېيتىپ بېرىڭ (ھەربىر كىچىك كاتەكچىنىڭ تەرەپ ئۇزۇنلۇقى 1).

2. كومپلېكس تەكشىلىكتە، تۆۋەندىكى كومپلېكس سانلارنى ئىپادىلەيدىغان نۇقتىلارنى بەلگىلەڭ:

(1) $2+5\mathrm{i}$;　(2) $-3+2\mathrm{i}$;　(3) $2-4\mathrm{i}$;
(4) $-3-\mathrm{i}$;　(5) 5;　(6) $-3\mathrm{i}$.

3. كومپلېكس تەكشىلىكتە، كومپلېكس سان $2+\mathrm{i}$، $-2+4\mathrm{i}$، $-2\mathrm{i}$، 4، $\frac{3}{2}-4\mathrm{i}$ گە ماس كېلىدىغان ۋېكتورلارنى سىزىڭ.



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

3 ـ باب

1.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى تەڭلىمىلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان ھەقىقىي سان x بىلەن y نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ:

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$;

(2) $(x+y-3)+(x-4)i=0$.

2. ھەقىقىي سان m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، كومپلېكس سان $(m^2-5m+6)+(m^2-3m)i$

(1) ھەقىقىي سان بولىدۇ؟ (2) مەۋھۇم سان بولىدۇ؟ (3) ساپ مەۋھۇم سان بولىدۇ؟

3. تۆۋەندىكى شەرتلەرگە ئۇيغۇن كېلىدىغان كومپلېكس سان چوقۇم مەۋجۇتمۇ؟ ئەگەر مەۋجۇت بولسا، مىسال كەلتۈرۈڭ؛ مەۋجۇت بولمىسا، سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(1) ھەقىقىي قىسمى $\sqrt{2}$ ـ بولغان مەۋھۇم سان؛

(2) مەۋھۇم قىسمى $\sqrt{2}$ ـ بولغان مەۋھۇم سان؛

(3) مەۋھۇم قىسمى $\sqrt{2}$ ـ بولغان ساپ مەۋھۇم سان؛

4. كومپلېكس تەكشىلىكتىكى P نۇقتا كومپلېكس سان $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ نى ئىپادىلىسە، تۆۋەندىكى شەرتلەر قانائەتلەندۈرۈلگەن چاغدىكى P نۇقتىنىڭ ئورنىنى ئايرىم ـ ئايرىم كۆرسىتىڭ:

(1) $a>0, b>0$; (2) $a<0, b>0$;

(3) $a=0, b\leqslant 0$; (4) $b<0$.

5. ھەقىقىي سان m قانداق قىممەتنى ئالغاندا، كومپلېكس تەكشىلىكتە كومپلېكس سان

$$z=(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)i$$

نى ئىپادىلەيدىغان نۇقتا

(1) 4 ـ چارەكتە ياتىدۇ؟ (2) 1 ـ، 3 ـ چارەكتە ياتىدۇ؟ (3) $y=x$ تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتىدۇ؟

6. كومپلېكس تەكشىلىكتە، O بولسا كوئوردىنات بېشى، $\overrightarrow{OA}$ ۋېكتورغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس سان $2+i$.

(1) ئەگەر A نۇقتىنىڭ ھەقىقىي ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى B بولسا، $\overrightarrow{OB}$ ۋېكتورغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس ساننى تېپىڭ؛

(2) ئەگەر (1) دىكى B نۇقتىنىڭ مەۋھۇم ئوققا نىسبەتەن سىممېترىك نۇقتىسى C بولسا، C نۇقتىغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس ساننى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. كومپلېكس سان z نىڭ ھەقىقىي قىسمى مۇسبەت سان، مەۋھۇم قىسمى 3 بولسا، z قا ماس كېلىدىغان نۇقتا كومپلېكس تەكشىلىكتىكى قانداق شەكىل ئۈستىدە يېتىشى كېرەك؟

2. كومپلېكس سان z نىڭ مەۋھۇم قىسمى $\sqrt{3}$ بولۇپ، كومپلېكس تەكشىلىكتە z قا ماس كېلىدىغان ۋېكتورنىڭ مودۇلى 2 بولسا، كومپلېكس سان z نى تېپىڭ.

3. كومپلېكس تەكشىلىكتە، كومپلېكس سان $z_1=1+2i$، $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$، $z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$، $z_4=-2+i$ غا ماس كېلىدىغان Z_1، Z_2، Z_3، Z_4 نۇقتىلارنى تېپىڭ، ئاندىن بۇ 4 نۇقتىنىڭ ئوخشاش بىر چەمبەر ئۈستىدە ياتىدىغان ـ ياتمايدىغانلىقىغا ھۆكۈم قىلىڭ ھەم يەكۈنىڭىزنى ئىسپاتلاڭ.

2-3 كومپلېكس سانىنىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە تۆت ئەمەل

ئالدىنقى پاراگرافتا ھەقىقىي سان سىستېمىسىنى كومپلېكس سان سىستېمىسىغا كېڭەيتتۇق. ئەمدى ئاشۇ پاراگرافتىكى تەھلىللەرگە ئاساسەن، يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ كومپلېكس سان سىستېمىسىدىكى ئەمەل مەسىلىسىنى مۇھاكىمە قىلىمىز.

1-2-3 كومپلېكس سانىنىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرى ۋە ئۇلارنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسى

كومپلېكس سانلارنى قوشۇش قائىدىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز:

$z_1=a+bi$، $z_2=c+di$ لارنى خالىغان ئىككى كومپلېكس سان دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

روشەنكى، ئىككى كومپلېكس سانىنىڭ يىغىندىسى يەنىلا بىر كومپلېكس سان بولىدۇ.

ئىزدىنىش

كومپلېكس سانلارنى قوشۇش ئەمىلى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى ۋە گۇرۇپپىلاش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرەمدۇ؟

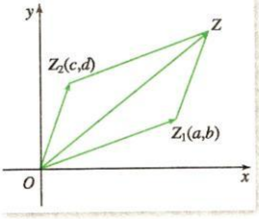
ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىزكى، خالىغان $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ غا نىسبەتەن تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

ئىزدىنىش

كومپلېكس سانلار بىلەن كومپلېكس تەكشىلىكتىكى ۋېكتورلار ئارىسىدا بىرگە بىر ماسلىق مۇناسىۋەت مەۋجۇت. بىز ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى مۇھاكىمە قىلغانىدۇق، بۇنىڭغا ئاساسەن كومپلېكس سانلارنى قوشۇش ئەمىلىنىڭ گېئومېتىرىيىلىك مەنىسىنى مۇھاكىمە قىلالامسىز؟

$\overrightarrow{OZ_1}$ بىلەن $\overrightarrow{OZ_2}$ ئايرىم - ئايرىم كومپلېكس سان $a+bi$ ۋە $c+di$ غا ماس كېلىدۇ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ هالدا $\overrightarrow{OZ_1}=(a, b)$ ، $\overrightarrow{OZ_2}=(c, d)$ بولىدۇ. تەكشىلىك ۋېكتورلىرى ئۈستىدىكى كوئوردىنات ئەمىلگە ئاساسەن:



1.2.3 - رەسىم

$$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a+c, b+d).$$

بۇ، ئىككى ۋېكتور $\overrightarrow{OZ_1}$ بىلەن $\overrightarrow{OZ_2}$ نىڭ يىغىندىسى كومپلېكس سان $(a+c)+(b+d)i$ غا ماس كېلىدىغان ۋېكتوردىن ئىبارەت ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، كومپلېكس سانلارنى قوشۇش ئەمىلىنى ۋېكتورلارنى قوشۇش ئەمىلى بويىچە بېجىرىشكە بولىدۇ (1.2.3 - رەسىم)، مانا بۇ، كومپلېكس سانلارنى قوشۇش ئەمىلىنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسى.

مۇلاھىزە؟

كومپلېكس سانلارنى ئېلىشقا بولامدۇ؟ كومپلېكس سانلارنى ئېلىش ئەمىلىنى قانداق چۈشىنىسىز؟

ھەقىقىي سانلار توپلىمىدىكى ئېلىش ئەمىلىنىڭ مەنىسىگە تەققاسلاپ، كومپلېكس سانلارنى ئېلىش ئەمىلى قوشۇشنىڭ تەتۈر ئەمىلى بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز، يەنى

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

نى قانائەتلەندۈرىدىغان كومپلېكس سان $x+yi$ نى كومپلېكس سان $a+bi$ دىن كومپلېكس سان $c+di$ نى ئالغاندىكى ئايرىما دەپ ئاتاپ، ئۇنى $(a+bi)-(c+di)$ قىلىپ يازىمىز. كومپلېكس سانلارنىڭ تەڭ بولۇش ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن:

$$c+x=a,\ d+y=b,$$

شۇڭا

$$x=a-c,\ y=b-d,$$

شۇنىڭ ئۈچۈن

$$x+yi=(a-c)+(b-d)i,$$

يەنى

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

مانا بۇ، كومپلېكس سانلارنى ئېلىش قائىدىسى. بۇنىڭدىن كۆرەلەيمىزكى، ئىككى كومپلېكس سانىڭ ئايرىمىسى بىر ئېنىق كومپلېكس سان بولىدۇ.

ئىزدىنىش

كومپلېكس سانلارنى قوشۇش ئەمىلنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسگە تەققاسلاپ، كومپلېكس سانلارنى ئېلىش ئەمىلنىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىسىنى كۆرسىتىپ بېرىڭ.

1 ـ مىسال. $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$ نى ھېسابلايلى.

يېشىش:

$$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$$
$$=(5-2-3)+(-6-1-4)i$$
$$=-11i.$$

مەشىق

1. ھېسابلاڭ:

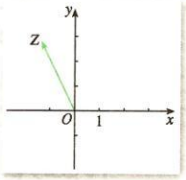
(1) $(2+4i)+(3-4i)$;　　(2) $5-(3+2i)$;

(3) $(-3-4i)+(2+i)-(1-5i)$;　　(4) $(2-i)-(2+3i)+4i$.

2. رەسىمدىكىدەك، $\overrightarrow{OZ}$ ۋېكتورغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس سان z بول-سا، تۆۋەندىكى ئەمەللەرنىڭ نەتىجىسىگە ماس كېلىدىغان ۋېكتورنى سىزىڭ.

(1) $z+1$;　　(2) $z-i$;

(3) $z+(-2+i)$.



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2-2-3 كومپلېكس ساننىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە كۆپەيتىش، بۆلۈش ئەمەللىرى

كومپلېكس سانلارنى كۆپەيتىش قائىدىسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز:

$z_1=a+bi$ ، $z_2=c+di$ نى خالىغان ئىككى كومپلېكس سان دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

بۇنىڭغا ئاساسەن، ئىككى كومپلېكس ساننى كۆپەيتىش ئىككى كۆپ ئەزالىقنى كۆپەيتىشكە ئوخشىشىپ كېتىدىغانلىقىنى، بۇنىڭدا پەقەت كۆپەيتىشتىن كېلىپ چىققان نەتىجىدىكى i^2 نى -1 گە ئالماشتۇرۇپ، ھەقىقىي قىسىملىرى بىلەن مەۋھۇم قىسىملىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم بىرلەشتۈرسەكلا بولىدىغانلىقىنى كۆرەلەيمىز.

ئىككى كومپلېكس ساننىڭ كۆپەيتمىسى بىر ئېنىق كومپلېكس سان بولىدۇ.

ئىزدىنىش

كومپلېكس سانلارنى كۆپەيتىش ئەمىلى ئورۇن ئالماشتۇرۇش قانۇنى، گۇرۇپپىلاش قانۇنى ۋە كۆپەيتىشنىڭ قوشۇشقا نىسبەتەن تارقىتىش قانۇنىنى قانائەتلەندۈرەمدۇ؟

ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىزكى، خالىغان $z_1, z_2, z_3 \in C$ غا نىسبەتەن تۆۋەندىكى كۈچكە ئىگە بولىدۇ:

$$z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1,$$
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3=z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

2 ـ مىسال. $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$ نى ھېسابلايلى.

يېشىش:

$$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$$
$$=(11-2i)(-2+i)$$
$$=-20+15i.$$

3 ـ مىسال. ھېسابلايلى.

(1) $(3+4i)(3-4i)$;   (2) $(1+i)^2$.

تەھلىل: بۇ مىسالنى كومپلېكس سانلارنى كۆپەيتىش قائىدىسىدىن پايدىلىنىپ، شۇنداقلا كۆپەيتىش فورمۇلىلىرىدىن❶ پايدىلىنىپ ھېسابلىساقمۇ بولىدۇ.

❶ بۇ، ھەقىقىي سان سىستېمىسىدىكى كۆپەيتىش فورمۇلىلىرىغا ماس كېلىدىغان فورمۇلىلارنى كۆرسىتىدۇ.

يېشىش:

(1) $(3+4i)(3-4i)$;
$$=3^2-(4i)^2$$
$$=9-(-16)$$
$$=25.$$

(2) $(1+i)^2=1+2i+i^2$
$$=1+2i-1$$
$$=2i.$$

بۇ مىسالنىڭ (1) تارمىقىدىكى ئىككى كومپلېكس سان $3+4i$، $3-4i$ قوشما كومپلېكس سانلار دەپ ئاتىلىدۇ.

ئومۇمەن، ئىككى كومپلېكس ساننىڭ ھەقىقىي قىسىملىرى تەڭ بولۇپ، مەۋھۇم قىسىملىرى قارىمۇقارشى سانلار بولسا، بۇ ئىككى كومپلېكس سان ئۆزئارا **قوشما كومپلېكس سانلار**❷ (conjugate complex number)دەپ ئاتىلىدۇ، مەۋھۇم قىسمى 0 گە تەڭ بولمىغان ئىككى قوشما كومپلېكس سان قوشما مەۋھۇم سانلار دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

❷ كومپلېكس سان z نىڭ قوشما كومپلېكس سانى ئادەتتە $\bar{z}$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر z_1، z_2 قوشما كومپلېكس سانلار بولسا، ئۇ ھالدا

(1) كومپلېكس تەكشىلىكتە، ئۇلارغا ماس كېلىدىغان ئىككى نۇقتىنىڭ ئورۇن مۇناسىۋىتى قانداق بولىدۇ؟

(2) $z_1 \cdot z_2$ قانداق سان بولىدۇ؟

ئىزدىنىش

ھەقىقىي سانلارنى بۆلۈش ئەملى كۆپەيتىشنىڭ تەتۈر ئەملى بولىدىغانلىقىغا تەققاسلاپ، كومپلېكس سانلارنى بۆلۈش ئەملى كۆپەيتىشنىڭ تەتۈر ئەملى بولىدۇ دەپ بەلگىلىۋالىمىز. كومپلېكس سانلارنى بۆلۈش قائىدىسى ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرۈڭ.

كومپلېكس سانلارنى بۆلۈش قائىدىسى:

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ (c+di\neq 0).$$

بۇنىڭدىن كۆرەلەيمىزكى، ئىككى كومپلېكس ساننى بۆلگەندە (بۆلگۈچى 0 ئەمەس) كېلىپ چىقىدىغان بۆلۈنمە بىر ئېنىق كومپلېكس سان بولىدۇ.

كومپلېكس سانلارنى بۆلۈشتە، ئادەتتە ئالدى بىلەن $(a+bi)\div(c+di)$ نى $\frac{a+bi}{c+di}$ كۆرۈنۈشتە يېزىۋالىمىز، ئاندىن سۇرەت بىلەن مەخرەجنى مەجرەجنىڭ قوشما كومپلېكس سانى $c-di$ غا كۆپەيتىپ، ئاددىيلاشتۇرۇش ئارقىلىق يۇقىرىدىكى نەتىجىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىمىز. بۇ، يىلتىز ئىپادىلىرىنى بۆلگەندىكى بىرتەرەپ قىلىش ئۇسۇلىغا ئوخشىشىپ كېتىدۇ. بىز يىلتىز ئىپادىلىرىنى بۆلگەندە، سۇرەت بىلەن مەخرەجنى مەخرەجنىڭ «راتسىئوناللاشتۇرۇش كۆپەيتكۈچىسى»گە كۆپەيتىپ، بۇ ئارقىلىق مەخرەجنى «راتسىئوناللاشتۇرغان» ئىدۇق، بۇ يەردە بولسا سۇرەت بىلەن مەخرەجنى مەخرەجنىڭ «ھەقىقىي سانغا ئايلاندۇرۇش كۆپەيتكۈچىسى» (قوشما كومپلېكس سانى)گە كۆپەيتىپ، بۇ ئارقىلىق مەخرەجنى «ھەقىقىي سانغا ئايلاندۇردۇق».

4 ـ مىسال. $(1+2i)\div(3-4i)$ نى ھېسابلايلى.

يېشىش:

$$(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}$$

$$=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3-8+6i+4i}{3^2+4^2}$$

$$=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

مەشىق

1. ھېسابلاڭ:

(1) $(7-6i)(-3i)$; (2) $(3+4i)(-2-3i)$;

(3) $(1+2i)(3-4i)(-2-i)$.

2. ھېسابلاڭ:

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(-\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$; (2) $(1-i)^2$;

(3) $i(2-i)(1-2i)$.

3. ھېسابلاڭ:

(1) $\frac{1+i}{1-i}$; (2) $\frac{1}{i}$;

(3) $\frac{7+i}{3+4i}$; (4) $\frac{(-1+i)(2+i)}{-i}$.

3 ـ باب

2.3 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ھېسابلاڭ:

(1) $(6-5i)+(3+2i)$;

(2) $5i-(2+2i)$;

(3) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$;

(4) $(0.5+1.3i)-(1.2+0.7i)+(1-0.4i)$.

2. كومپلېكس تەكشىلىكتە، كومپلېكس سان $6+5i$ بىلەن $-3+4i$ غا ماس كېلىدىغان ۋېكتور ئايرىم ـ ئايرىم $\overrightarrow{OA}$ ۋە $\overrightarrow{OB}$ بولۇپ، O كوئوردىنات بېشى بولسا، ۋېكتور $\overrightarrow{AB}$ بىلەن $\overrightarrow{BA}$ غا ماس كېلىدىغان كومپلېكس سانلارنى تېپىڭ.

3. $ABCD$ كومپلېكس تەكشىلىكتىكى پاراللېل تۆت تەرەپلىك بولۇپ، A، B، C ئۈچ نۇقتىغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس سان ئايرىم ـ ئايرىم $1+3i$، $-i$، $2+i$ بولسا، D نۇقتىغا ماس كېلىدىغان كومپلېكس ساننى تېپىڭ.

4. ھېسابلاڭ:

(1) $(-8-7i)(-3i)$;

(2) $(4-3i)(-5-4i)$;

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$;

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

5. ھېسابلاڭ:

(1) $\frac{2i}{2-i}$;

(2) $\frac{2+i}{7+4i}$;

(3) $\frac{1}{(2-i)^2}$;

(4) $\frac{5(4+i)^2}{i(2+i)}$.

6. x كە دائىر تەڭلىمە $2x^2+px+q=0$ نىڭ بىر يىلتىزى $2i-3$ بولسا، ھەقىقىي سان p، q لارنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. فورمۇلا $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ دىن پايدىلىنىپ، تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنى بىرىنچى دەرىجىلىك كۆپەيتكۈچىلەرنىڭ كۆپەيتمىسى كۆرۈنۈشىگە ئاجرىتىڭ:

(1) x^2+4;

(2) a^4-b^4.

2. شارائىتى بار مەكتەپلەر ئۇچۇر تېخنىكىسى ۋاسىتىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىنى تەجرىبە قىلىپ باقسا بولىدۇ: كومپلېكس سانلار توپلىمىدا ھەقىقىي كوئېففىتسېنتلىق كۆپ ئەزالىقلارنى كۆپەيتكۈچىلەرگە ئاجرىتىش ھەم بايقالغان قانۇنىيەتنى كۆزىتىش ۋە ئۇنى خاتىرىلەش.

ئوقۇش ۋە مۇلاھىزە

ئالگېبرانىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى

ھېسابلىغۇچ ياكى كومپيۇتېرغا تايىنىپ مۇنداق بىر ھادىسىنى بايقىيالايمىز: تاسادىپىي ھاسىل قىلىنغان كۆپ ئەزالىقنى كومپلېكس سانلار توپلىمىدا ھامان بىرىنچى دەرىجىلىك كۆپەيتكۈچىلەرنىڭ كۆپەيتمىسى كۆرۈنۈشىگە ئاجراتقىلى بولۇپ، ئاجرىتىلغان بىرىنچى دەرىجىلىك كۆپەيتكۈچىلەرنىڭ سانى (تەكرار كۆپەيتكۈچىلەرنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ) ئاشۇ كۆپ ئەزالىقنىڭ دەرىجە سانىغا تەڭ بولىدۇ. ئەمدى تەسەۋۋۇر قىلىپ باقايلى، ئەگەر بۇ بىر ئومۇمىي قانۇنىيەت بولسا، ئۇ ھالدا بۇ قانۇنىيەت كومپلېكس سانلار توپلىمىنىڭ قانداق ئەۋزەللىكىنى يورۇتۇپ بېرىدۇ؟

ئالگېبرانىڭ ئاساسىي تېئورېمىسى (fundamental theorem of algebra): ھەرقانداق $n(n \in \mathbf{N}^*)$ نىچى دەرىجىلىك كومپلېكس كوئېففىتسىېنتلىق كۆپ ئەزالىق $f(x)$ نىڭ كەم دېگەندە بىر كومپلېكس يىلتىزى بار.

ئالگېبرانىڭ ئاساسىي تېئورېمىسىنى ئىسپاتلاش ئۇسۇللىرى ناھايىتى كۆپ، بىراق، ھەربىر خىل ئىسپاتلاش ئۇسۇلى ئالىي ماتېماتىكىدىكى بىلىملەرگە چېتىلىدىغانلىقى ئۈچۈن، بۇ يەردە ئۇلارنى تونۇشتۇرمىدۇق. قىزىققىدىغان ئوقۇغۇچىلار ئالاقىدار ماتېرىياللاردىن كۆرۈۋالسا بولىدۇ.

ئەمدى ئالگېبرانىڭ ئاساسىي تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ قانداق يەكۈنلەرنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدىغانلىقىنى كۆرۈپ باقايلى.

ئىزدىنىش

تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنىڭ كۈچكە ئىگە بولۇشىنىڭ سەۋەبىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

(1) ھەرقانداق $n(n \in \mathbf{N}^*)$ نىچى دەرىجىلىك كومپلېكس كوئېففىتسىېنتلىق كۆپ ئەزالىق $f(x)$ نى كومپلېكس سانلار توپلىمىدا n دانە بىرىنچى دەرىجىلىك كۆپەيتكۈچىنىڭ كۆپەيتمىسى كۆرۈنۈشىگە ئاجراتقىلى بولىدۇ ھەمدە n نىچى دەرىجىلىك كۆپ ئەزالىقنىڭ n دانە كومپلېكس يىلتىزى بار (تەكرار يىلتىزلار تەكرارلانغان سانى بويىچە ھېسابلىنىدۇ).

(2) ئەگەر مەۋھۇم سان $a+bi$ ھەقىقىي كوئېففىتسىېنتلىق بىر نامەلۇملۇق n نىچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

نىڭ يىلتىزى بولسا، ئۇ ھالدا ئۇنىڭ قوشما مەۋھۇم سانى $a-bi$ مۇ بۇ تەڭلىمىنىڭ يىلتىزى بولىدۇ («مەۋھۇم يىلتىزلارنىڭ جۈپلىشىپ كېلىشى»).

(3) يىلتىز بىلەن كوئېففىتسىېنت ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت

ھەقىقىي كوئېففىتسىېنتلىق بىر نامەلۇملۇق ئىككىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

$$a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

نىڭ كومپلېكس سانلار توپلىمى C دىكى يىلتىزىنى x_1، x_2 دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا تۆۋەندىكىنى ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{a_1}{a_2}, \\ x_1x_2=\dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases}$$

ھەقىقىي كوئېففىتسېنتلىق بىر نامەلۇملۇق ئۈچىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \qquad ①$$

نىڭ كومپلېكس سانلار توپلىمى C دىكى يىلتىزىنى x_1، x_2، x_3 دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا تەڭلىمە ① نى تۆۋەندىكى كۆرۈنۈشتە يازغىلى بولىدۇ:

$$a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0,$$

يۇقىرىقى ئىپادىنى يايساق:

$$a_3x^3-a_3(x_1+x_2+x_3)x^2+a_3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-a_3x_1x_2x_3=0, \qquad ②$$

① بىلەن ② نى سېلىشتۇرۇپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

ئەگەر ھەقىقىي كوئېففىتسېنتلىق بىر نامەلۇملۇق تۆتىنچى دەرىجىلىك تەڭلىمە

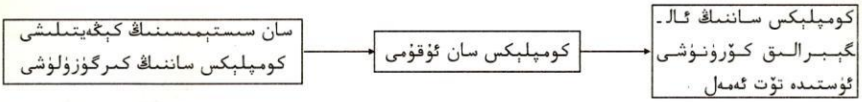
$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

نىڭ كومپلېكس سانلار توپلىمى C دىكى يىلتىزى x_1، x_2، x_3، x_4 بولسا، ئۇ ھالدا بۇ يىلتىزلار بىلەن تەڭلىمىنىڭ كوئېففىتسېنتلىرى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟ ئەگەر يۇقىرىقى تەڭلىمىنىڭ كوئېففىتسېنتلىرى كومپلېكس سان بولسا، يىلتىز بىلەن كوئېففىتسېنت ئارىسىدىكى بۇ مۇناسىۋەتلەر يەنىلا كۈچكە ئىگە بولامدۇ؟

CHAPTER

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما سخېمىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. كومپلېكس سان سىستېمىسى ھەقىقىي سان سىستېمىسىنى كېڭەيتىش ئارقىلىق بارلىققا كەلتۈ-رۈلگەن. سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىش جەريانى ئەمەلىي ئېھتىياج ۋە ماتېماتىكىنىڭ ئىچكى قىس-مىدىكى زىددىيەتلەر (سانلارنى ھېسابلاش قائىدىسى، تەڭلىمىنىڭ يىلتىزىنى تېپىش دېگەندەك)نىڭ ماتې-ماتىكا تەرەققىياتىغا بولغان تۈرتكىلىك رولىنى، شۇنداقلا ئىنسانلارنىڭ ئەقلىي تەپەككۇرىنىڭ رولىنى نامايان قىلىدۇ. ھەقىقىي سان سىستېمىسىنى كومپلېكس سان سىستېمىسىغا كېڭەيتىشكە دائىر ماتېما-تىكا تارىخىي ماتېرىياللىرىنى توپلاڭ ھەم «پۈتۈن سان ← كەسىر سان (راتسىئونال سان) ← ھەقىقىي سان ← كومپلېكس سان» دىن ئىبارەت سان سىستېمىسىنىڭ كېڭەيتىلىش جەريانىنى رەتلەپ چىقىڭ.

2. كومپلېكس ساننى ئۆگەنگەندە ئۇنى ھەقىقىي سانغا باغلاپ، كومپلېكس سان ئەمەلىيەتتە بىر جۈپ تەرتىپلىك ھەقىقىي سان ئىكەنلىكىگە دىققەت قىلىش كېرەك. ھەقىقىي سان، مەۋھۇم سان، ساپ مەۋ-ھۇم سان، كومپلېكس سان ئارىسىدىكى پەرق ۋە باغلىنىشنى، كومپلېكس سان بىلەن ھەقىقىي ساننىڭ گېئومېترىيىلىك مەنىلىرىنىڭ پەرقىنى سېلىشتۇرۇڭ.

3. كومپلېكس سانلار ئۈستىدە تۆت ئەمەل قائىدىسىنىڭ بەلگىلىنىشلىشىنىڭ ئەقلىگە مۇۋاپىقلىقى ۋە كومپلېكس ساننىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرى بىلەن ۋېكتور ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرىنىڭ بىردەكلىكىگە قارىتا قانداق چۈشەنچە ھاسىل قىلدىڭىز؟

4. بۇ بابتىكى مەزمۇنلارنى ئۆگەنگەندە، كومپلېكس سان بىلەن ھەقىقىي سان ۋە راتسىئونال ساننىڭ باغلىنىشى، كومپلېكس سان ۋە ئۇنىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرى بىلەن تەكشىلىك ۋېكتورى ۋە ۋېكتور ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش ئەمەللىرىنىڭ باغلىنىشى ھەمدە كومپلېكس سان ۋە ئۇنىڭ ئالگېبرالىق كۆرۈنۈشى ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش، كۆپەيتىش، بۆلۈش ئەمەللىرى بىلەن كۆپ ئەزالىق ۋە كۆپ ئەزالىق ئۈستىدە قوشۇش، ئېلىش، كۆپەيتىش، بۆلۈش ئەمەللىرىنىڭ باغلىنىشىغا دىققەت قىلىش كېرەك. بۇ مۇناسىۋەتلەرنى رامكىلىق سخېما بىلەن تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

(1) كومپلېكس سان $a+bi$ بىلەن $c+di$ نى كۆپەيتكەندىكى كۆپەيتمىنىڭ ھەقىقىي سان بولۇشىنىڭ يېتەرلىك ۋە زۆرۈر شەرتى ( ).

(A) $ad+bc=0$ (B) $ac+bd=0$ (C) $ac=bd$ (D) $ad=bc$

(2) كومپلېكس سان $\frac{5}{i-2}$ نىڭ قوشما كومپلېكس سانى ( ).

(A) $i+2$ (B) $i-2$ (C) $-2-i$ (D) $2-i$

(3) $\frac{2}{3}<m<1$ بولغاندا، كومپلېكس سان $m(3+i)-(2+i)$ نىڭ كومپلېكس تەكشىلىكتىكى ماس نۇقتىسى ( )تە ياتىدۇ.

(A) 1 ـ چارەك (B) 2 ـ چارەك (C) 3 ـ چارەك (D) 4 ـ چارەك

(4) كومپلېكس سان $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ نىڭ قىممىتى ( ).

(A) $-i$ (B) i (C) -1 (D) 1

2. كومپلېكس سان z بىلەن $(z+2)^2-8i$ نىڭ ھەر ئىككىسى ساپ مەۋھۇم سان بولسا، z نى تېپىڭ.

3. $z_1=5+10i$، $z_2=3-4i$، $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، z نى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. $(1+2i)\bar{z}=4+3i$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، z ۋە $\frac{z}{\bar{z}}$ نى تېپىڭ.

2. (1) i^1، i^2، i^3، i^4، i^5، i^6، i^7، i^8 لەرنىڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(2) (1) گە ئاساسەن، $i^n(n\in \mathbf{N}^*)$ نىڭ قىممىتىدە قانداق قانۇنىيەت بارلىقىنى قىياس قىلىڭ ھەم بۇ قانۇنىيەتنى ئىپادە بىلەن كۆرسىتىپ بېرىڭ.

3. كومپلېكس سان $z_1=m+(4-m^2)i$ $(m\in \mathbf{R})$، $z_2=2\cos\theta+(\lambda+3\sin\theta)i$ $(\lambda, \theta\in \mathbf{R})$ ھەم $z_1=z_2$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، λ نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسىنى تېپىڭ.

خاتىمە

پارتىيىنىڭ مائارىپ فاڭجېنىنى ئومۇمىيۈزلۈك ئىزچىللاشتۇرۇش ھەمدە دەۋر تەرەققىياتىنىڭ ئېھتىياجىغا ماسلىشىپ، ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆمۈر بويى تەرەققىي قىلىشىغا ئاساس ھازىرلاش ئۈچۈن، مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ھەرقايسى پەنلەر دەرس ئۆلچەملىرى (تەجرىبە نۇسخا) گە ئاساسەن، ھەرقايسى پەنلەرنىڭ ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكلىرىنى تۈزۈپ چىقتۇق، تۈزۈش جەريانىدا مائارىپ ساھەسىدىكى كۆپلىگەن پېشقەدەملەر ۋە ھەرقايسى پەن مۇتەخەسسىسلىرىنىڭ قىزغىن ياردىمى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىشىغا ئېرىشتۇق. ھەرقايسى پەن دەرسلىكلىرى دەرس ئىسلاھاتى تەجرىبە رايونلىرىدىكى ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلار بىلەن ئاخىر يۈز كۆرۈشكەن بۇ پەيتتە، دەرسلىكلەرنىڭ باش مەسلىھەتچىسى بولغان دىڭ شىسۈن، شۈ جيالۇ، يې جىشەن، گۇ مىڭيۈەن، لۇ شىڭۋېي، ۋاڭ زىكۈن، لياڭ خېڭ، جىن چۇڭجى، بەي چۈنلى، تاۋ شىپىڭ قاتارلىق يولداشلارغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا دەرسلىك تۈزۈشكە يېتەكچىلىك قىلىش كومىتېتىنىڭ مۇدىرى يولداش ليۇ بىن ۋە كومىتېت ئەزالىرى جياڭ لەنشېڭ، لى جىلىن، ياڭ خۇەنمىڭ، گۇ لىڭيۈەن، يۈەن خاڭپېي قاتارلىق يولداشلارغىمۇ مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

مائارىپ مىنىستىرلىكى بېكىتكەن «ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمى (تەجرىبە نۇسخا)» گە ئاساسەن، بىز بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتىدىكى پروفېسسور ليۇ شاۋشۆنى باش تۈزگۈچىلىككە تەكلىپ قىلىپ، تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ئۆلچىمىنى تەتقىق قىلىپ تۈزۈش گۇرۇپپىسىدىكى بىر قىسىم ئەزالار، ئالىي مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرى، ماتېماتىكا تەلىم ـ تەربىيە نەزەرىيىسى خىزمەت خادىملىرى، ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا ئوقۇتۇش تەتقىقاتى خادىملىرى ۋە ماتېماتىكا ئوقۇتقۇچىلىرىدىن تۈزۈش كومىتېتى تەشكىللەپ، بۇ بىر يۈرۈش ماتېماتىكا تەجرىبە دەرسلىكىنى تۈزۈپ چىقتۇق. بۇ يەردە، بېيجىڭ پېداگوگىكا ئۇنىۋېرسىتېتى ماتېماتىكا پېنى ئىنستىتۇتى رەھبەرلىرىنىڭ بۇ بىر يۈرۈش دەرسلىكنى تۈزۈش خىزمىتىگە يۈكسەك ئەھمىيەت بەرگەنلىكى ۋە زور كۈچ بىلەن قوللىغانلىقىغا ئالاھىدە رەھمەت ئېيتىمىز، شۇنداقلا مۇشۇ بىر يۈرۈش دەرسلىككە تۈزىتىش پىكرى بەرگەن ۋە ياردىمىنى ئايىمىغان مۇتەخەسسىس، ئالىم، ئوقۇتقۇچى ھەمدە جەمئىيەتنىڭ ھەرقايسى ساھەلىرىدىكى دوستلارغا مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز.

بۇ قىسىم دەرسلىك تۈزۈش كومىتېتىدىكى بارلىق ئەزالارنىڭ كوللېكتىپ ئەقىل ـ پاراسىتىنىڭ نەتىجىسىدۇر. دەرسلىكتە بېرىلگەن ئاساسلىق تۈزگۈچىلەردىن سىرت، بۇ قىسىم دەرسلىكنى مۇزاكىرە قىلىشقا قاتناشقانلاردىن ليۇ شاۋشۆ، ليۇ يىجۇ، تيەن زەيجىن، لى جيەنخۇا، جاڭ ۋېيجو قاتارلىقلار بار.

بىز يەنە مۇشۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىۋاتقان ئوقۇتقۇچى، ئوقۇغۇچىلارغىمۇ رەھمەت ئېيتىمىز. سىلەرنىڭ بۇ بىر يۈرۈش ئوقۇتۇش ماتېرىيالىنى ئىشلىتىش جەريانىدا پىكىر ۋە تەكلىپلەرنى بىزگە ئۆز ۋاقتىدا يەتكۈزۈپ بېرىشىڭلارنى ئۈمىد قىلىمىز، شۇنداقلا سىلەرگە چوڭقۇر مىننەتدارلىق بىلدۈرىمىز. ھەممىيلەن قول تۇتۇشۇپ ئوقۇتۇش ماتېرىيالى قۇرۇلۇش خىزمىتىنى بىرلىكتە ئورۇندايلى.

ئالاقىلىشىش شەكلى:

Tel: (010) 58758330
E－mail: jcfk@pep.com.cn   lilc@pep.com.cn

خەلق مائارىپ نەشرىياتى   دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ئورنى
ئوتتۇرا مەكتەپ ماتېماتىكا دەرس ۋە ئوقۇتۇش ماتېرىيالى تەتقىقات ـ ئېچىش مەركىزى