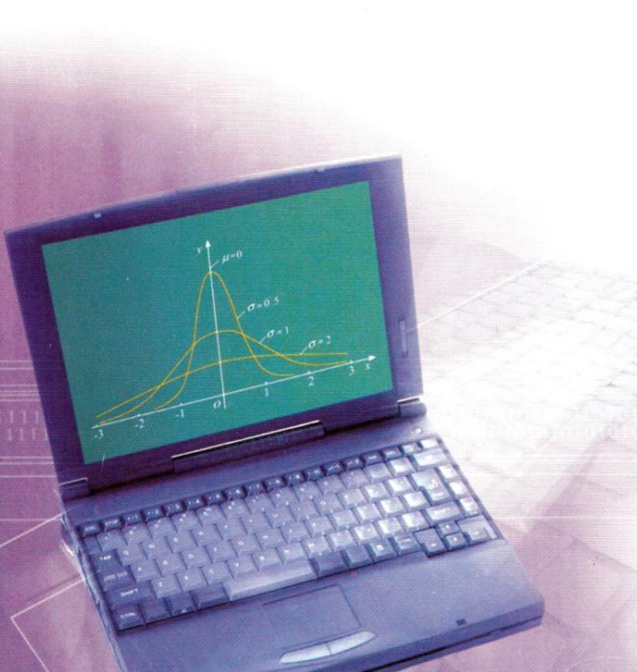
2005 ـ يىلى مەملىكەتلىك ئوتتۇرا، باشلانغۇچ مەكتەپ ئوقۇتۇش ماتېرىياللىرىنى
تەكشۈرۈپ بېكىتىش كومىتېتىنىڭ دەسلەپكى تەكشۈرۈشىدىن ئۆتكەن

ئادەتتىكى تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپ دەرس ئۆلچىمى تەجرىبە دەرسلىكى

ماتېماتىكا

تاللىما دەرسلىك 2-3



شىنجاڭ مائارىپ نەشرىياتى

مۇندەرىجە

1 ـ باب. ساناش پرىنسىپى 1

1 ـ 1. تۇر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى 2

ئىزدىنىش ۋە بايقاش   قىسمىي توپلامنىڭ سانى قانچە؟ 13

1 ـ 2. ئورۇنلاشتۇرۇش ۋە گۇرۇپپىلاش 16

ئىزدىنىش ۋە بايقاش   گۇرۇپپىلاش سانىنىڭ ئىككى خۇسۇسىيىتى 31

1 ـ 3. ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى 35

ئىزدىنىش ۋە بايقاش   «ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى» دىكى بەزى سىرلار 42

خۇلاسە 46

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىللىرى 49

2 ـ باب. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىماتى 53

2 ـ 1. دىسكرىت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى 54

2 ـ 2. ئىككى ئەزالىق تەقسىماتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى ... 62

ئىزدىنىش ۋە بايقاش ئىككى ئەزالىق تەقسىماتقا بويسۇنىدىغان تا-
سادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار قانداق قىممەت ئالغاندا ئېھ-
تىماللىق ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟ 70

2 ـ 3. دىسكرىت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار-
نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىسى ... 73

2 ـ 4. نورمال تەقسىمات 84

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى μ، σ نىڭ نورمال
تەقسىماتقا تەسىرى 89

خۇلاسە 91

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى 93

3 ـ باب. ستاتىستىكىغا دائىر ئۆرنەك مىساللار 95

3 ـ 1. رېگرېسسىيە تەھلىلىنىڭ ئاساسىي ئىدىيىسى ۋە
ئۇنىڭ دەسلەپكى قوللىنىلىشى 96

3 ـ 2. مۇستەقىللىق تەكشۈرۈشىنىڭ ئاساسىي ئىدىيىسى
ۋە ئۇنىڭ دەسلەپكى قوللىنىلىشى 109

پراكتىكا تاپشۇرۇقى 118

خۇلاسە 119

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى 120

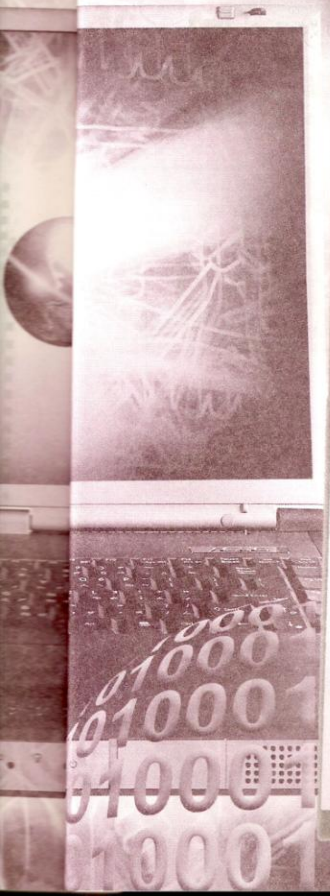
1 - باب

ساناش پرىنسىپى

1.1 تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى

2.1 ئورۇنلاشتۇرۇش ۋە گۇرۇپپىلاش

3.1 ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى



ئاپتوموبىل نومۇرى ئادەتتە 26 ئىنگلىزچە ھەرپ ۋە 10 ئەرەب رەقىمى ئىچىدىكى بىرقانچىسىنى مۇۋاپىق تەرتىپ بويىچە تىزىش ئارقىلىق ھاسىل قىلىنىدۇ. ئائىلە ئاپتوموبىللىرىنىڭ سانى كىشىلەرنىڭ تۇرمۇش سەۋىيىسىنىڭ يۇقىرى كۆتۈرۈلۈشىگە ئەگىشىپ تېز ئېشىپ بېرىۋاتقانلىقى ئۈچۈن، ئاپتوموبىل نومۇرىنى كېڭەيتىش نۆۋەتتىكى زۆرۈر ئىش بولۇپ قالدى. بۇنىڭدىن باشقا، نۇرغۇن ئاپتوموبىل ئىگىلىرى نومۇرنى «خاسلاشتۇرۇش» نى ئارزۇ قىلىدۇ. ئۇنداق بولسا، قاتناش باشقۇرۇش تارماقلىرى ئاپتوموبىل نومۇرلىرىنى ھاسىل قىلىش ئۇسۇلىنى قانداق بېكىتسە، ئاندىن ئاممىنىڭ ئېھتىياجىنى قاندۇرالايدۇ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، مەلۇم خىل ئاپتوموبىل نومۇرى ھاسىل قىلىش لايىھىسىدىكى مۇمكىن بولغان بارلىق نومۇرلارنىڭ سانىنى «ساناپ چىقىش» قا توغرا كېلىدۇ، مانا بۇ ساناش. كۈندىلىك تۇرمۇش ۋە ئىشلەپچىقىرىشتا بۇنىڭغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان ساناش مەسىلىلىرى كۆپلەپ مەۋجۇت. مەسىلەن، كىچىك بالىلار ئويۇنچۇقلىرىنىڭ سانىنى بىر - بىرلەپ ساناش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلايدۇ؛ مەكتەپ سىنىپلار ئارا ۋاسكېتبول مۇسابىقىسى ئۆتكۈزمەكچى بولغاندا، مۇسابىقە تۈزۈمى بېكىتىلگەندىن كېيىن، تەنتەربىيە گۇرۇپپىسىدىكى ئوقۇتقۇچىلار جەمئىي قانچە مەيدان مۇسابىقە ئېلىپ بېرىلىدىغانلىقىنى ھېسابلاپ باقىدۇ؛ قىزىل، سېرىق، يېشىل رەڭلىك ئۈچ بايراقتىن دېڭىز قاتنىشى سىگنالى ھاسىل قىلىشتا، بۇ ئۈچ خىل رەڭدىكى بايراقلارنى ھەر خىل تىزىش ئارقىلىق ئوخشاش بولمىغان سىگناللار ئىپادىلەنسە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە خىل سىگنال ھاسىل قىلىشقا بولىدۇ؟ ... دېگەندەك مەسىلىلەر.

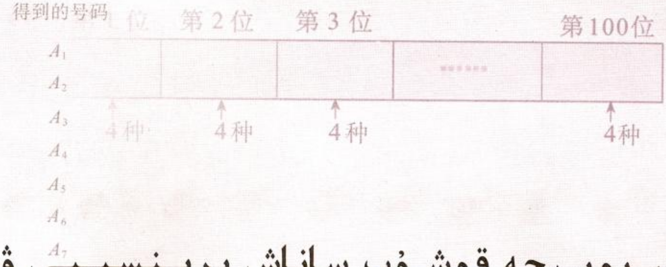
بارلىق مۇمكىنچىلىكلەرنى بىر - بىرلەپ كۆرسىتىش ئۇسۇلى، يەنى بىر - بىرلەپ ساناش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ كېرەكلىك بولغان ساننى تاپقىلى بولسىمۇ، ئەمما بۇ سان بەك چوڭ بولغاندا، بىر - بىرلەپ كۆرسىتىش ئۇسۇلىنى ئەمەلىي بېجىرىش تولىمۇ تەس بولىدۇ. بۇ ساننى قانداق قىلىپ بىر - بىرلەپ سانىماي تۇرۇپ ئېنىقلاش دەل بىز مۇشۇ بابتا كۆڭۈل بۆلىدىغان مەسىلىدۇر.

بىز باشلانغۇچ مەكتەپتە قوشۇش ۋە كۆپەيتىش ئەمەللىرىنى ئۆگەنگەندۇق، بۇ، بىرقانچە «كىچىك» ساننى «چوڭراق» سانغا بىرلەشتۈرۈشتىكى ئەڭ ئاساسىي ماھارەت بولۇپ، بۇ خىل ماھارەتنى كېڭەيتىش ئارقىلىق مۇشۇ بابتا ئۆگىنىدىغان تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىنى بارلىققا كەلتۈرگىلى بولىدۇ، بۇ ئىككى پرىنسىپ ساناش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشنىڭ ئەڭ ئاساسىي، ئەڭ مۇھىم ئىككى ئۇسۇلى ھېسابلىنىدۇ. بىز بۇ ئىككى ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ئىككى تۈرلۈك ئالاھىدە ساناش مەسىلىسىنى ھەل قىلىشنىڭ ساناش فورمۇلىسى، يەنى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسى ۋە گۇرۇپپىلاش سانى فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز ھەمدە بۇ ئىككى فورمۇلىدىن پايدىلىنىپ بەزى ساناش مەسىلىلىرىنى ئاسان ھەل قىلالايمىز. ساناش پرىنسىپى ۋە ساناش فورمۇلىسىنىڭ قوللىنىلىشى سۈپىتىدە، بىز بۇ بابتا ماتېماتىكىدا كەڭ قوللىنىلىدىغان ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىنى ئۆگىنىمىز.

1

رىبونۇكلېئىك كىسلاتا (RNA) مولېكۇلىسى
ئىشقار رادىكاللىرىنىڭ بەلگىلىك تەرتىپ بويىـ
چە تىزىلىشىدىن ھاسىل بولىدۇ. مەلۇم بولۇشىـ
چە، ئىشقار رادىكالىدىن 4 خىلى بار بولۇپ، يۈز-
لىگەن، مىڭلىغان ئىشقار رادىكاللىرىدىن ھاسىل
بولغان RNA مولېكۇلىسىنىڭ خىل سانى ئىنتايىن
كۆپ ئىكەن، بۇ خىل سانىنىڭ قانداق ھېـ
سابلاپ چىقىلغانلىقىنى بىلەمسىز؟

كومپيۇتېردا ھەرپ ـ بەلگىـ
لەر ئىككىلىك سىستېمىسى بىلەن
ئىپادىلىنىدۇ. ئىنگلىزچە ھەرپ بىـ
لەن خەنزۇچە خەت ئۇچۇن ئىشلىتىـ
لىدىغان بايت سانلىرى ئوخشاش
بولمايدۇ، بۇنىڭ سەۋەبى نېمە؟



1-1 تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى

مۇلاھىزە؟

سىنىپتىكى ئورۇنلارغا بىر ئىنگلىزچە چوڭ ھەرپ ياكى بىر ئەرەب رەقىمى بىلەن نومۇر قويساق، ئوخشاش بولمىغان نومۇردىن جەمئىي قانچىنى قويغىلى بولىدۇ؟

جەمئىي 26 ئىنگلىزچە ھەرپ، 0 دىن 9 غىچە جەمئىي 10 ئەرەب رەقىمى بار، شۇڭا ئوخشاش بولمىغان نومۇردىن جەمئىي

$$26+10=36$$

نى قويغىلى بولىدۇ.

ئىزدىنىش

بۇ مەسىلىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

سىز تۇرمۇشتىن مۇشۇنىڭغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان مىساللارنى كەلتۈرەلەمسىز؟

يۇقىرىقى مەسىلىنىڭ ئەڭ مۇھىم ئالاھىدىلىكى «ياكى» سۆزىنىڭ كۆرۈلگەنلىكىدە ئىپادىلىنىدۇ، يەنى ھەربىر ئورۇنغا بىر ئىنگلىزچە ھەرپ بىلەن ياكى بىر ئەرەب رەقىمى بىلەن نومۇر قويۇشقا بولىدۇ. ئىنگلىزچە ھەرپلەر بىلەن ئەرەب رەقەملىرى ئوخشاش بولمىغانلىقى ئۈچۈن، ئىنگلىزچە ھەرپتىن پايدىلىنىپ قويۇلغان نومۇرلار بىلەن ئەرەب رەقەمىدىن پايدىلىنىپ قويۇلغان نومۇرلارمۇ ئوخشاش بولمايدۇ.

ئومۇمەن، تۆۋەندىكىدەك پرىنسىپ مەۋجۇت:

تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى **بىر ئىشنى تاماملاشتا ئوخشاش بولمىغان ئىككى تۈرلۈك لايىھە[1] بار بولۇپ، 1-نچى تۈرلۈك لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان m خىل ئۇسۇل، 2-نچى تۈرلۈك لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان n خىل ئۇسۇل بار بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىشنى تاماملاشتا ئوخشاش بولمىغان**

$$N=m+n$$

خىل ئۇسۇل بار بولىدۇ.

[1] ئوخشاش بولمىغان ئىككى تۈرلۈك لايىھەدىكى ئۇسۇللار ئوخشاش ئەمەس.

1 ـ مىسال. تولۇق ئوتتۇرا مەكتەپنى پۈتكۈزگەن بىر ئوقۇغۇچى ئالىي مەكتەپكە ئىمتىھان بېرىش ئارزۇ ئانكېتىنى تولدۇرغاندا، A، B ئىككى ئۇنىۋېرسىتېتنىڭ ھەربىرىدە ئۆزى قىزىقىدىغان كۆچلۈك تۈر كەسىپلىرىنىڭ بارلىقىنى ئېنىقلىغان، كونكرېت ئەھۋال تۆۋەندىكىدەك:

A ئۇنىۋېرسىتېت	B ئۇنىۋېرسىتېت
بىئولوگىيە	ماتېماتىكا
خىمىيە	بوغالتىرلىق ئىلمى
تېبببي ئىلىم	ئۇچۇر تېخنىكىسى
فىزىكا	قانۇن ئىلمى
بىناكارلىق	

بۇ ئوقۇغۇچىنىڭ بىرلا كەسىپنى تاللىشىغا يول قويۇلسا، ئۇنىڭ قانچە خىل تاللىشى بار؟

تەھلىل: بۇ ئوقۇغۇچى A، B ئىككى ئۇنىۋېرسىتېتنىڭ بىرىنىلا ھەمدە كەسىپتىنمۇ پەقەت بىرىنىلا تاللىيالايدىغانلىقى، شۇنداقلا ئىككى ئۇنىۋېرسىتېتتا ئورتاق كۆچلۈك تۈر كەسىپى بولمىغانلىقى ئۈچۈن، بۇ مەسىلە تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىنىڭ شەرتىگە ئۇيغۇن كېلىدۇ.

يېشىش: بۇ ئوقۇغۇچى A، B ئىككى ئۇنىۋېرسىتېتنىڭ بىرىنى تاللىسا بولىدۇ. A ئۇنىۋېرسىتېتتا 5 خىل كەسىپ تاللاش ئۇسۇلى، B ئۇنىۋېرسىتېتتا 4 خىل كەسىپ تاللاش ئۇسۇلى بار بولۇپ، ئىككى ئۇنىۋېرسىتېتتا بىرەر ئورتاق كۆچلۈك تۈر كەسىپى بولمىغانلىقتىن، تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، بۇ ئوقۇغۇچىنىڭ مۇمكىن بولغان كەسىپ تاللىشى جەمئىي:

$5+4=9$ (خىل).

ئىزدىنىش

بىر ئىشنى ئورۇنداشتا ئوخشاش بولمىغان ئۈچ تۈرلۈك لايىھە بار بولۇپ، 1 ـ لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان m_1 خىل ئۇسۇل، 2 ـ لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان m_2 خىل ئۇسۇل، 3 ـ لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان m_3 خىل ئۇسۇل بار بولسا، بۇ ئىشنى ئورۇنداشتا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئۇسۇل بار؟

بىر ئىشنى ئورۇنداشتا ئوخشاش بولمىغان n تۈرلۈك لايىھە بار بولۇپ، ھەربىر لايىھەدە ئوخشاش بولمىغان بىرقانچە خىل ئۇسۇل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىشنى ئورۇنداشتىكى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللارنىڭ خىل سانىنى قانداق ساناش كېرەك؟

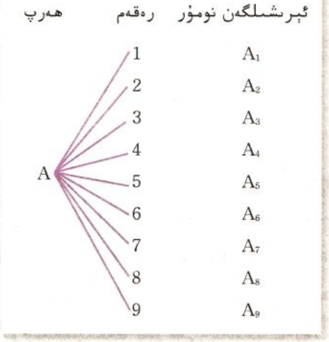
مۇلاھىزە ؟

ئىنگلىزچە ئالدىنقى 6 چوڭ ھەرپ ۋە 1 دىن 9 غىچە توققۇز ئەرەب رەقىمىدىن پايدىلىنىپ، سىنىپتىكى ئورۇنلارغا A_1، A_2، ⋯، B_1، B_2، ⋯ دېگەن شەكىل بويىچە نومۇر قويساق، ئوخشاش بولمىغان نومۇردىن جەمئىي قانچىنى قويغىلى بولىدۇ؟

بۇ مەسىلە ئالدىنقى مەسىلىگە ئوخشمايدۇ. ئالدىنقى مەسىلىدە، 26 ئىنگلىزچە ھەرپ ئىچىدىكى خالىغان بىرى ياكى 10 ئەرەب رەقىمى ئىچىدىكى خالىغان بىرىدىن پايدىلىنىپ بىر ئورۇن نومۇرىنى بەل-

گىلىگىلى بولىدۇ. ھالبۇكى، ھازىرقى بۇ مەسىلىدە نومۇر چوقۇم بىر ئىنگلىزچە ھەرپ ۋە ئىندىكس سۈپىتىدىكى بىر ئەرەب رەقىمىدىن تەركىب تېپىش، بىر نومۇرغا ئېرىشىشتە چوقۇم ئاۋۋال بىر ئىنگ-لىزچە ھەرپنى بەلگىلىۋېلىش، ئاندىن بىر ئەرەب رەقىمىنى بەلگىلىۋېلىشتىن ئىبارەت ئىككى باسقۇچ باشتىن ئۆتكۈزۈلۈشى كېرەك. 1.1.1 ـ رەسىمدىكى ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ مۇمكىن بولغان بارلىق نو-مۇرلارنى تىزىپ چىقىشقا بولىدۇ.

1.1.1 ـ رەسىمدىكىسى ساناش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشتا كۆپ ئىشلىتىلىدىغان «دەرەخسىمان شەكىل»، سىز مۇمكىن بولغان بارلىق نومۇرلارنى دەرەخسىمان شەكىلدىن پايدىلىنىپ تىزىپ چىقالامسىز؟



1.1.1 ـ رەسىم

يەنە تۆۋەندىكىدەك مۇلاھىزە يۈرگۈزسەكمۇ بولىدۇ:

ئىنگلىزچە ئالدىنقى 6 چوڭ ھەرپ ئىچىدىكى خالىغان بىرى بىلەن 9 رەقەم ئىچىدىكى خالىغان بىرىدىن بىر نومۇر ھاسىل بولىدىغانلىقى ھەمدە ئۇلار ئۆزئارا ئوخشاش بولمايدىغانلىقى ئۈچۈن، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي

$$6\times 9=54$$

نومۇر بولىدۇ.

ئىزدىنىش

بۇ مەسىلىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

يۇقىرىقى مەسىلىنىڭ ئەڭ مۇھىم ئالاھىدىلىكى «ۋە» سۆزىنىڭ كۆرۈلگەنلىكىدە ئىپادىلىنىدۇ، يەنى ھەربىر نومۇر بىر ئىنگلىزچە ھەرپ ۋە بىر ئەرەب رەقىمىدىن تەركىب تاپىدۇ، ھەربىر ئىنگلىزچە ھەرپ بىلەن ئوخشاش بولمىغان رەقەملەردىن ھاسىل بولغان نومۇرلار ئوخشاش بولمايدۇ.

ئومۇمەن، تۆۋەندىكىدەك پرىنسىپ مەۋجۇت:

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى بىر ئىشنى ئىككى باسقۇچ بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ ❶، 1 ـ باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان m خىل ئۇسۇل، 2 ـ باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان n خىل ئۇسۇل بار بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىشنى ئورۇنداشتا ئوخشاش بولمىغان جەمئىي

$$N=m\times n$$

خىل ئۇسۇل بار.

❶ 1 ـ باسقۇچتا قايسى خىل ئۇسۇل قوللىنىلىشىدىن قەتئىينەزەر، 2 ـ باسقۇچتىكى ئۇسۇلنىڭ تاللىنىلىشىغا تەسىر كۆرسەتمەيدۇ.

2 ـ مىسال. مەلۇم سىنىپتا 30 ئوغۇل ئوقۇغۇچى، 24 قىز ئوقۇغۇچى بار. بۇ سىنىپتىن بىر ئوغۇل ئوقۇغۇچى ۋە بىر قىز ئوقۇغۇچىنى تاللاپ سىنىپقا ۋاكالىتەن مۇسابىقىگە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

تەھلىل: مۇسابىقىگە قاتنىشىدىغان ئىككى ۋەكىلنى تاللاشنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ، 1 ـ باسقۇچتا ئوغۇل ئوقۇغۇچىنى تاللايمىز، 2 ـ باسقۇچتا قىز ئوقۇغۇچىنى تاللايمىز.

يېشىش: 1 ـ باسقۇچتا، 30 ئوغۇل ئوقۇغۇچى ئىچىدىن بىرىنى تاللايمىز، بۇنىڭدا ئوخشاش بولمىغان 30 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛ 2 ـ باسقۇچتا، 24 قىز ئوقۇغۇچى ئىچىدىن بىرىنى تاللايمىز، بۇنىڭدا ئوخشاش بولمىغان 24 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي

$$30\times 24=720$$

خىل ئۇسۇل بار.

ئىزدىنىش

بىر ئىشنى ئۈچ باسقۇچ بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ. 1 ـ باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان m_1 خىل ئۇسۇل، 2 ـ باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان m_2 خىل ئۇسۇل، 3 ـ باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان m_3 خىل ئۇسۇل بار بولسا، بۇ ئىشنى ئورۇنداشتا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئۇسۇل بار؟

بىر ئىشنى n باسقۇچ بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ. ئەگەر ھەربىر باسقۇچتا ئوخشاش بولمىغان بىرقانچە خىل ئۇسۇل بولسا، ئۇ ھالدا بۇ ئىشنى ئورۇنداشتىكى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللارنىڭ خىل سانىنى قانداق ساناش كېرەك؟

3 ـ مىسال. كىتاب جازىسىنىڭ 1 ـ قەۋىتىدە ئوخشاش بولمىغان 4 پارچە كومپيۇتېر كىتابى، 2 ـ قەۋىتىدە ئوخشاش بولمىغان 3 پارچە ئەدەبىيات ـ سەنئەت كىتابى، 3 ـ قەۋىتىدە ئوخشاش بولمىغان 2 پارچە تەنتەربىيە كىتابى بار.

(1) كىتاب جازىسىدىن خالىغان 1 پارچە كىتابنى ئېلىشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئېلىش ئۇسۇلى بار؟

(2) كىتاب جازىسىنىڭ ھەربىر قەۋىتىدىن 1 پارچە كىتابنى ئېلىشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئېلىش ئۇسۇلى بار؟

يېشىش: (1) كىتاب جازىسىدىن خالىغان 1 پارچە كىتابنى ئېلىشنىڭ 3 تۈرلۈك ئۇسۇلى بار: 1 ـ تۈرلۈك ئۇسۇلدا، 1 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە كومپيۇتېر كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 4 خىل ئۇسۇل بار؛ 2 ـ تۈرلۈك ئۇسۇلدا، 2 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە ئەدەبىيات ـ سەنئەت كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 3 خىل ئۇسۇل بار؛ 3 ـ تۈرلۈك ئۇسۇلدا، 3 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە تەنتەربىيە كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل ئۇسۇل بار. تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$N=m_1+m_2+m_3=4+3+2=9;$$

(2) كىتاب جازىسىنىڭ ھەربىر قەۋىتىدىن 1 پارچە كىتاب ئېلىشنى 3 باسقۇچ بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ: 1 ـ باسقۇچتا، 1 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە كومپيۇتېر كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 4 خىل ئۇسۇل

بار؛ 2 ـ باسقۇچتا، 2 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە ئەدەبىيات ـ سەنئەت كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 3 خىل ئۇسۇل بار؛ 3 ـ باسقۇچتا، 3 ـ قەۋەتتىن 1 پارچە تەنتەربىيە كىتابىنى ئالىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل ئۇسۇل بار. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$N=m_1\times m_2\times m_3=4\times3\times2=24.$$

4 ـ مىسال. A، B، C دىن ئىبارەت 3 پارچە رەسىم ئىچىدىن 2 پارچىسىنى تاللاپ، ئۇلارنى ئايرىم ـ ئايرىم تامنىڭ ئوڭ ـ سول ئىككى تەرىپىدىكى كۆرسىتىلگەن جايغا ئېسىپ قويۇشتا، جەمئىي ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئېسىش ئۇسۇلى بار؟

يېشىش: 3 پارچە رەسىم ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ تامنىڭ ئوڭ ـ سول ئىككى تەرىپىگە ئېسىشنى 2 باسقۇچ بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ: 1 ـ باسقۇچتا، 3 پارچە رەسىم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ تامنىڭ سول تەرىپىگە ئاسىمىز، بۇنىڭدا 3 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛ 2 ـ باسقۇچتا، قېپقالغان 2 پارچە رەسىم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ، تامنىڭ ئوڭ تەرىپىگە ئاسىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئوخشاش بولمىغان ئېسىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$N=3\times2=6.$$

6 خىل ئېسىش ئۇسۇلىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

سول تەرەپ	ئوڭ تەرەپ	ئېرىشىلگەن ئېسىش ئۇسۇلى
A	B	سول A ئوڭ B
	C	سول A ئوڭ C
B	A	سول B ئوڭ A
	C	سول B ئوڭ C
C	A	سول C ئوڭ A
	B	سول C ئوڭ B

تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى بىلەن باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىنىڭ ھەر ئىككىسىدە بىر ئىشنى ئورۇنداشتىكى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللارنىڭ خىل سانى مەسىلىسىگە جاۋاب بېرىلىدۇ. ئۇلارنىڭ پەرقى شۇكى، تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى «تۈرگە ئايرىلىدىغان» مەسىلىلەرگە قارىتىلىدۇ، ئۇنىڭدىكى ھەر خىل ئۇسۇللار ئۆزئارا مۇستەقىل بولۇپ، بۇ ئىشنى مۇشۇ ئۇسۇللارنىڭ خالىغان بىرى بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ؛ باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى «باسقۇچقا بۆلۈنگەن» مەسىلىلەرگە قارىتىلىدۇ، ھەرقايسى باسقۇچلاردىكى ئۇسۇللار ئۆزئارا بېقىنىش مۇناسىۋىتىدە بولۇپ، ھەممە باسقۇچلارنى تاماملاپ بولغاندىلا ئاندىن بۇ ئىش ئورۇندالغان بولىدۇ.

مەشىق

1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) بىر ئىشنى 2 خىل ئۇسۇل بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ، 5 ئادەم پەقەت 1 ـ ئۇسۇلنىلا بىلىدۇ، يەنە 4 ئادەم پەقەت 2 ـ ئۇسۇلنىلا بىلىدۇ. بۇ 9 ئادەم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ بۇ ئىشنى ئورۇنداشتا، ئوخشاش بولمىغان تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ______؛

(2). A كەنتتىن B كەنتكە بارىدىغان 3 يول، B كەنتتىن C كەنتكە بارىدىغان 2 يول بار. A كەنتتىن B كەنتكە بېرىپ، ئاندىن C كەنتكە بېرىشتا، ئوخشاش بولمىغان مېڭىش يوللىرىنىڭ سانى ________ .

2. تولۇق ئوتتۇرا 1 ـ يىللىقتىن 3 ئوقۇغۇچى، تولۇق ئوتتۇرا 2 ـ يىللىقتىن 5 ئوقۇغۇچى، تولۇق ئوتتۇرا 3 ـ يىللىقتىن 4 ئوقۇغۇچى بار.

(1) بۇ ئوقۇغۇچىلار ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ سىرتتىن كەلگەن مېهمانلارنى كۈتۈشكە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

(2) هەربىر يىللىقتىن 1 ئوقۇغۇچىنى تاللاپ سىرتتىن كەلگەن مېهمانلارنى كۈتۈشكە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئۇسۇل بار؟

3. دەرسلىكتە كەلتۈرۈلگەن 1 ـ ئۈلگە مىسالدا، ئەگەر ماتېماتىكىمۇ A ئۇنىۋېرسىتېتنىڭ كۈچلۈك تۈر كەسپى بولسا، ئۇ هالدا A ئۇنىۋېرسىتېتتىن 6 كەسپنى، B ئۇنىۋېرسىتېتتىن 4 كەسپنى تاللاشقا بولىدۇ. تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسلانساق، بۇ ئوقۇغۇچىنىڭ مۇمكىن بولغان كەسپ تاللىشى جەمئىي

$$6+4=10$$

خىل بولىدۇ. بۇنداق هېسابلاشتا مەسىلە بارمۇ؟

5 ـ مىسال. پروگراممىا بۆلەكلىرىگە ئىسىم قويۇشتا 3 هەرپ ـ بەلگە ئىشلىتىلىدۇ. بۇنىڭدىكى باش هەرپ ـ بەلگىگە $A\sim G$ غىچە ياكى $U\sim Z$ غىچە بولغان هەرپلەرنى ئىشلىتىش، كېيىنكى ئىككىسىگە $1\sim 9$ غىچە بولغان رەقەملەرنى ئىشلىتىش تەلەپ قىلىنسا، ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچە پروگراممىغا ئىسىم قويغىلى بولىدۇ؟

تەهلىل: بىر پروگراممىا بۆلىكىگە ئىسىم قويۇشنى ئۈچ باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ: 1 ـ باسقۇچتا، باش هەرپ ـ بەلگىنى تاللايمىز؛ 2 ـ باسقۇچتا، ئارىدىكى هەرپ ـ بەلگىنى تاللايمىز؛ 3 ـ باسقۇچتا، ئاخىرىدىكى هەرپ ـ بەلگىنى تاللايمىز. باش هەرپ بەلگىنى يەنە ئىككى تۈرگە ئايرىشقا بولىدۇ.

يېشىش: ئاۋۋال باش هەرپ ـ بەلگىنى تاللاش ئۇسۇلىنى هېسابلايمىز. تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، باش هەرپ ـ بەلگىنى تاللاشتا جەمئىي

$$7+6=13$$

خىل ئۇسۇل بار.

ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللىرىنى ئوتتۇرىغا قويالامسىز؟

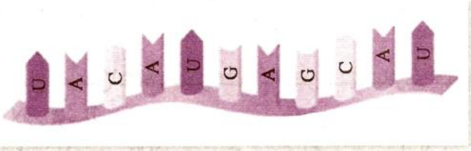
ئاندىن مۇمكىنچىلىكى بار ئوخشاش بولمىغان پروگراممىا ئىسىملىرىنىڭ سانىنى هېسابلايمىز. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئەڭ كۆپ بولغاندا ئوخشاش بولمىغان

$$13\times 9\times 9=1053$$

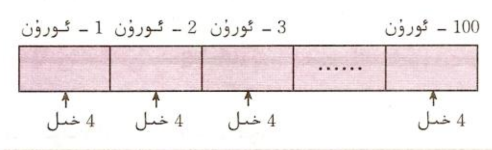
دانە پروگراممىا ئىسمى بولىدۇ، يەنى ئەڭ كۆپ بولغاندا 1053 دانە پروگراممىغا ئىسىم قويغىلى بولىدۇ.

6 ـ مىسال. رىبونۇكلېئىك كىسلاتا (RNA) مولېكۇلىسى جانلىق هۈجەيرىسىدە بايقالغان خىمىيىلىك تەركىب. بىر RNA مولېكۇلىسى دېگىنىمىز نەچچە يۈز، هەتتا نەچچە مىڭ ئورۇنغا ئىگە بىر ئۇزۇن زەنجىر بولۇپ، زەنجىردىكى هەربىر ئورۇننى ئىشقار رادىكالى دەپ ئاتىلىدىغان بىر خىل خىمىيىلىك تەركىب ئىگىلەپ تۇرىدۇ. ئوخشاش بولمىغان ئىشقار رادىكالىدىن جەمئىي 4 خىلى بار، ئۇلار ئايرىم ـ ئايرىم A، C، G، U بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. بىر RNA مولېكۇلىسىدا، هەر خىل ئىشقار رادىكاللىرى خالىغان تەرتىپتە ئوتتۇرىغا چىقالايدۇ، شۇڭا خالىغان بىر ئورۇندىكى ئىشقار رادىكالى بىلەن باشقا ئو-

رونلاردىكى ئىشقار رادىكاللىرى مۇناسىۋەتسىز بولىدۇ. بىر تۈرلۈك RNA مولېكۇلىسى 100 دانە ئىشقار رادىكالىدىن تۈزۈلگەن دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل RNA مولېكۇلىسى بولىدۇ؟



تەھلىل: 100 دانە ئىشقار رادىكالىدىن تۈزۈلگەن ئۇزۇن زەنجىرنى 2.1.1 ـ رەسىم بىلەن ئىپادىلەيلى، بۇ چاغدا زەنجىردە جەمئىي 100 ئورۇن بار بولۇپ، ھەربىر ئورۇننى A، C، G، U ئىچىدىكى خالىغان بىرى ئىگىلىيەلەيدۇ.



2.1.1 ـ رەسىم

$4^{100}\approx1.6\times10^{60}$، بۇ بىر ناھايىتى چوڭ سان. ئەگەر قىزىقىدىغان ساۋاقداشلار بولسا، ئۆزۈڭلار RNA غا مۇناسىۋەتلىك ماتېرىياللارنى تەكشۈرۈپ كۆرۈڭلار.

يېشىش: 2.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، 100 دانە ئىشقار رادىكالىدىن تۈزۈلگەن ئۇزۇن زەنجىردە جەمئىي 100 ئورۇن بار. سولدىن ئوڭغا بولغان تەرتىپ بويىچە كەلگەن ھەربىر ئورۇننى A، C، G، U ئىچىدىكى خالىغان بىرىنى تاللاپ تولدۇرساق، ھەربىر ئورۇننى 4 خىل ئۇسۇل بىلەن تولدۇرۇشقا بولىدۇ. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، بۇ تۈردىكى (يەنى 100 دانە ئىشقار رادىكالىدىن تۈزۈلگەن) مۇمكىنچىلىكى بار ئوخشاش بولمىغان بارلىق RNA مولېكۇلىلىرىنىڭ خىل سانى:

$$\underbrace{4\times4\times\cdots\times4}_{\text{100 دانە 4}}=4^{100}.$$

7 ـ مىسال. ئېلېكترونلۇق ئېلېمېنتتىن پايدىلىنىپ توك يولىنى ئۆتكۈزۈش ۋە ئۈزۈۋېتىش، ئېلېكتر پوتېنسىيالىنى يۇقىرىلىتىش ۋە تۆۋەنلىتىشنى ناھايىتى ئاسان ئىشقا ئاشۇرغىلى بولىدۇ، بۇلار كونترول قىلىش ئەڭ ئاسان بولغان ئىككى خىل ھالەتتۇر. شۇڭا، كومپيۇتېرنىڭ ئىچكى قىسمىدا ھەربىر خانىسىدا 0 ياكى 1 دىن ئىبارەت ئىككى خىل رەقەملا بولغان سان خاتىرىلەش ئۇسۇلى، يەنى ئىككىلىك سىستېمىسى قوللىنىلىدۇ. كومپيۇتېرنى ھەرپ ـ بەلگىلەرنى پەرق ئېتەلەيدىغان قىلىش ئۈچۈن، ھەرپ ـ بەلگىلەرنى كودلاشتۇرۇشقا توغرا كېلىدۇ، كودلاشتۇرۇشتا، ھەربىر ھەرپ ـ بەلگە بىر ياكى بىرقانچە بايت بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، بايت دېگىنىمىز كومپيۇتېردا سانلىق مەلۇمات ساقلاشنىڭ ئەڭ كىچىك ئۆلچەم بىرلىكى بولۇپ، ھەربىر بايت ئىككىلىك سىستېمىدىكى 8 خانىدىن تەركىب تاپىدۇ.

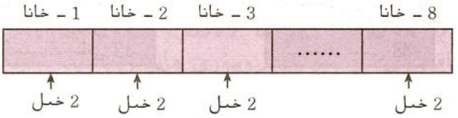
(1) بىر بايت (8 خانا) بىلەن ئەڭ كۆپ بولغاندا ئوخشاش بولمىغان قانچە دانە ھەرپ ـ بەلگىنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ؟

(2) كومپيۇتېردىكى خەنزۇچە خەت خەلقئارا كودى (GB كودى) 6763 دانە خەنزۇچە خەتنى ئۆز

ئىچىگە ئالغان بولۇپ، بىر خەنزۇچە خەت بىر ھەرپ ـ بەلگىگە توغرا كېلىدۇ. بۇ خەنزۇچە خەتلەرنى كودلاشتۇرۇشقا توغرا كەلسە، ھەربىر خەنزۇچە خەتنى كەم دېگەندە قانچە بايت بىلەن ئىپادىلەش كېرەك؟

تەھلىل: ھەربىر بايت ئىككىلىك سىستېمىدىكى 8 خانىدىن تەركىب تېپىپ، ھەربىر خانىدىكى قىممەتكە نىسبەتەن 0، 1 دىن ئىبارەت ئىككى خىل تاللاش بار ھەمدە 0، 1 نىڭ ئوخشاش بولمىغان تەرتىپتە تىزىلىشى ئوخشاش بولمىغان ھەرپ ـ بەلگىنى ئىپادىلەيدىغانلىقى ئۈچۈن، بۇ مەسىلىنى باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ يەشكىلى بولىدۇ.

يېشىش: (1) بىر بايتنى 3.1.1 ـ رەسىم بىلەن ئىپادىلەيلى.



3.1.1 ـ رەسىم

بىر بايت 8 خانىدىن تەركىب تېپىپ، ھەربىر خانىغا نىسبەتەن 2 خىل تاللاش بولغانلىقى ئۈچۈن، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسلانساق، بىر بايت بىلەن ئەڭ كۆپ بولغاندا ئوخشاش بولمىغان

$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^8=256$$

دانە ھەرپ ـ بەلگىنى ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

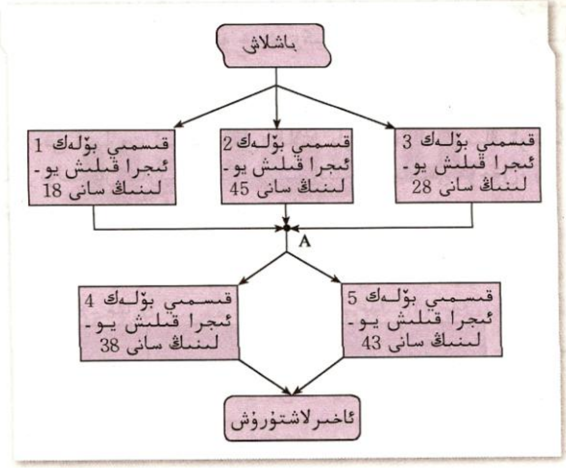
(2) (1) دىن بىلەلەيمىزكى، ئوخشاش بولمىغان 6 763 دانە ھەرپ ـ بەلگىنى بىر بايت بىلەن ئىپادىلىگىلى بولمايدۇ، شۇڭا 2 بايت بىلەن قانچە دانە ھەرپ ـ بەلگىنى ئىپادىلەشكە بولىدىغانلىقىنى مۆلاھىزە قىلىشىمىز كېرەك. ئالدىنقى بىر بايتتا ئوخشاش بولمىغان 256 خىل ئىپادىلەش ئۇسۇلى، كېيىنكى بىر بايتتىمۇ ئوخشاش بولمىغان 256 خىل ئىپادىلەش ئۇسۇلى بولغانلىقى ئۈچۈن، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسلانساق، 2 بايت بىلەن ئوخشاش بولمىغان

$$256\times256=65\,536$$

دانە ھەرپ ـ بەلگىنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ، بۇ سان خەنزۇچە خەت خەلقئارا كودى ئۆز ئىچىگە ئالغان خەنزۇچە خەت سانى 6 763 تىن خېلىلا چوڭ، شۇڭا بۇ خەنزۇچە خەتلەرنى ئىپادىلەشتە، ھەربىر خەنزۇچە خەتنى كەم دېگەندە 2 دانە بايت بىلەن ئىپادىلەش كېرەك.

8 ـ مىسال. كومپيۇتېر پروگرامما خادىملىرى پروگرامما تۈزۈلۈپ بولغاندىن كېيىن ئۇنى سىنايدۇ. قانچىلىك سىناش سانلىق مەلۇماتى بىلەن تەمىنلەشنى بىلىش ئۈچۈن، پروگرامما خادىمى ئىجرا قىلىش يولى (پروگراممىنىڭ «باشلاش» تىن «ئاخىرلاشتۇرۇش» قىچە بولغان يولى) دىن قانچىسى بارلىقىنى بىلىشى كېرەك. 4.1.1 ـ رەسىمدىكىدەك، پروگرامما بۆلىكى نۇرغۇن ئىجرا قىلىش يوللىرىغا ئىگە بولۇپ، ئادەتتە ئۇ كۆپلىگەن قىسمىي بۆلەكلەردىن تەركىب تاپىدۇ. ئۇنداق بولسا، رەسىمدىكى بۇ پروگرامما بۆلىكىدە قانچە ئىجرا قىلىش يولى بار؟

بۇنىڭدىن باشقا، سىناش ۋاقتىنى تېجەش ئۈچۈن، پروگرامما خادىمى سىناش قېتىم سانىنى ئازايتىشنىڭ ئامالىنى قىلىدۇ. پروگرامما خادىمىنىڭ سىناش قېتىم سانىنى ئازايتىشى ئۈچۈن بىر سىناش ئۇسۇلى لايىھىلەپ بېرەلەمسىز؟



4.1.1 ـ رەسىم

تەھلىل: پۇتكۇل پروگىراممىا بۆلىكىدىن خالىغان بىر ئىجرا قىلىش يولىنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ: 1 ـ باسقۇچتا، «باشلاش» تىن A نۇقتىغىچە ئىجرا قىلىمىز؛ 2 ـ باسقۇچتا، A نۇقتىدىن «ئاخىرلاشتۇرۇش» قىچە ئىجرا قىلىمىز. ھالبۇكى، 1 ـ باسقۇچنى قىسمىي بۆلەك 1 ياكى قىسمىي بۆلەك 2 ياكى قىسمىي بۆلەك 3 بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ؛ 2 ـ باسقۇچنى قىسمىي بۆلەك 4 ياكى قىسمىي بۆلەك 5 بىلەن ئورۇنداشقا بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، بىر بۆيرۇقنىڭ پۇتكۇل پروگىراممىا بۆلىكىدىكى ئىجرا قىلىنىش يولىنى تەھلىل قىلىشتا ئىككى ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىشقا توغرا كېلىدۇ.

يېشىش: تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، قىسمىي بۆلەك 1 ياكى قىسمىي بۆلەك 2 ياكى قىسمىي بۆلەك 3 تىكى قىسمىي يوللارنىڭ سانى جەمئىي:

$$18+45+28=91;$$

قىسمىي بۆلەك 4 ياكى قىسمىي بۆلەك 5 تىكى قىسمى يوللارنىڭ سانى جەمئىي:

$$38+43=81.$$

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، پۇتكۇل پروگىراممىا بۆلىكىنىڭ ئىجرا قىلىش يوللىرىنىڭ سانى جەمئىي:

$$91\times81=7\,371.$$

ئەمەلىي سىناش جەريانىدا، پروگىراممىا خادىمى دائىم بىر قىسمىي بۆلەكنى بىر «قارا ساندۇق» دەپ قاراپ، پەقەت قىسمىي بۆلەكنىڭ توغرا ئىجرا قىلىنغان ـ قىلىنمىغانلىقىنى تەكشۈرۈش شەكلى ئارقىلىق پۇتكۇل پروگىراممىا بۆلىكىنى تەكشۈرىدۇ. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئۇ ئالدى بىلەن 5 قىسمىي بۆلەكنى ئايرىم ـ ئايرىم مۇستەقىل سىناپ، ھەربىر قىسمىي بۆلەكنىڭ خىزمىتىنىڭ نورمال بولغان ـ بولمىغانلىقىنى تەكشۈرىدۇ. ئومۇمىي سىناش قېتىم سانى:

$$18+45+28+38+43=172.$$

ئاندىن ھەرقايسى قىسمىي بۆلەكلەر ئارىسىدىكى ئۇچۇر ئالمىشىشىنىڭ نورمال بولغان ـ بولمىغانلىقىنى سىنايدۇ، بۇنىڭ ئۈچۈن، پروگىراممىنىڭ 1 ـ باسقۇچىدىكى قىسمىي بۆلەكلەر بىلەن 2 ـ باسقۇچىدىكى قىسمىي بۆلەكلەر ئارىسىدا ئۇچۇر ئالمىشىشىنىڭ نورمال بولغان ـ بولمىغانلىقى سىنالسىلا بولىدۇ، سىناش قېتىم سانى:

$$3\times2=6.$$

ئەگەر ھەربىر قىسمىي بۆلەكنىڭ خىزمىتىنى نورمال ھەمدە ھەرقايسى قىسمىي بۆلەكلەر ئارىسىدىكى ئۇچۇر ئالمىشىشمۇ نورمال بولسا، ئۇ ھالدا پوتكول پروگراما بۆلىكىنىڭ خىزمىتىمۇ نورمال بولىدۇ. شۇنداق قىلىپ، پوتكول پروگراما بۆلىكىنى سىناش قېتىم سانى:

$$172+6=178$$ (قېتىم).

روشەنكى، 178 بىلەن 7371 نىڭ پەرقى ناھايىتى چوڭ.

سىز پروگراما خادىمىنىڭ سىناش قېتىم سانىنى ئازايتىشنى قانداق قىلىپ ئەمەلگە ئاشۇرغانلىقىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

9 ـ مىسال. مەلۇم شەھەردىكى ئائىلە ئاپتوموبىل سانى كىشىلەر تۇرمۇش سەۋىيىسىنىڭ يۇقىرى كۆتۈرۈلۈشىگە ئەگىشىپ تېز ئېشىپ بارغانلىقى ئۈچۈن، ئاپتوموبىل نومۇرىنى كېڭەيتىشكە توغرا كەلدى. قاتناش باشقۇرۇش تارماقلىرى ئاپتوموبىل نومۇرى ھاسىل قىلىشنىڭ مۇنداق بىر يېڭى ئۇسۇلىنى ئوتتۇرىغا قويدى: ھەربىر ئاپتوموبىل نومۇرىدا چوقۇم تەكرارلانمايدىغان 3 ئىنگلىزچە ھەرپ ۋە تەكرارلانمايدىغان 3 ئەرەب رەقىمى بولۇشى ھەمدە 3 ئىنگلىزچە ھەرپ چوقۇم بىر گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللىنىپ، 3 ئەرەب رەقىمىمۇ چوقۇم بىر گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن شەكىلدە كۆرۈلۈشى كېرەك. بۇ يېڭى ئۇسۇلدىن پايدىلانغاندا جەمئىي قانچە ئاپتوموبىلغا نومۇر قويغىلى بولىدۇ؟

تەھلىل: ئاپتوموبىللارغا مۇشۇ يېڭى ئۇسۇل بويىچە نومۇر قويغاندا، نومۇرلارنى گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن ھەرپلەر سول تەرەپتە بولۇش ۋە ئوڭ تەرەپتە بولۇش دەپ 2 تۈرگە ئايرىشقا بولىدۇ. بىر ئاپتوموبىل نومۇرىدىكى ھەرپ ۋە رەقەملەرنى بەلگىلەشنى 6 باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ.

يېشىش: ئاپتوموبىل نومۇرلىرىنى گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن ھەرپلەر سول تەرەپتە بولىدىغان ۋە ئوڭ تەرەپتە بولىدىغان قىلىپ 2 تۈرگە ئايرىيمىز.

گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن ھەرپلەر سول تەرەپتە بولغاندا، بىر ئاپتوموبىل نومۇرىدىكى ھەرپ ۋە رەقەملەرنى بەلگىلەشنى 6 باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇندايمىز:

1 ـ باسقۇچتا، 26 ھەرپ ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ باش ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 26 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

2 ـ باسقۇچتا، قېپقالغان 25 ھەرپ ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ 2 ـنچى ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 25 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

3 ـ باسقۇچتا، قېپقالغان 24 ھەرپ ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ 3 ـنچى ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 24 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

4 ـ باسقۇچتا، 10 رەقەم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ 4 ـنچى ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 10 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

5 ـ باسقۇچتا، قېپقالغان 9 رەقەم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ 5 ـنچى ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 9 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

6 ـ باسقۇچتا، قېپقالغان 8 رەقەم ئىچىدىن بىرىنى تاللاپ 6 ـنچى ئورۇنغا قويىمىز، بۇنىڭدا 8 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن ھەرپلەر سول تەرەپتە بولىدىغان ئاپتوموبىل نومۇرلىرىنىڭ سانى:

$$26\times25\times24\times10\times9\times8=11\,232\,000.$$

ئوخشاش يول بىلەن، گۇرۇپپا بولۇپ تەشكىللەنگەن ھەرپلەر ئوڭ تەرەپتە بولىدىغان ئاپتوموبىل نومۇرلىرىنىڭ سانىمۇ 11 232 000 بولىدۇ.

شۇڭا، جەمئىي

$$11232000+11232000=22464000$$

ئاپتوموبىلغا نومۇر قويغىلى بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

ساناش مەسىلىلىرىنى تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىش ئۇسۇلىنى يىغىنچاقلىيالامسىز؟

ساناش مەسىلىلىرىنى ئىككى ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلىشتىكى ئەڭ مۇھىم ئىش شۇكى، ھېسابلاشتىن ئىلگىرى ئالدى بىلەن تۈرگە ئايرىش ياكى باسقۇچقا بۆلۈش مەسىلىسى ئۈستىدە ئىنچىكىلىك بىلەن تەھلىل يۈرگۈزۈش كېرەك.

تۈرگە ئايرىشتا «تەكرارلىماسلىق ۋە چۈشۈرۈپ قويماسلىق» نى ئىشقا ئاشۇرۇش كېرەك. تۈرگە ئايرىغاندىن كېيىن، ھەربىر تۈردىكى ئۇسۇللارنىڭ سانىنى ئايرىم ـ ئايرىم سانايمىز، ئاخىرىدا تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ يىغىندىنى تېپىپ، ئومۇمىي سانغا ئېرىشىمىز.

باسقۇچقا بۆلۈشتە «باسقۇچلارنىڭ تولۇق بولۇشى» نى ئىشقا ئاشۇرۇش كېرەك. بارلىق باسقۇچلار تاماملانغاندىن كېيىن، ۋەزىپىمۇ ئورۇندالغان بولىدۇ، بۇنىڭدا باسقۇچ بىلەن باسقۇچنىڭ ئۆزئارا مۇستەقىل بولۇشىغا دىققەت قىلىش كېرەك. باسقۇچقا بۆلگەندىن كېيىن، ھەربىر باسقۇچتىكى ئۇسۇللارنىڭ سانىنى ھېسابلايمىز، ئاخىرىدا باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ھەربىر باسقۇچنى ئورۇنداشتىكى ئۇسۇللار سانىنى كۆپەيتىپ، ئومۇمىي سانغا ئېرىشىمىز.

مۇلاھىزە؟

كۆپەيتىش ئەملى ئالاھىدە شەرت ئاستىدىكى قوشۇش ئەملىنىڭ ئاددىيلاشتۇرۇلۇشى ھېسابلىنىدۇ، ئۇنداق بولسا، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى بىلەن تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ئارىسىدىمۇ بۇنىڭغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان مۇناسىۋەت بارمۇ؟

مەشىق

1. كۆپەيتمە $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ نى يايغاندىن كېيىن، يېيىلمىدا جەمئىي قانچە ئەزا بار؟

2. مەلۇم تېلېفون ئىدارىسىنىڭ باشقۇرۇش دائىرىسىدىكى تېلېفون نومۇرلىرى 8 خانىلىق رەقەمدىن تەركىب تاپقان بولۇپ، ئۇنىڭ ئالدىنقى تۆت خانىسىدىكى رەقەملەر ئۆزگەرمەيدۇ، كېيىنكى تۆت خانىسىدىكى رەقەملەر 0 بىلەن 9 ئارىلىقىدىكى رەقەملەر بولسا، بۇ تېلېفون ئىدارىسىنىڭ باشقۇرۇش دائىرىسىدە ئوخشاش بولمىغان تېلېفون نومۇرىدىن ئەڭ كۆپ بولغاندا قانچىسى بار؟

3. 5 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 1 گۇرۇپپا باشلىقى ۋە 1 مۇئاۋىن گۇرۇپپا باشلىقى تاللاشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

4. مەلۇم سودا سارىيىنىڭ 6 ئىشىكى بار. بىر ئادەم سودا سارىيىنىڭ خالىغان بىر ئىشىكىدىن كىرىپ، باشقا بىر ئىشىكىدىن چىقىپ كەتمەكچى بولسا، ئۇنىڭ سودا سارىيىغا كىرىپ ـ چىقىشىدا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئۇسۇل بار؟

قىسمىي توپلامنىڭ سانى قانچە؟

مەسىلە n ئېلېمېنتلىق توپلام $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ نىڭ قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانى قانچە؟

بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىشتا يولغا قويۇشقا بولىدىغان بىر پىكىر يولى مۇنداق: ئالدى بىلەن بەزى كونكرېت توپلاملار، مەسىلەن، $S=\{a_1, a_2, a_3\}$ نىڭ قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانىنى تەتقىق قىلىپ، بۇنىڭدىن ئىلھام ئېلىش ئاساسىدا ئومۇمىي ئەھۋال ئۈستىدە مۇھاكىمە ئېلىپ بېرىش.

S تا 3 لا ئېلېمېنت بولغانلىقى ئۈچۈن، ئۇنىڭ بارلىق قىسمىي توپلاملىرىنى بىر - بىرلەپ كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ يېزىپ چىقالايمىز:

$$\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\},\{a_2, a_3\}, S.$$

شۇڭا، 3 ئېلېمېنتنى ئۆز ئىچىگە ئالغان توپلامنىڭ قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانى جەمئىي 8.

بىر توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرىنىڭ سانى ئازراق بولغاندا، ئۇنىڭ قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانىنى بىر - بىرلەپ كۆرسىتىش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئېنىقلاشقا بولىدۇ. لېكىن، توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرىنىڭ سانى بىرقەدەر كۆپ بولغاندا، ئۇنىڭ قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانىنى بۇ ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئېنىقلاش قولايسىز بولۇپ قالىدۇ. ئۇنىڭدىن باشقا، يۇقىرىقى باياندىن 3 بىلەن 8 ئارىسىدىكى مۇناسىۋەتنى بايقاشمۇ بىرقەدەر تەس.

> مىسال كەلتۈرۈش ئۇسۇلى بىر قەدەر «دۆت» رەك بولسىمۇ، لېكىن ئۇ ساناش ئۇسۇلىنىڭ ئاساسىي ئۇسۇلىدۇر، 4 ئېلېمېنتلىق، 5 ئېلېمېنتلىق توپلامنىڭ قىسمىي توپلىمىنى مىسال كەلتۈرۈپ باقسىڭىز بولىدۇ.

قانۇنىيەتنى بايقاش ئۈچۈن باشقا ئۇسۇللارنى قوللىنىشىمىزغا توغرا كېلىدۇ. بۇ يەردە، تەبئىي ھالدا ئامال قىلىپ يۇقىرىدا بايان قىلىنغان ئىككى ساناش پرىنسىپىنى ئىشلىتىش دېگەن پىكىرگە كېلىمىز.

روشەنكى، a_i $(i=1, 2, 3)$ ئېلېمېنت بىلەن ھەرقايسى قىسمىي توپلاملار ئارىسىدىكى مۇناسىۋەت a_i قىسمىي توپلامغا تەۋە ياكى a_i قىسمىي توپلامغا تەۋە ئەمەستىن ئىبارەت ئىككى خىللا بولىدۇ. شۇڭا، S تىكى ھەربىر ئېلېمېنتنىڭ مەلۇم قىسمىي توپلامغا تەۋە بولۇش - بولماسلىقىنى تەكشۈرۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ بىر قىسمىي توپلامغا ئېرىشىشنى ئويلاشساق بولىدۇ. S تا 3 ئېلېمېنت بولغانلىقتىن، S توپلامنىڭ بىر قىسمىي توپلىمى S_1 گە ئېرىشىشنى ئۈچ باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ:

1 - باسقۇچتا، a_1 ئېلېمېنتنىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش - بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_1 \notin S_1$، $a_1 \in S_1$)؛

2 - باسقۇچتا، a_2 نىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش - بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_2 \notin S_1$، $a_2 \in S_1$)؛

بۇنىڭدىن بوش توپلام بىلەن ئەسلىي توپلامنىڭ يىغىندىسى قىسمىي توپلام بولىدىغانلىق قائىدىنى تېخىمۇ ئىلگىرىلىگەن هالدا چۈشىنىشكە بولامدۇ؟

3 ـ باسقۇچتا، a_3 ئېلېمېنتىنىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش ـ بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_3 \notin S_1$، $a_3 \in S_1$).

يۇقىرىقى ئۈچ باسقۇچ تاماملانسىلا، S_1 توپلامدىكى ئېلېمېنتلار تامامەن ئېنىقلانغان بولىدۇ. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، 3 ئېلېمېنتتىن تەركىب تاپقان توپلامنىڭ ئوخشاش بولمىغان قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانى:

$$2\times2\times2=2^3=8.$$

يۇقىرىقى جەرياندىن 3 بىلەن 8 نىڭ مۇناسىۋىتىنى كۆرۈۋالالايمىز: 3 بولسا 2^3 دىكى كۆرسەتكۈچ، ئەمما 8 بولسا 2^3 نى ھېسابلىغاندىكى نەتىجە.

ئومۇمەن:

n ئېلېمېنتلىق توپلام $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ نىڭ ئوخشاش بولمىغان قىسمىي توپلاملىرىنىڭ سانى 2^n بولىدۇ

ئىسپات: A توپلامنىڭ بىر قىسمىي توپلىمى S_1 گە ئېرىشىشنى n باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ:

1 ـ باسقۇچتا، a_1 ئېلېمېنتىنىڭ S_1 غا تەۋە بولۇش ـ بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_1 \notin S_1$، $a_1 \in S_1$)؛

2 ـ باسقۇچتا، a_2 ئېلېمېنتىنىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش ـ بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_2 \notin S_1$، $a_2 \in S_1$)؛

......

k ـنچى باسقۇچتا، a_k ئېلېمېنتىنىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش ـ بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_k \notin S_1$، $a_k \in S_1$)؛

......

n ـنچى باسقۇچتا، a_n ئېلېمېنتىنىڭ S_1 گە تەۋە بولۇش ـ بولماسلىقىنى تەكشۈرىمىز، بۇنىڭدا 2 خىل مۇمكىنچىلىك بار ($a_n \notin S_1$، $a_n \in S_1$).

يۇقىرىدىكى بۇ n باسقۇچ تاماملانسىلا، S_1 توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرى تامامەن ئېنىقلانغان بولىدۇ. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، n ئېلېمېنتتىن تەركىب تاپقان توپلامنىڭ ئېلېمېنتلىرىنىڭ سانى:

$$\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n\ \text{دانە}\ 2}=2^n.$$

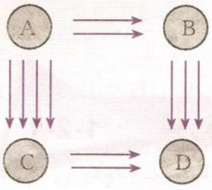
دانە ئوخشاش بولمىغان قىسمىي توپلامدىن ئىبارەت.

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىدىكى يەكۈننى باشقا ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالامسىز؟

1.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

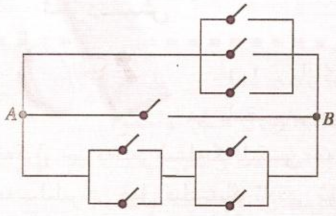


(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

1. بىر ماگىزىن مەلۇم تىپلىق تېلېۋىزور ساتماقچى بولدى. بۇنىڭ ئىچىدە، شۇ يەردە ئىشلەپچىقىرىلغان تېلېۋىزوردىن 4 خىلى، باشقا يەردە ئىشلەپچىقىرىلغان تېلېۋىزوردىن 7 خىلى بار بولسا، مۇشۇ تىپلىق 1 تېلېۋىزور سېتىۋېلىشتا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

2. A جايدىن B جايغا بارىدىغان 2 يول، B جايدىن D جايغا بارىدىغان 3 يول بار؛ A جايدىن C جايغا بارىدىغان 4 يول، C جايدىن D جايغا بارىدىغان 2 يول بار. A جايدىن D جايغا بېرىشتا ئوخشاش بولمىغان قانچە يول بار؟

3. 1، 5، 9، 13 ئىچىدىكى خالىغان بىرىنى سۇرەت، 4، 8، 12، 16 ئىچىدىكى خالىغان بىرىنى مەخرەج قىلىپ ئوخشاش بولمىغان ئاددىي كەسىردىن قانچىنى ھاسىل قىلغىلى بولىدۇ؟ ئوخشاش بولمىغان توغرا كەسىردىن قانچىنى ھاسىل قىلغىلى بولىدۇ؟



(4 ـ مىسال ئۈچۈن)

4. رەسىمدىكى توك يولىدا، A بىلەن B نى تۇتاشتۇرۇشتا ئوخشاش بولمىغان قانچە لىنىيە بار؟

5. (1) تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، ئابسىسسا ۋە ئوردىناتى ئوخشاشلا توپلام $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ئىچىدە قىممەت ئالىدىغان ئوخشاش بولمىغان نۇقتىدىن قانچىسى بار؟

(2) تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردېنات سىستېمىسىدا، يانتۇلۇقى توپلام $B=\{1, 3, 5, 7\}$ ئىچىدە، y ئوقتىكى كەسمە ئارىلىقى توپلام $C=\{2, 4, 6, 8\}$ ئىچىدە قىممەت ئالىدىغان ئوخشاش بولمىغان تۈز سىزىقتىن قانچىسى بار؟

B گۇرۇپپا

1. مەلۇم خىل نومۇرلۇق قۇلۇپنىڭ 4 دانە نومۇر تەخسىسى بار بولۇپ، ھەربىر نومۇر تەخسىسىدە 0 دىن 9 غىچە 10 رەقەم بار. ھازىر قۇلۇپنىڭ ئاخىرقى بىر نومۇر تەخسىسىدە كاشىلا چىققانلىقتىن، ئۇنىڭدىن 0 دىن 5 كىچە ئالتە رەقەمنىلا بۇراپ چىقارغىلى بولسا، بۇ 4 دانە نومۇر تەخسىسىدىن تۆت خانىلىق رەقەملىك نومۇردىن قانچىنى ھاسىل قىلىشقا بولىدۇ؟

2. (1) 4 ساۋاقداش ئايرىم ـ ئايرىم مەكتەپنىڭ پۇتبول كوماندىسى، ۋاسكېتبول كوماندىسى ۋە تىكتاك توپ كوماندىسىغا تىزىملاتماقچى بولدى، ئەگەر ھەربىر ساۋاقداشنىڭ بىرلا كوماندىغا تىزىملىتىشىغا يول قويۇلسا، ئوخشاش بولمىغان تىزىملىتىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى 3^4 بولامدۇ ياكى 4^3 مۇ؟

(2) 3 سىنىپ ئايرىم ـ ئايرىم 5 مەنزىرە نۇقتىسىدىن بىرىنى تاللاپ سەيلە قىلماقچى بولدى، بۇنىڭدا ئوخشاش بولمىغان تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى 3^5 بولامدۇ ياكى 5^3 مۇ؟

CHAPTER 1

2-1 ئورۇنلاشتۇرۇش ۋە گۇرۇپپىلاش

1-2-1 ئورۇنلاشتۇرۇش

ئىزدىنىش

1.1 - پاراگرافتا كەلتۈرۈلگەن 9 - ئۆلگە مىسالدىن كۆرەلەيمىزكى، بۇ مەسىلە-نى باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغاندا، بەزى تەكرار خىزمەتلەر ئىشلەنگەنلىكتىن جەريان چۇۋالچاق بولۇپ قالىدۇ. ئۇنداق بولسا، بۇ تۈردىكى ساناش مەسىلىلىرىنى ھەل قىلىشنىڭ ئاددىي ئۇسۇلى بارمۇ؟

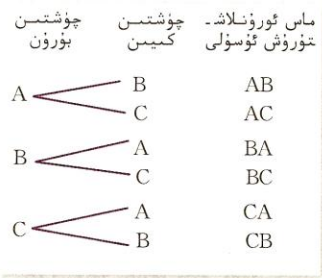
ئاددىي ساناش ئۇسۇلىنى تېپىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن بۇ تۈردىكى ئاددىي ئىككى مىسالنى تەھلىل قىلىپ ئۆتىمىز.

مەسىلە 1 A، B، C ئۈچ ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ مەلۇم پائالىيەتكە قاتناشتۇرما-چى، ئۇلارنىڭ بىرىنى چۈشتىن بۇرۇنقى پائالىيەتكە، يەنە بىرىنى چۈشتىن كېيىنكى پائالىيەتكە قا-ناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

بۇ مەسىلىنى مۇنداق تەھلىل قىلىشقا بولىدۇ: A، B، C ئۈچ ئوقۇغۇچى ئىچىدىن ھەر قېتىمدا ئوقۇغۇچىنى تاللاپ، چۈشتىن بۇرۇنقى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغانلار ئالدىدا، چۈشتىن كېيىنكى پائال-يەتكە قاتنىشىدىغانلار كەينىدە بولۇش تەرتىپى بويىچە ئورۇنلاشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلا-تۇرۇش ئۇسۇلىدىن جەمئىي قانچە خىلى بارلىقىنى تاپايلى.

بۇ مەسىلىنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ھەل قىلىشقا بولىدۇ: 1 - باسقۇچتا چۈشتىن بۇرۇنقى پائال-يەتكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىنى بەلگىلەيمىز، 3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن بىرىنى تاللاشتا 3 خىل ئۇس-بار؛ 2 - باسقۇچتا چۈشتىن كېيىنكى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىنى بەلگىلەيمىز، چۈشتىن ب-رۇنقى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچى بەلگىلىنىپ بولغاندىن كېيىن، چۈشتىن كېيىنكى پائالىيەت-قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىنى قېپقالغان 2 ئوقۇغۇچى ئىچىدىنلا تاللاش كېرەك، بۇنىڭدا 2 خىل ئۇسۇل بار.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، 3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ، ئۇلا-نى چۈشتىن بۇرۇنقى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغىنى ئالدىدا، چۈشتىن كېيىنكى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغ-كەينىدە بولۇش تەرتىپى بويىچە ئورۇنلاشتۇرۇشتا ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇلىدىن جەمئىي $3\times2=6$ خىل بار (1.2.1 - رەسىمدىكىدەك).



1.2.1 ـ رەسىم

يۇقىرىقى مەسىلىدە، ئېلىنغان ئوبيېكتلار **ئېلېمېنت** دەپ ئاتىلىدۇ، شۇنىڭ بىلەن بۇ مەسىلىنى تۆۋەندىكىدەك بايان قىلىشقا بولىدۇ:

ئوخشاش بولمىغان a، b، c ئۈچ ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 2 سىنى ئېلىپ، ئۇلارنى بەلگىلىك تەرتىپ بويىچە بىر قاتار قىلىپ ئورۇنلاشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بار؟

بارلىق ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇشلار

$$ab ,ac \text{ ، } ba \text{ ، } bc \text{ ، } ca \text{ ، } cb$$

بولۇپ، ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى جەمئىي $3\times2=6$ خىل بولىدۇ.

مەسىلە 2 1، 2، 3، 4 تىن ئىبارەت 4 رەقەم ئىچىدىن ھەر قېتىمدا 3 نى ئېلىپ بىر ئۈچ خانىلىق سان تۈزۈشتە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە ئۈچ خانىلىق سان تۈزۈشكە بولىدۇ؟

روشەنكى، 4 رەقەم ئىچىدىن ھەر قېتىمدا 3 نى ئېلىپ، ئۇلارنى «يۈزلەر خانىسى»، «ئونلار خانىسى»، «بىرلەر خانىسى» دېگەن تەرتىپ بويىچە بىر قاتار قىلىپ ئورۇنلاشتۇرساق، ئۈچ خانىلىق بىر سان كېلىپ چىقىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بولسا، ئوخشاش بولمىغان ئۈچ خانىلىق ساندىن شۇنچىنى تۈزۈشكە بولىدۇ. بۇ مەسىلىنى ئۈچ باسقۇچقا بۆلۈپ ھەل قىلالايمىز:

1 ـ باسقۇچتا، يۈزلەر خانىسىدىكى رەقەمنى بەلگىلەيمىز، 1، 2، 3، 4 تىن ئىبارەت بۇ 4 رەقەم ئىچىدىن خالىغان بىرىنى ئېلىشتا 4 خىل ئۇسۇل بار؛

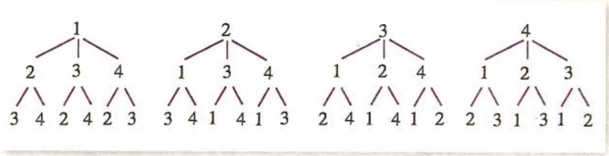
2 ـ باسقۇچتا، ئونلار خانىسىدىكى رەقەمنى بەلگىلەيمىز، يۈزلەر خانىسىدىكى رەقەم بەلگىلىنىپ بولۇنغاندىن كېيىن، ئونلار خانىسىدىكى رەقەمنى قېپقالغان 3 رەقەم ئىچىدىن ئېلىشقا بولىدۇ، بۇنىڭدا 3 خىل ئۇسۇل بار؛

3 ـ باسقۇچتا، بىرلەر خانىسىدىكى رەقەمنى بەلگىلەيمىز، يۈزلەر، ئونلار خانىسىدىكى رەقەملەر بەلگىلىنىپ بولۇنغاندىن كېيىن، بىرلەر خانىسىدىكى رەقەمنى قېپقالغان 2 رەقەم ئىچىدىنلا ئېلىشقا بولىدۇ. بۇنىڭدا 2 خىل ئۇسۇل بار.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، 1، 2، 3، 4 تىن ئىبارەت ئوخشاش بولمىغان بۇ 4 رەقەم ئىچىدىن ھەر قېتىمدا 3 رەقەمنى ئېلىپ، ئۇلارنى «يۈزلەر خانىسى»، «ئونلار خانىسى»، «بىرلەر خانىسى» دېگەن تەرتىپ بويىچە بىر قاتار قىلىپ ئورۇنلاشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي

$$4\times3\times2=24$$

خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بار. شۇڭا، ئوخشاش بولمىغان ئۈچ خانىلىق ساندىن جەمئىي 24 نى تۈزۈشكە بولىدۇ (1.2.2 ـ رەسىمدىكىدەك).



2.2.1 ـ رەسىم

يۇقىرىدىكىگە ئاساسەن بۇ ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ ھەممىسىنى يېزىپ چىقىشقا بولىدۇ:

123, 124, 132, 134, 142, 143,
213, 214, 231, 234, 241, 243,
312, 314, 321, 324, 341, 342,
412, 413, 421, 423, 431, 432.

يۇقىرىدىكىگە ئوخشاش، مەسىلە 2 نى تۆۋەندىكىدەك يىغىنچاقلاشقا بولىدۇ:

ئوخشاش بولمىغان a، b، c، d تۆت ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 3 نى ئېلىپ، ئۇلارنى بەلگىلىك تەرتىپ بويىچە بىر قاتار قىلىپ ئورۇنلاشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بار؟

ئوخشاش بولمىغان بارلىق ئورۇنلاشتۇرۇشلار

$abc, abd, acb, acd, adb, adc,$
$bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,$
$cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,$
$dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$

بولۇپ، ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى $4\times3\times2=24$ خىل بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

يۇقىرىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلە 1 بىلەن مەسىلە 2 نىڭ ئورتاق ئالاھىدىلىكى نېمە؟ ئۇلارنى ئومۇمىي ئەھۋالغا كېڭەيتەلەمسىز؟

ئومۇمەن، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m\leqslant n)$ دانە ئېلېمېنتنى ئېلىپ، ئۇلارنى بەلگىلىك تەرتىپ بويىچە بىر قاتار قىلىپ تىزىش ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بىر **ئورۇنلاشتۇرۇش** (arrangement) دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ ئالاھىدىلىكىنى يىغىنچاقلىيالامسىز؟

ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، پەقەت ۋە پەقەت ئىككى ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ ئېلېمېنتلىرى پۈتۈنلەي ئوخشاش ھەمدە ئۇلارنىڭ ئېلېمېنتلىرىنىڭ تىزىلىش تەرتىپىمۇ ئوخشاش بولغاندا، بۇ ئىككى ئورۇنلاشتۇرۇش ئوخشاش بولىدۇ. مەسىلەن، مەسىلە 2 دىكى 123 بىلەن 134 نىڭ ئېلېمېنت-

لىرى پۈتۈنلەي ئوخشىشىپ كەتمىگەنلىكتىن، ئۇلار ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇشلاردۇر؛ 123 بىلەن 132 نىڭ ئېلېمېنتلىرى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولسىمۇ، لېكىن ئۇلارنىڭ ئېلېمېنتلىرىنىڭ تىزىلىش تەرتىپى ئوخشاش بولمىغانلىقتىن، ئۇلارمۇ ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇشلار بولىدۇ.

ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m \leqslant n)$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇشلارنىڭ سانى ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى **ئورۇنلاشتۇرۇش سانى** دەپ ئاتىلىدۇ ۋە A_n^m❶ بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

❶ A دېگىنىمىز ئىنگلىزچە arrangement (ئورۇنلاشتۇرۇش) دېگەن سۆزنىڭ باش ھەرپى.

يۇقىرىدىكى مەسىلە 1 ئوخشاش بولمىغان 3 ئېلېمېنت ئىچىدىن 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانىنى تېپىش مەسىلىسى بولۇپ، بۇ ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_3^2 قىلىپ يېزىلىدۇ، ئۇنىڭ تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى ھېسابلاپ چىققانىدۇق:

$$A_3^2 = 3 \times 2 = 6;$$

يۇقىرىقى مەسىلە 2 بولسا، ئوخشاش بولمىغان 4 ئېلېمېنت ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانىنى تېپىش مەسىلىسى بولۇپ، بۇ ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_4^3 قىلىپ يېزىلىدۇ. ئۇنىڭ تۆۋەندىكىدەك بولىدىغانلىقىنى ھېسابلاپ چىققانىدۇق:

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

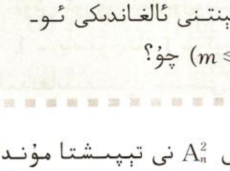
ئىزدىنىش

ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^2 قانچە بولىدۇ؟ A_n^3 چۇ؟ $(m \leqslant n)A_n^m$ چۇ؟

مەسىلە 1، 2 لەرنى يېشىش تەجرىبىمىزگە ئاساسەن، ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^2 نى تېپىشتا مۇنداق پىكىر يۈرگۈزۈشكە بولىدۇ:

تەرتىپى بەلگىلەنگەن 2 بوش ئورۇن (3.2.1 ـ رەسىم) بار دەپ پەرەز قىلايلى. ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت a_1، a_2، ⋯، a_n ئىچىدىن خالىغان 2 سىنى ئېلىپ، بىر بوش ئورۇنغا بىر ئېلېمېنتنى تولدۇرساق، ھەربىر خىل تولدۇرۇش ئۇسۇلىدىن بىر ئورۇنلاشتۇرۇش كېلىپ چىقىدۇ؛ ئەكسىچە، ھەر قانداق بىر ئورۇنلاشتۇرۇشقا ھامان مۇشۇنداق بىر خىل تولدۇرۇش ئۇسۇلى ئارقىلىق ئېرىشكىلى بولىدۇ. شۇڭا، ئوخشاش بولمىغان بارلىق تولدۇرۇش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^2 دىن ئىبارەت بولىدۇ.

ئەمدى ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تولدۇرۇش ئۇسۇلى بارلىقىنى ھېسابلاپ كۆرەيلى، بوش ئورۇننى تولدۇرۇشنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ:



3.2.1 ـ رەسىم

1 ـ باسقۇچتا، ئالدى بىلەن 1 ـ ئورۇندىكى ئېلېمېنتنى تولدۇرىمىز، بۇنىڭدا n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاللاشقا بولىدىغانلىقتىن، n خىل ئۇسۇل بار بولىدۇ؛

2 ـ باسقۇچتا، 2 ـ ئورۇندىكى ئېلېمېنتنى تولدۇرىمىز، بۇنىڭدا قېپقالغان $(n-1)$ دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاللاشقا بو ـ

لىدىغانلىقتىن، $(n-1)$ خىل ئۇسۇل بار بولىدۇ.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، 2 بوش ئورۇننى تولدۇرۇش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

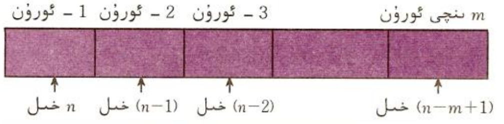
$$A_n^2 = n(n-1).$$

ئوخشاش يول بىلەن، ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^3 نى تېپىشتا، تەرتىپ بويىچە 3 بوش ئورۇننى تولدۇرۇش ئۇستىدە پىكىر يۈرگۈزۈش ئارقىلىق تۆۋەندىكىگە ئىگە بولىمىز:

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

ئومۇمەن، ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^m نى تېپىشتا، تەرتىپ بويىچە m دانە بوش ئورۇننى تولدۇرۇش ئۇستىدە پىكىر يۈرگۈزۈشكە بولىدۇ:

تەرتىپى بەلگىلەنگەن m دانە بوش ئورۇن (4.2.1 ـ رەسىم) بار دەپ پەرەز قىلايلى. ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت a_1، a_2، ⋯، a_n ئىچىدىن خالىغان m دانىسىنى ئېلىپ، بىر بوش ئورۇنغا 1 ئېلېمېنتنى تولدۇرساق، ھەربىر خىل تولدۇرۇش ئۇسۇلى بىر ئورۇنلاشتۇرۇشقا ماس كېلىدۇ، شۇڭا ئوخشاش بولمىغان بارلىق تولدۇرۇش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^m دىن ئىبارەت بولىدۇ.



4.2.1 ـ رەسىم

بوش ئورۇن تولدۇرۇشنى m دانە باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ:

1 ـ باسقۇچتا، 1 ـ ئورۇنغا n خىل تاللاش ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاللاپ تولدۇرۇشقا بولىدىغانلىقتىن، جەمئىي n خىل تاللاش ئۇسۇلى بار بولىدۇ؛

2 ـ باسقۇچتا، 2 ـ ئورۇنغا قېپقالغان $(n-1)$ دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاللاپ تولدۇرۇشقا بولىدىغانلىقتىن، جەمئىي $(n-1)$ خىل تاللاش ئۇسۇلى بار بولىدۇ؛

3 ـ باسقۇچتا، 3 ـ ئورۇنغا قېپقالغان $(n-2)$ دانە ئېلېمېنت ئىچىدىنلا خالىغان بىرىنى تاللاپ تولدۇرۇشقا بولىدىغانلىقتىن، جەمئىي $(n-2)$ خىل تاللاش ئۇسۇلى بار بولىدۇ؛

…

m ىنچى باسقۇچتا، ئالدىدىكى $(m-1)$ دانە بوش ئورۇننىڭ ھەممىسى تولدۇرۇلغاندىن كېيىن، m ىنچى ئورۇنغا قېپقالغان $n-(m-1)$ دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاللاپ تولدۇرۇشقا بولىدىغانلىقتىن، جەمئىي $n-m+1$ خىل تاللاش ئۇسۇلى بار بولىدۇ.

ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسىنىڭ ئالاھىدىلىكىنى ئومۇملاشتۇرالامسىز؟

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، m دانە بوش ئورۇننى پۈتۈنلەي تولدۇرۇپ بولۇشتا، جەمئىي

$$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

خىل تولدۇرۇش ئۇسۇلى بار بولىدۇ.

شۇنىڭ بىلەن تۆۋەندىكى فورمۇلىغا ئىگە بولىمىز:

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).}$$

بۇ يەردە $n, m \in \mathbf{N}^*$ ھەمدە $m \leqslant n$. بۇ فورمۇلا **ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m\leqslant n)$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئورۇنلاشتۇرۇشلارنىڭ سانىنى ئاسانلا ھېسابلاپ چىقالايمىز. مەسىلەن:

$$A_5^2=5\times4,$$
$$A_8^3=8\times7\times6=336.$$

ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنتنىڭ ھەممىسى ئېلىنغاندىكى بىر ئورۇنلاشتۇرۇش n دانە ئېلېمېنتنىڭ بىر **تولۇق ئورۇنلاشتۇرۇلۇشى** دەپ ئاتىلىدۇ. بۇ ۋاقىتتا ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسىدا $m=n$ بولۇپ، تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1,$$

بۇ، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنتنىڭ ھەممىسى ئېلىنغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى 1 دىن n گىچە بولغان مۇسبەت پۈتۈن سانلارنى ئارقىمۇئارقا كۆپەيتكەندىكى كۆپەيتمىگە تەڭ بولىدىغانلىقىنى بىلدۈرىدۇ. 1 دىن n گىچە بولغان مۇسبەت پۈتۈن سانلارنى ئارقىمۇئارقا كۆپەيتكەندىكى كۆپەيتمە n نىڭ **فاكتورىئالى** دەپ ئاتىلىپ، $n!$ بىلەن ئىپادىلىنىدۇ. شۇڭا، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنتنىڭ تولۇق ئورۇنلاشتۇرۇلۇش سانى فورمۇلىسىنى تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

$$\boxed{A_n^n=n!.}$$

بىز يەنە $0!=1$ دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

1 ـ مىسال. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلايلى: (1) A_{10}^4؛ (2) A_{18}^5؛ (3) $A_{18}^{18}\div A_{13}^{13}$.

يېشىش: ھېسابلىغۇچتىن پايدىلانساق تۆۋەندىكى كېلىپ چىقىدۇ:

(1) 10 [SHIFT] [nPr] 4=5 040;

(2) 18 [SHIFT] [nPr] 5=1 028 160;

(3) 18 [SHIFT] [nPr] 18 [÷] 13 [SHIFT] [nPr] 13=1 028 160.

(2)، (3) دىن كۆرەلەيمىزكى، $A_{18}^5=A_{18}^{18}\div A_{13}^{13}$. ئۇنداق بولسا، بۇ يەكۈن ئومۇمىي ئەھۋالغا ئۇيغۇن كېلەمدۇ؟ يەنى تۆۋەندىكى ئىپادە كۆچكە ئىگە بولامدۇ؟

$$A_n^m=\frac{A_n^n}{A_{n-m}^{n-m}}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

ئەمەلىيەتتە:

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{A_n^n}{A_{n-m}^{n-m}}.$$

شۇڭا ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسىنى يەنە تۆۋەندىكىدەك يېزىشقىمۇ بولىدۇ:

$$\boxed{A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.}$$

2 ـ مىسال. مەلۇم يىلى مەملىكەتلىك A دەرىجىلىكلەر (A گۇرۇپپا) پۇتبول مۇسابىقىسىگە 14 كوماندا قاتناشقان بولۇپ، ھەربىر كوماندا باشقا كوماندىلار بىلەن ئۆزىنىڭ مەيدانىدا ۋە قارشى تەرەپنىڭ مەيدانىدا ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا بىر مەيدان مۇسابىقە ئېلىپ بارسا، جەمئىي قانچە مەيدان مۇسابىقە ئېلىپ بېرىلىدۇ؟

يېشىش: خالىغان ئىككى كوماندا ئارىسىدا ئۆزىنىڭ مەيدانىدا بىر قېتىم ۋە قارشى تەرەپنىڭ مەيدانىدا بىر قېتىم مۇسابىقە ئېلىپ بېرىش دېگىنىمىز 14 ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بىر ئورۇنلاشتۇرۇشقا ماس كېلىدۇ، شۇڭا ئېلىپ بېرىلىدىغان مۇسابىقىنىڭ ئومۇمىي مەيدان سانى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$A_{14}^{2}=14\times13=182.$$

3 ـ مىسال. (1) ئوخشاش بولمىغان 5 پارچە كىتاب بار. ئۇلارنىڭ ئىچىدىن 3 پارچىنى تاللاپ 3 ئوقۇغۇچىنىڭ ھەربىرىگە 1 دىن تەقسىم قىلىپ بېرىشتە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە خىل تەقسىملەش ئۇسۇلى بار؟

(2) ئوخشاش بولمىغان 5 خىل كىتاب بار. ئۇلارنىڭ ئىچىدىن 3 پارچىنى سېتىۋېلىپ 3 ئوقۇغۇچىنىڭ ھەربىرىگە 1 دىن تەقسىم قىلىپ بېرىشتە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە خىل تەقسىملەش ئۇسۇلى بار؟

يېشىش: (1) ئوخشاش بولمىغان 5 پارچە كىتاب ئىچىدىن 3 پارچىنى تاللاپ ئايرىم ـ ئايرىم 3 ئوقۇغۇچىغا تەقسىم قىلىپ بېرىش دېگىنىمىز ئوخشاش بولمىغان 5 ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بىر ئورۇنلاشتۇرۇشقا ماس كېلىدۇ، شۇڭا ئوخشاش بولمىغان تەقسىم قىلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$A_{5}^{3}=5\times4\times3=60.$$

(2) ئوخشاش بولمىغان 5 خىل كىتاب بار بولۇپ، ھەربىر ئوقۇغۇچىغا 1 پارچە كىتاب تەقسىم قىلىشنىڭ ئوخشاش بولمىغان 5 خىل تاللاپ سېتىۋېلىش ئۇسۇلى بار بولغانلىقتىن، 3 ئوقۇغۇچىنىڭ ھەربىرىگە 1 پارچە كىتاب تەقسىم قىلىشتىكى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللارنىڭ خىل سانى:

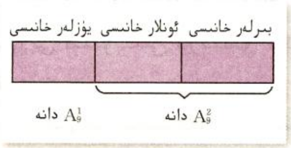
$$5\times5\times5=125.$$

3 ـ مىسالدىكى ئىككى تارماق مىسالنىڭ پەرقى تۆۋەندىكىچە: (1) تارماق مىسالدا، ئوخشاش بولمىغان 5 پارچە كىتابتىن 3 پارچىسى تاللىنىپ 3 ئوقۇغۇچىغا تەقسىم قىلىنىدۇ، بۇنىڭدا ھەربىر ئوقۇغۇچىغا تەقسىم قىلىنغان كىتاب ئوخشاش بولمايدىغانلىقتىن، ئۇ ئورۇنلاشتۇرۇش مەسىلىسىگە تەۋە؛ (2) تارماق مىسالدا، ئوخشاش بولمىغان ئوقۇغۇچىلارغا تەقسىم قىلىنىدىغان كىتابلار ئوخشاش بولۇپ قېلىشىمۇ مۇمكىن، شۇڭا، ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسىنى قوللىنىشقا ماس كەلمىگەن ئەھۋالدا، پەقەت باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاش كېرەك.

4 ـ مىسال. 0 دىن 9 غىچە بولغان 10 رەقەمدىن پايدىلىنىپ، تەكرار رەقىمى بولمىغان ئۈچ خانىلىق ساندىن قانچىنى تۈزۈشكە بولىدۇ؟

تەھلىل: بۇ مەسىلىدىكى 0 دىن 9 غىچە بولغان 10 رەقەم ئىچىدە 0 يۈزلەر خانىسىدا تۇرسا بولمايدۇ، قالغان رەقەملەر خالىغان خانىدا تۇرسا بولىۋېرىدۇ، شۇڭا، بۇ رەقەملەر ئىچىدە 0 ئالاھىدە ئېلېمېنت ھېسابلىنىدۇ. ئادەتتە، بىز ئالاھىدە ئېلېمېنتنىڭ ئورنىدىن قول سېلىپ مەسىلىلەر ئۈستىدە مۇلاھىزە يۈرگۈزىمىز.

1 - خىل يېشىش ئۇسۇلى: تەكرار رەقەمى بولمىغان ئۈچ خانىلىق سانىنىڭ يۈزلەر خانىسىدىكى رەقىمى 0 بولسا بولمايدىغانلىقتىن، ئورۇنلاشتۇرۇشنى تۆۋەندىكى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ: 1 - باسقۇچتا، 1 دىن 9 غىچە بولغان بۇ 9 رەقەم ئىچىدىن خالىغان 1 نى تاللاپ، يۈزلەر خانىسىدىكى رەقەمنى تىزىمىز، بۇنىڭدا A_9^1 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛ 2 - باسقۇچتا، قېپقالغان 9 رەقەم ئىچىدىن خالىغان 2 سىنى تاللاپ، ئونلار خانىسى بىلەن بىرلەر خانىسىدىكى رەقەملەرنى تىزىمىز، بۇنىڭدا A_9^2 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار (5.2.1 - رەسىم). باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، تاپماقچى بولغان ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ سانى:



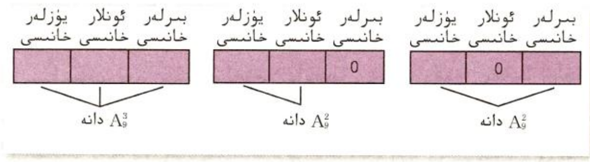
5.2.1 - رەسىم

$$A_9^1 \cdot A_9^2 = 9\times9\times8 = 648 \text{ (دانە)}.$$

2 - خىل يېشىش ئۇسۇلى: 6.2.1 - رەسىمدىكىدەك، شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئۈچ خانىلىق سانلارنى ئۈچ تۈرگە ئايرىشقا بولىدۇ: ھەربىر خانىسىدىكى رەقىمى 0 بولمىغان ئۈچ خانىلىق ساندىن A_9^3 دانە بار، بىرلەر خانىسىدىكى رەقىمى 0 بولغان ئۈچ خانىلىق ساندىن A_9^2 دانە بار، ئونلار خانىسىدىكى رەقىمى 0 بولغان ئۈچ خانىلىق ساندىن A_9^2 دانە بار.

تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، شەرتكە ئۇيغۇن كېلىدىغان ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ سانى:

$$A_9^3 + A_9^2 + A_9^2 = 648 \text{ (دانە)}.$$



6.2.1 - رەسىم

3 - خىل يېشىش ئۇسۇلى: 0 دىن 9 غىچە بولغان 10 رەقەم ئىچىدىن خالىغان 3 رەقەمنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_{10}^3 بولۇپ، بۇنىڭدا 0 يۈزلەر خانىسىدا بولغان ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_9^2 بولىدۇ، شۇڭا ئۇلارنىڭ ئايرىمىسى دەل بۇ 10 رەقەمدىن تۈزۈلگەن تەكرار رەقەمى بولمىغان ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ سانى بولىدۇ، يەنى تاپماقچى بولغان ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ سانى:

$$A_{10}^3 - A_9^2 = 10\times9\times8 - 9\times8 = 648.$$

4 - مىسالدىكىگە ئوخشاش ساناش مەسىلىلىرىگە دۇچ كەلگەندە، مەسىلىنى مۇۋاپىق ئۇسۇلدىن پايدىلىنىپ بىرقانچە تارماق مەسىلىگە ئاجرىتىۋالىمىز، ئاندىن پىكىر يۈرگۈزۈش تۈرغۇلىرىنىڭ ئوخشاش بولماسلىقىغا قاراپ، مەسىلىنى ئوخشاش بولمىغان ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ يېشىمىز. يۇقىرىدىكى 1 - خىل يېشىش ئۇسۇلىدا، يۈزلەر خانىسىدىكى رەقەم 0 بولسا بولمايدىغانلىقىغا ئاساسەن، 3 رەقەمنى تاللاپ تەكرار رەقەمى بولمىغان ئۈچ خانىلىق سان تۈزۈشتىن ئىبارەت بۇ ئىشنى باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ئورۇندىدۇق؛ 2 - خىل يېشىش ئۇسۇلىدا، 0 نىڭ ئوتتۇرىغا چىققان - چىقمىغانلىقى ھەمدە ئوتتۇرىغا چىققاندىكى ئورنىنى ئۆلچەم قىلغان ھالدا، بۇ ئىشنى تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ئورۇندىدۇق؛ 3 - خىل يېشىش ئۇسۇلىدا تەتۈرىچە پىكىر يۈرگۈزۈش ئۇسۇلىدىن پايدىلاندۇق، بۇنىڭدا ئالدى بىلەن ئوخشاش بولمىغان 10 رەقەم ئىچىدىن تەكرارلانمايدىغان 3 رەقەمنى تاللاشنىڭ ئورۇنلاشتۇرۇش سانىنى تېپىپ، ئاندىن مۇشۇ ئورۇنلاشتۇرۇش ساندىن يۈزلەر خا-

نىسىدىكى رەقەمى 0 بولۇشىنىڭ ئورۇنلاشتۇرۇش سانى (يەنى ئۈچ خانىلىق سان بولمايدىغانلىرىنىڭ سانى) نى ئېلىۋېتىش ئارقىلىق تەكرار رەقەمى بولمىغان ئۈچ خانىلىق سانلارنىڭ سانىنى كەلتۈرۈپ چىقاردۇق.

يۇقىرىقى مەسىلىلەرنى يېشىش جەريانىدىن كۆرەلەيمىزكى، ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇقۇمىنى كىرگۈزۈش ھەمدە ئورۇنلاشتۇرۇش سانىنى تېپىش فورمۇلىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىش نەتىجىسىدە، «ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $(m \leqslant n)m$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئورۇنلاشتۇرۇشلارنىڭ سانى» نى تېپىش تۈرىدىكى ئالاھىدە ساناش مەسىلىلىرىنى تېخىمۇ ئاددىي ھەم ئىخچام ھالدا يېشەلەيدىغان بولدۇق.

1.1 ـ پاراگرافتىكى 9 ـ مىسالمۇ مۇشۇ تۈردىكى ساناش مەسىلىسىمۇ؟ سىز ئورۇنلاشتۇرۇش بىلىملىرىگە ئاساسەن ئۇنى ھەل قىلالامسىز؟

مەشىق

1. تۆۋەندىكىلەرنى يېزىڭ:

(1) ئوخشاش بولمىغان 4 ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئورۇنلاشتۇرۇشلار؛

(2) ئوخشاش بولمىغان 5 ئېلېمېنت ئىچىدىن خالىغان 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئورۇنلاشتۇرۇشلار.

2. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ:

(1) A_{15}^{4}; (2) A_{7}^{7};

(3) $A_{8}^{4}-2A_{8}^{2}$; (4) $\dfrac{A_{12}^{8}}{A_{12}^{7}}$.

3. تۆۋەندىكى فاكتورىئاللارنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاپ، جەدۋەلگە تولدۇرۇڭ:

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

4. ئىسپاتلاڭ:

(1) $A_{m}^{n}=nA_{n-1}^{m-1}$; (2) $A_{8}^{8}-8A_{7}^{7}+7A_{6}^{6}=A_{7}^{7}$.

5. كوللېكتىپ تىكتاك توپ مۇسابىقىسىگە قاتناشقان 5 تەنھەرىكەتچى ئىچىدىن 3 نى تاللاپ، ئۇلارنى بەلگىلەنگەن تەرتىپ بويىچە مۇسابىقىگە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئۇسۇل بار؟

6. 4 خىل كۆكتات ئۇرۇقىدىن 3 خىلىنى تاللاپ، ئايرىم ـ ئايرىم ھالدا تۇپراق سۈپىتى ئوخشاش بولمىغان 3 پارچە يەرگە تېرىپ تەجرىبە ئېلىپ بېرىشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تېرىش ئۇسۇلى بار؟

2-2-1 گورۇپپىلاش

ئىزدىنىش

A، B، C ئۈچ ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ بىر پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟ بۇ مەسىلە بىلەن ئالدىنقى پاراگرافنىڭ بېشىدا ئوتتۇرىغا قويۇلغان مەسىلە 1 ئارىسىدا قانداق باغلىنىش ۋە ئوخشىماسلىق بار؟

3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاشتا، مۇمكىن بولغان تاللاش ئۇسۇللىرىنى تۆۋەندىكىدەك بىر-بىرلەپ كۆرسىتىشكە بولىدۇ:

A, B; A, C; B, C.

ئالدىنقى پاراگرافنىڭ بېشىدىكى مەسىلە 1 مۇنداق ئوتتۇرىغا قويۇلغان: «A، B، C ئۈچ ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ مەلۇم پائالىيەتكە قاتناشتۇرماقچى، ئۇلارنىڭ بىرىنى چۈشتىن بۇرۇنقى پائالىيەتكە، يەنە بىرىنى چۈشتىن كېيىنكى پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟»، «A چۈشتىن بۇرۇن، B چۈشتىن كېيىن» بىلەن «B چۈشتىن بۇرۇن، A چۈشتىن كېيىن» ئوخشاش بولمىغان ئىككى خىل تاللاش ئۇسۇلى بولغانلىقتىن، بۇ مەسىلىنى ھەل قىلىشتا، 3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ، يەنە ئۇلارنى «چۈشتىن بۇرۇن ئالدىدا، چۈشتىن كېيىن كەينىدە» بولۇش تەرتىپى بويىچە ئورۇنلاشتۇرۇش كېرەك. مانا بۇ، ئالدىنقى پاراگرافتا تەتقىق قىلىنغان ئورۇنلاشتۇرۇش مەسىلىسىدۇر.

بۇ پاراگرافتا تەتقىق قىلىدىغىنىمىز 3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ بىر پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇش مەسىلىسى بولۇپ، بۇ مەسىلىدە ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ تەرتىپىنى ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ زۆرۈرىيىتى يوق. كونكرېت ئارقا كۆرۈنۈشنى قايرىپ قويساق، بۇ مەسىلىنى مۇنداق ئومۇملاشتۇرۇشقا بولىدۇ:

ئوخشاش بولمىغان 3 ئېلېمېنت ئىچىدىن 2 سىنى ئېلىپ بىر گورۇپپا قىلىپ بىرلەشتۈرگەندە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە گورۇپپا بولىدۇ؟

مانا بۇ، بىز مۇشۇ پاراگرافتا تەتقىق قىلىدىغان مەسىلىدۇر.

ئومۇمەن، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m \leqslant n)$ دانە ئېلېمېنتنى ئېلىپ بىر گورۇپپا قىلىپ بىرلەشتۈرۈش ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بىر **گورۇپپىلاش** (combination) دەپ ئاتىلىدۇ.

مۇلاھىزە

ئورۇنلاشتۇرۇش بىلەن گورۇپپىلاش ئارىسىدىكى باغلىنىش ۋە ئوخشىماسلىقنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟

ئورۇنلاشتۇرۇش بىلەن گورۇپپىلاشنىڭ ئېنىقلىمىلىرىدىن بىلەلەيمىزكى، ئۇلارنىڭ ھەر ئىككىسىدە ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m \leqslant n)$ دانە ئېلېمېنت ئېلىنىدۇ، بۇ، ئورۇنلاشتۇ-

رۇش بىلەن گۇرۇپپىلاشنىڭ ئورتاق نۇقتىسى؛ ئۇلارنىڭ ئوخشىمايدىغان يېرى شۇكى، ئورۇنلاشتۇرۇش ئېلېمېنتلارنىڭ تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتلىك، گۇرۇپپىلاش بولسا ئېلېمېنتلارنىڭ تەرتىپى بىلەن مۇناسىۋەتسىز بولىدۇ. ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش ھەمدە ئېلېمېنتلىرىنىڭ تەرتىپمۇ ئوخشاش بولغاندىلا، ئىككى ئورۇنلاشتۇرۇش ئاندىن ئوخشاش بولىدۇ؛ ھالبۇكى، ئىككى گۇرۇپپىلاشنىڭ ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش بولسىلا، بۇ ئېلېمېنتلارنىڭ تەرتىپىنىڭ قانداق بولۇشىدىن قەتئىينەزەر، ئۇلار ئوخشاش گۇرۇپپىلاشلار بولىۋېرىدۇ. مەسىلەن، ab ، ba لار ئوخشاش بولمىغان ئىككى ئورۇنلاشتۇرۇش، ئەمما ئۇلار ئوخشاش بىر گۇرۇپپىلاشتۇر.

ئەمدى ئورۇنلاشتۇرۇش مەسىلىسىگە سېلىشتۇرغان ھالدا تۆۋەندىكى ئۇقۇمنى ئوتتۇرىغا قويىمىز:

ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $m(m\leqslant n)$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى بارلىق ئوخشاش بولمىغان گۇرۇپپىلاشلارنىڭ سانى ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى **گۇرۇپپىلاش سانى** دەپ ئاتىلىدۇ ۋە C_n^m❶ بەلگە بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

❶ C ئىنگلىزچە combination (گۇرۇپپىلاش) دېگەن سۆزنىڭ باش ھەرپى، ئۇ يەنە $\binom{n}{m}$ بەلگە بىلەنمۇ ئىپادىلىنىدۇ.

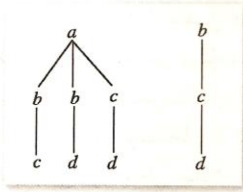
مەسىلەن، ئوخشاش بولمىغان 8 ئېلېمېنت ئىچىدىن 5 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى C_8^5 قىلىپ، ئوخشاش بولمىغان 7 ئېلېمېنت ئىچىدىن 6 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى C_7^6 قىلىپ ئىپادىلىنىدۇ.

ئۇنداق بولسا، C_n^m نىڭ قىممىتى نېمىگە تەڭ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، ئالدى بىلەن بىرقانچە كونكرېت مەسىلىگە قاراپ باقايلى.

يۇقىرىقى مەسىلىدە، 3 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 2 سىنى تاللاپ بىر پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇشتا، ئوخشاش بولمىغان 3 خىل تاللاش ئۇسۇلى بار، يەنى

$$C_3^2=3.$$

ئۇنداق بولسا، توپلام $\{a, b, c, d\}$ ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئېلىپ ئۈچ ئېلېمېنتلىق قىسمىي توپلام ھاسىل قىلىشتا، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە قىسمىي توپلام ھاسىل قىلغىلى بولىدۇ؟



7.2.1 – رەسىم

توپلامدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ «تەرتىپسىزلىكى» گە ئاساسلانساق، بۇ مەسىلىنىڭ ماھىيىتى ئەمەلىيەتتە مۇنداق بولىدۇ:

a ، b ، c ، d تۆت ئېلېمېنت ئىچىدىن ئوخشاش بولمىغان 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى C_4^3 قانچىگە تەڭ؟

بۇ مەسىلىگە جاۋاب بېرىش ئۈچۈن دەرەخسىمان شەكىلدىن پايدىلانساق بولىدۇ (7.2.1 – رەسىم). بۇ شەكىلگە ئاساسەن بارلىق گۇرۇپپىلاشلارنى يېزىپ چىقالايمىز:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$$

يەنى

$$C_4^3=4.$$

ئىزدىنىش

ئالدىدا گۇرۇپپىلاش بىلەن ئورۇنلاشتۇرۇش ئارىسىدا باغلىنىش بارلىقى تىلغا ئېلىنغاندى. ئۇنداق بولسا، مۇشۇ باغلىنىشقا ئاساسەن، گۇرۇپپىلاش سانى C_n^m نى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_n^m دىن پايدىلىنىپ تاپقىلى بولامدۇ؟

بۇ مەسىلىگە جاۋاب بېرىش ئۈچۈن، ئالدى بىلەن a، b، c، d تۆت ئېلېمېنت ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش بىلەن گورۇپپىلاشنىڭ مۇناسىۋىتىنى تەھلىل قىلىپ كۆرەيلى. «ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش، ئېلېمېنتلىرىنىڭ تەرتىپى ئوخشاش بولمىغان ئىككى گورۇپپىلاشنىڭ ئوخشاش بولىدىغانلىقى» ھەمدە «ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش، ئېلېمېنتلىرىنىڭ تەرتىپى ئوخشاش بولمىغان ئىككى ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ ئوخشاش بولمايدىغانلىقى» دىن ئىلھام ئېلىپ، «ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش بولۇش» نى ئۆلچەم قىلغان ھالدا، ئورۇنلاشتۇرۇشنى تۈرگە ئايرىشقا ھەمدە ئورۇنلاشتۇرۇش بىلەن گورۇپپىلاش ئارىسىدا تۆۋەندىكىدەك ماسلىق مۇناسىۋىتىنى تۇرغۇزۇۋېلىشقا بولىدۇ:

گورۇپپىلاش	ئورۇنلاشتۇرۇش		
abc	abc	bac	cab
	acb	bca	cba
abd	abd	bad	dab
	adb	bda	dba
acd	acd	cad	dac
	adc	cda	dca
bcd	bcd	cbd	dbc
	bdc	cdb	dcb

شۇنىڭ ئۈچۈن، «ئېلېمېنتلىرى ئوخشاش بولۇش» نى ئۆلچەم قىلىپ، يۇقىرىقى بۇ 24 ئورۇنلاشتۇرۇشنى ھەربىر گورۇپپىدا ئوخشاش بولمىغان 6 ئورۇنلاشتۇرۇش بار قىلىپ 4 گورۇپپىغا ئايرىشقا بولىدۇ. يۇقىرىقى بۇ نەتىجە نەدىن كەلگەنلىكىنى بىر قاراپلا بىلگىلى بولىدىغان بىر خىل شەكىلدە نامايان قىلىنسا ناھايىتى پايدىلىق بولىدۇ:

$$C_4^3=4=\frac{24}{6}=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=\frac{A_4^3}{A_3^3},$$

شۇنداق قىلىپ تۆۋەندىكىگە ئېرىشىمىز:

$$A_4^3=C_4^3\times A_3^3.$$

بۇ تەڭلىكنىڭ ئەمەلىي مەنىسى نېمە؟ روشەنكى، تەڭلىكنىڭ سول تەرىپى «ئوخشاش بولمىغان 4 ئېلېمېنت ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى» بولۇپ، ئۇنىڭ ئوڭ تەرىپىدە ئىككى سان ئۆزئارا كۆپەيتىلگەن. بۇنىڭغا ئاساسەن، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا باغلاپ تەسەۋۋۇر قىلىپ، بۇ تەڭلىكنى تۆۋەندىكىدەك چۈشەندۈرەلەيمىز:

ئوخشاش بولمىغان 4 ئېلېمېنت ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_4^3 نى تېپىشنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇنداشقا بولىدۇ. 1 - باسقۇچتا، ئوخشاش بولمىغان 4 ئېلېمېنت ئىچىدىن 3 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گورۇپپىلاش سانى C_4^3 نى تاپىمىز (ئېلېمېنتلارنىڭ تەرتىپىنى ئويلاشمايمىز)؛ 2 - باسقۇچتا، ھەربىر گو-

«تەڭلىك» نىڭ ئىككى تەرىپى ئوخشاش بىر مەسىلىنىڭ ئىككى خىل تەڭ كۈچلۈك چۈشەندۈرۈلۈشىدىن ئىبارەت. بۇنداق چۈشەندۈرۈش مەسىلىگە بولغان چۈشەنچىمىزنى چوڭقۇرلاشتۇرۇپلا قالماي، بىزنى يەنە مەسىلە ھەل قىلىش ئۇسۇلىنى تېپىش ئىمكانىيىتىگىمۇ ئىگە قىلىدۇ. «مەسىلىنى باشقا بىر تۇرغۇدىن چۈشەندۈرۈش» ناھايىتى مۇھىم بىر خىل ئىدىيىۋى ئۇسۇلدۇر.

رۇپپىلاشتىكى ئوخشاش بولمىغان 3 ئېلېمېنتتىن تولۇق ئورۇنلاشتۇرۇش ھاسىل قىلساق، ھەربىر گۇ-رۇپپىلاشتىكى ئېلېمېنتلاردىن ھاسىل قىلىنغان ئورۇنلاشتۇرۇش سانى A_3^3 بولىدۇ.

يۇقىرىقى چۈشەندۈرۈشنى ئومۇمىي ئەھۋالغا كېڭەيتىشكە بولىدۇ.

ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنت ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانىنى تېپىشنى تۆۋەندىكى 2 باسقۇچتىن كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان دەپ قاراشقا بولىدۇ:

1 ـ باسقۇچتا، ئوخشاش بولمىغان بۇ n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالىمىز، بۇ-نىڭدا ئوخشاش بولمىغان جەمئىي C_n^m خىل ئېلىش ئۇسۇلى بار؛

2 ـ باسقۇچتا، ئېلىنغان بۇ m دانە ئېلېمېنتتىن تولۇق ئورۇنلاشتۇرۇش ھاسىل قىلىمىز، بۇنىڭدا ئوخشاش بولمىغان جەمئىي A_m^m خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بار.

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن،

$$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m ,$$

شۇڭا:

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.}$$

بۇ يەردە $n, m \in \mathbf{N}^*$ ھەمدە $m \leqslant n$. بۇ فورمۇلا **گورۇپپىلاش سانى فورمۇلىسى** دەپ ئاتىلىدۇ.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

بولغانلىقتىن، يۇقىرىدىكى گورۇپپىلاش سانى فورمۇلىسىنى يەنە تۆۋەندىكىدەك يېزىشقا بولىدۇ:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

ئۇنىڭدىن باشقا، يەنە $C_n^0 = 1$ دەپ بەلگىلىۋالىمىز.

1 ـ مىسال. C_{10}^7 نى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلايلى.

يېشىش: ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلىساق:

10 [nCr] 7 = 120.

2 ـ مىسال. بىر ترېنېرنىڭ پۇتبول كوماندىسىدا ئىلگىرى مۇسابىقىگە چۈشۈپ باقمىغان 17 يېڭى ئەزا بار. پۇتبول مۇسابىقىسىنىڭ قائىدىسى بويىچە، مۇسابىقىدە بىر پۇتبول كوماندىسىنىڭ مەيدانغا چىقىدىغان ئادەم سانى 11 بولىدۇ.

(1) بۇ ترېنېر مۇشۇ 17 يېڭى ئەزادىن قانچە خىل مەيدانغا چىقىش لايىھىسى تۈزەلەيدۇ؟

(2) مەيدانغا چىقىدىغان 11 ئادەمنى تاللاشتا يەنە بىر ۋاراتارنى بەلگىلىۋېلىشقا توغرا كەلسە، ترېنېر بۇ ئىشنى قانچە خىل ئۇسۇلدا ئورۇندىيالايدۇ؟

تەھلىل: (1) دە، مەسىلىنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن، 17 يېڭى ئەزانىڭ رولىدا پەرق يوق، ئۇلارنىڭ ئورنى تامامەن ئوخشاش، شۇڭا، بۇ مەسىلە ئوخشاش بولمىغان 17 ئېلېمېنت ئىچىدىن 11 ئېلېمېنت ئې-لىنىدىغان گورۇپپىلاش مەسىلىسىدۇر؛ (2) دە، ۋاراتارنىڭ ئورنى ئالاھىدە بولۇپ، مەيدانغا چىقىدىغان

باشقا ئەزالارنىڭ ئورنىدا پەرق يوق، شۇڭا بۇ مەسىلە باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇندىلىدىغان گورۇپپىلاش مەسىلىسىدۇر.

يېشىش: (1) مەيدانغا چىقىدىغان يېڭى ئەزالارنىڭ رولىدا پەرق بولمىغانلىقى ئۈچۈن، تۈزۈشكە بولىدىغان مەيدانغا چىقىش لايىھىسىنىڭ خىل سانى:

$$C_{17}^{11}=12\,376.$$

(2) تىرېنېر بۇ ئىشنى ئىككى باسقۇچقا بۆلۈپ ئورۇندىسا بولىدۇ:

1 ـ باسقۇچتا، 17 يېڭى ئەزا ئىچىدىن 11 نى تاللاپ مەيدانغا چىقىش گورۇپپىسى تەشكىللەيدۇ، بۇنىڭدا C_{17}^{11} خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؛

2 ـ باسقۇچتا، تاللىنىۋېلىنغان 11 ئادەم ئىچىدىن 1 ۋاراتار تاللايدۇ، بۇنىڭدا C_{11}^{1} خىل تاللاش ئۇسۇلى بار.

شۇنىڭ ئۈچۈن، تىرېنېرنىڭ بۇ ئىشنى ئورۇندىشىدىكى ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$C_{17}^{11}\times C_{11}^{1}=136\,136.$$

ئىزدىنىش

بۇ مىسالدىكى (2) مەسىلىنى ھەل قىلىشنىڭ باشقا ئۇسۇللىرىنى ئويلاپ تاپالامسىز؟

3 ـ مىسال. (1) تەكشىلىكتە 10 نۇقتا بار، ئۇلار ئىچىدىكى ھەر 2 نۇقتىنى ئۇچ قىلغان كېسىكلەرنىڭ سانى جەمئىي قانچە؟

(2) تەكشىلىكتە 10 نۇقتا بار. ئۇلار ئىچىدىكى ھەر 2 نۇقتىنى ئۇچ قىلغان يۆنىلىشلىك كېسىكلەرنىڭ سانى جەمئىي قانچە؟

يېشىش: (1) بۇ 10 نۇقتا ئىچىدىكى ھەر 2 نۇقتىنى ئۇچ قىلغان كېسىكلەرنىڭ سانى دەل ئوخشاش بولمىغان 10 ئېلېمېنت ئىچىدىن 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گورۇپپىلاش سانىغا تەڭ، يەنى بۇنداق كېسىكلەرنىڭ تال سانى جەمئىي:

$$C_{10}^{2}=\frac{10\times 9}{1\times 2}=45.$$

(2) يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ ئىككى ئۇچ نۇقتىسىنىڭ بىرى باش نۇقتا، يەنە بىرى ئاخىرقى نۇقتا بولىدىغانلىقتىن، بۇ 10 نۇقتا ئىچىدىكى ھەر 2 نۇقتىنى ئۇچ نۇقتا قىلغان يۆنىلىشلىك كېسىكلەرنىڭ سانى دەل ئوخشاش بولمىغان 10 ئېلېمېنت ئىچىدىن 2 ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى ئورۇنلاشتۇرۇش سانىغا تەڭ، يەنى يۆنىلىشلىك كېسىكنىڭ تال سانى جەمئىي

$$A_{10}^{2}=10\times 9=90.$$

3 ـ مىسالنىڭ (1) تارماق مىسالىدا، كېسىكنىڭ ئىككى ئۇچىنىڭ تەرتىپى ئويلىشىلمايدۇ، شۇڭا ئۇ گورۇپپىلاش مەسىلىسىدۇر؛ (2) تارماق مىسالدا، كېسىكنىڭ ئىككى ئۇچىنىڭ تەرتىپى ئويلىشىلىدۇ، شۇڭا ئۇ ئورۇنلاشتۇرۇش مەسىلىسىدۇر.

4 ـ مىسال. 100 مەھسۇلاتنىڭ 98 ى لاياقەتلىك مەھسۇلات، 2 سى ناچار مەھسۇلات. بۇ 100 مەھسۇلات ئىچىدىن خالىغان 3 نى ئالغاندا:

(1) ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

(2) ئېلىنغان 3 مەھسۇلات ئىچىدە، دەل 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

(3) ئېلىنغان 3 مەھسۇلات ئىچىدە كەم دېگەندە 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

يېشىش: (1) ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى دەل 100 مەھسۇلات ئىچىدىن 3 نى ئېلىشنىڭ گۇرۇپپىلاش سانىغا تەڭ بولىدۇ، شۇڭا ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى:

$$C_{100}^{3}=\frac{100\times99\times98}{3\times2\times1}=161\,700.$$

(2) 2 ناچار مەھسۇلات ئىچىدىن 1 ناچار مەھسۇلات ئېلىشنىڭ ئۇسۇلى C_2^1 خىل، 98 مەھسۇلات ئىچىدىن 2 لاياقەتلىك مەھسۇلات ئېلىشنىڭ ئۇسۇلى C_{98}^2 خىل بولغانلىقتىن، ئېلىنغان 3 مەھسۇلات ئىچىدە دەل 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$C_2^1\cdot C_{98}^2=9506.$$

(3) **1 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى:** 100 مەھسۇلات ئىچىدىن ئېلىنغان 3 مەھسۇلات ئىچىدە كەم دېگەندە 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇش دېگەنلىك، 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇش ۋە 2 سى ناچار مەھسۇلات بولۇشتىن ئىبارەت ئىككى ئەھۋالنى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. (2) تارماق مىسالدا 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى $C_2^1\cdot C_{98}^2$ خىل بولىدىغانلىقى تېپىلدى، شۇڭا تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئېلىنغان 3 مەھسۇلات ئىچىدە كەم دېگەندە 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى:

$$C_2^1\cdot C_{98}^2+C_2^2\cdot C_{98}^1=9\,604.$$

2 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى: 3 مەھسۇلات ئىچىدە كەم دېگەندە 1 ى ناچار مەھسۇلات بولۇشتىكى ئېلىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى دېگىنىمىز، 100 مەھسۇلات ئىچىدىن 3 نى ئېلىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانىدىن 3 مەھسۇلاتنىڭ ھەممىسى لاياقەتلىك مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانىنى ئېلىۋەتكەنگە باراۋەر كېلىدۇ، يەنى

$$C_{100}^3-C_{98}^3=161\,700-152\,096=9604.$$

مەشىق

1. A، B، C، D تۆت پۇتبول كوماندىسى يەككە ئايلانما مۇسابىقىسى ئۆتكۈزدى:

(1) ھەرقايسى مەيدان مۇسابىقىلەرگە قاتنىشىدىغان ئىككى تەرەپ كوماندىلىرىنى يېزىپ چىقىڭ؛

(2) چېمپىيونلۇق ۋە ئىككىنچىلىكنى ئېلىشنىڭ بارلىق مۇمكىن بولىدىغان ئەھۋاللىرىنى يېزىپ چىقىڭ.

2. تەكشىلىكتىكى A، B، C، D تۆت نۇقتا ئىچىدىكى ھەرقانداق 3 نۇقتىنىڭ بىر تۈز سىزىق ئۈستىدە ياتمايدىغانلىقى بېرىلگەن، ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى ھەر 3 نۇقتىنى چوققا قىلغان بارلىق ئۈچبۇلۇڭلارنى يېزىپ چىقىڭ.

3. مەكتەپ 6 تۈرلۈك تاللىما دەرسلىك تەسىس قىلدى. ئەگەر ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ بۇلاردىن 3 نى تاللىشى تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تالاش ئۇسۇلى بار؟

4. 3، 5، 7، 11 دىن ئىبارەت تۆت تۈپ سان ئىچىدىكى خالىغان 2 سى كۆپەيتىلسە، ئۆزئارا تەڭ بولمىغان كۆپەيتمىلەردىن قانچىسى كېلىپ چىقىدۇ؟

5. ھېسابلاڭ ھەمدە نەتىجىڭىزنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تەكشۈرۈڭ:

(1) C_6^2;　(2) C_8^3;　(3) $C_7^3-C_6^2$;　(4) $3C_8^3-2C_5^2$.

6. $C_n^m=\frac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$ نى ئىسپاتلاڭ.

گۇرۇپپىلاش سانىنىڭ ئىككى خۇسۇسىيىتى

تۆۋەندە بېرىلگەن ھەربىر گۇرۇپپىدىكى گۇرۇپپىلاش سانلىرىنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ، نېمىنى بايقىدىڭىز؟ بايقىغىنىڭىزنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

$$C_{12}^4,\ C_{12}^8;\quad C_{18}^3,\ C_{18}^{15};\quad C_{10}^7,\ C_{10}^3,\ \cdots$$

بايقاش تەس ئەمەسكى، ھەرقايسى گۇرۇپپىلاردىكى ئىككى گۇرۇپپىلاش سانى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە ئىككى گۇرۇپپىلاش سانىنىڭ يۇقىرى ئىندېكسلىرىنىڭ يىغىندىسى تۆۋەن ئىندېكسقا تەڭ بولىدۇ، مەسىلەن،

$$4+8=12,\quad 3+15=18,\quad 7+3=10,\ \cdots$$

بۇ نەتىجىنى قانداق چۈشەندۈرۈش كېرەك؟

«تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىدە ئوخشاش بىر مەسىلىنىڭ ئىككى خىل تەڭ كۈچلۈك چۈشەندۈرۈلۈشى بېرىلگەن» دېگەن بۇ بىر جۈملە سۆز بىزنى شۇنداق ئىلھاملاندۇرىدۇكى، ئەگەر C_{12}^4 نى «12 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 4 نى تاللاپ مەلۇم پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇشتىكى تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى» دەپ چۈشەندۈرسەك، ئۇ ھالدا C_{12}^8 نى «12 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن پائالىيەتكە قاتناشمايدىغان 8 نى قالدۇرۇپ قويۇشتىكى تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى» دەپ چۈشەندۈرۈشكە بولىدۇ. 8 ئوقۇغۇچى قالدۇرۇپ قويۇلغاندىن كېيىن، قالغان 4 ى پائالىيەتكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىلار بولىدۇ، شۇڭا پائالىيەتكە قاتناشمايدىغان ئوقۇغۇچىلارنى تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى C_{12}^8 پائالىيەتكە قاتنىشىدىغان ئوقۇغۇچىلارنى تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى C_{12}^4 كە تەڭ بولىدۇ، يەنى

$$C_{12}^4=C_{12}^8.$$

ئومۇمەن، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىن كېيىن، چوقۇم $n-m$ دانە ئېلېمېنت ئېشىپ قالىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش بىلەن قېپقالغان $n-m$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش بىرگە بىر ماس كېلىدۇ. شۇنداق قىلىپ، ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن m دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى مۇشۇ ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن $n-m$ دانە ئېلېمېنتنى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانىغا تەڭ بولىدۇ. دېمەك:

1 ـ خۇسۇسىيەت

$$C_n^m=C_n^{n-m}.$$

$C_n^0=1$ بولغانلىقتىن، يۇقىرىقى تەڭلىك $m=n$ بولغاندىمۇ كۈچكە ئىگە بولىۋېرىدۇ.

1 ـ خۇسۇسىيەتنى كەلتۈرۈپ چىقارغاندا، گۇرۇپپىلاشقا دائىر تەڭلىكلەرنى ئىسپاتلاشتا كۆپ قوللىنىلىدىغان بىر مۇھىم ئۇسۇلدىن پايدىلاندۇق. بۇ ئۇسۇلنى تۆۋەندىكىدەك بايان قىلىشقا بولىدۇ: تەڭلىكنىڭ ئىككى تەرىپىدىكى ئوخشاش بولمىغان ئىپادىلەر ئەمەلىيەتتە ئوخشاش بىر گۇرۇپپىلاش مەسىلىسىگە قارىتىلغان ئىككى خىل ساناش لايىھىسى ئىكەنلىكىنى شەرھلەپ، بۇ ئارقىلىق ئىسپاتلاش مەقسىتىگە يېتىش.

ئىزدىنىش

يۇقىرىدىكى ئىدىيىۋى ئۇسۇلغا ئاساسەن، گۇرۇپپىلاش سانىنىڭ تۆۋەندىكى خۇسۇسىيىتىنى تۇر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىيالامسىز؟

2 ـ خۇسۇسىيەت

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.$$

2.1 ـ كۈنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ:

(1) $5A_5^3+4A_4^2$;　　(2) $A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4$.

2. ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ:

(1) C_{15}^3;　　(2) C_{200}^{197};

(3) $C_6^3\div C_8^4$;　　(4) $C_{n+1}^n\cdot C_n^{n-2}$.

3. ئىسپاتلاڭ:

(1) $A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=n^2A_{n-1}^{n-1}$;

(2) $\dfrac{(n+1)!}{k!}-\dfrac{n!}{(k-1)!}=\dfrac{(n-k+1)\cdot n!}{k!}\ (k\leqslant n)$.

4. پويىز ئىستانسىسىنىڭ 8 ئاچا يولىدا ئوخشاش بولمىغان 4 پويىزنى توختىتىشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل توختىتىش ئۇسۇلى بار (بۇ يەردە ھەربىر ئاچا يولدا پەقەت بىر پويىز توختىتىشقا بولىدۇ دەپ پەرەز قىلىنىدۇ)؟

5. بىر ھۆججەتلىك فىلىم 4 ئىدارىدە نۆۋەتلەشتۈرۈپ قويۇلماقچى. ھەربىر ئىدارىدە 1 مەيدان قويۇلسا، قانچە خىل نۆۋەتلەشتۈرۈپ قويۇش تەرتىپى بار؟

6. بىر ئوقۇغۇچىنىڭ ئوخشاش بولمىغان 20 كىتابى بار. بۇ كىتابلارنى بىرلا قەۋىتى پار كىتاب جازىسىغا تىزىشتا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تىزىش ئۇسۇلى بار؟

7. مەكتەپ سەنئەت كېچىلىكىدە ئورۇندىلىدىغان 11 نومۇرنىڭ ئورۇندىلىش تەرتىپىنى ئورۇنلاشتۇرماقچى. 1 - نومۇر بىلەن ئاخىرقى 1 نومۇر بېكىتىلىپ بولغاندىن سىرت، 4 مۇزىكا نومۇرنىڭ 2 - ، 5 - ، 7 - ، 10 - ئورۇندا بولۇشى، 3 ئۇسسۇل نومۇرنىڭ 3 - ، 6 - ، 9 - ئورۇندا بولۇشى، 2 ئەلنەغمە نومۇرنىڭ 4 - ، 8 - ئورۇندا بولۇشى تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇلى بار؟

8. $n\times n$ دانە ساندىن ھاسىل قىلىنغان كۋادرات ماترىتسانىڭ ئەڭ يۇقىرىقى يولىدا ئوخشاش بولمىغان n دانە سان بار. مۇشۇ n دانە ساننى ئوخشاش بولمىغان تەرتىپتە تىزىش ئارقىلىق قالغان ھەممە يوللارنى ھاسىل قىلىپ، خالىغان ئىككى يولنىڭ تەرتىپىنى ئوخشاش ئەمەس قىلغىلى بولامدۇ؟ ئەگەر بىر سانلىق ماترىتسانىڭ m يولى بار بولۇپ، ھەربىر يولىدا ئوخشاش بولمىغان n دانە سان بولسا، ئۇنىڭ ھەربىر يولىدا تەكرارلىنىشنىڭ بولماسلىقى ئۈچۈن، m ئەڭ چوڭ بولغان قانداق قىممەتنى ئېلىشى كېرەك؟

9. چەمبەر ئۈستىدە ياتقان 10 نۇقتا بار:

(1) ھەر 2 نۇقتا ئارقىلىق بىر خوردا ئۆتكۈزسەك، جەمئىي قانچە خوردا ئۆتكۈزگىلى بولىدۇ؟

(2) ھەر 3 نۇقتا ئارقىلىق چەمبەرگە ئىچتىن تېگىشكەن ئۈچبۇلۇڭدىن بىرنى سىزساق، بۇنداق ئۈچبۇلۇڭدىن قانچىنى سىزغىلى بولىدۇ؟

10. (1) كۆپۈنگۈ بەش تەرەپلىكنىڭ قانچە دىئاگونالى بار؟

(2) كۆپۈنگۈ n تەرەپلىكنىڭ قانچە دىئاگونالى بار؟

11. بىر يۈەن، ئىككى يۈەن، بەش يۈەن، ئون يۈەنلىك خەلق پۇلىنىڭ ھەرقايسىسىدىن 1 ى بار بولسا، ئۇلاردىن جەمئىي قانچە خىل پۇل قىممىتى ھاسىل قىلغىلى بولىدۇ؟

12. (1) بوشلۇقتا 8 نۇقتا بار بولۇپ، ئۇلارنىڭ ئىچىدىكى ھەرقانداق 4 نۇقتا تەكشىلىكداش ئەمەس، بۇ 8 نۇقتا ئىچىدىكى ھەر 3 نۇقتا ئارقىلىق بىر تەكشىلىك ئۆتكۈزسەك، جەمئىي قانچە تەكشىلىك ئۆتكۈزگىلى بولىدۇ؟

(2) بوشلۇقتا 10 نۇقتا بار بولۇپ، ئۇلار ئىچىدىكى ھەرقانداق 4 نۇقتا تەكشىلىكداش ئەمەس. بۇ 10 نۇقتا ئىچىدىكى ھەر 4 نۇقتىنى چوققا قىلىپ تۆت ياقلىق ھاسىل قىلساق، جەمئىي قانچە تۆت ياقلىق ھاسىل قىلغىلى بولىدۇ؟

13. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) 3 دانە ئېكسكۇرسىيە بېلىتى بار. 5 ئادەم ئىچىدىن 3 ئادەمنى بەلگىلەپ ئېكسكۇرسىيىگە ئەۋەتىشكە توغرا كەلسە، ئوخشاش بولمىغان بەلگىلەش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى ____ بولىدۇ؛

(2) ئوخشاش بولمىغان 5 بۇيۇمدىن 3 نى تاللاپ 3 ئوقۇغۇچىغا بىردىن سوۋغا قىلىشتا ئوخشاش بولمىغان سوۋغا قىلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى ____ بولىدۇ؛

(3) 5 ئىشچى 3 كۈن ئىچىدىن 1 كۈننى ئۆز ئالدىغا تاللاپ دەم ئالسا، ئوخشاش بولمىغان تاللاش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى ____ بولىدۇ؛

(4) A توپلامدا m دانە ئېلېمېنت، B توپلامدا n دانە ئېلېمېنت بار. بۇ ئىككى توپلامنىڭ ھەرقايسىسىدىن 1 دانە ئېلېمېنتنى ئېلىشتا، ئوخشاش بولمىغان ئېلىش ئۇسۇلىنىڭ خىل سانى ____ بولىدۇ.

14. بىر قېتىملىق ئىمتىھاننىڭ تاللاپ ئىشلىنىدىغان سوئال قىسمىدا، بىرىنچى سوئالدىكى 4 تارماق سوئالدىن 3 نى تاللاپ ئىشلەش، ئىككىنچى سوئالدىكى 3 تارماق سوئالدىن 2 سىنى تاللاپ ئىشلەش، ئۈچىنچى سوئالدىكى 2 تارماق سوئالدىن 1 نى تاللاپ ئىشلەش تەلەپ قىلىنسا، بۇنىڭدا ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

15. 5 ئوغۇل ئوقۇغۇچى ۋە 4 قىز ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 4 نى تاللاپ مۇنازىرە مۇسابىقىسىگە قاتناشتۇرۇشتا:

(1) ئەگەر ئوغۇل ئوقۇغۇچىلار بىلەن قىز ئوقۇغۇچىلارنىڭ ھەرقايسىسىدىن 2 سىنى تاللاشقا توغرا كەلسە، قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

(2) ئەگەر ئوغۇل ئوقۇغۇچىلار ئىچىدىكى «ئا» ئوقۇغۇچى بىلەن قىز ئوقۇغۇچىلار ئىچىدىكى «ب» ئوقۇغۇچىنىڭ چوقۇم قاتنىشىشى تەلەپ قىلىنسا، قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

(3) ئەگەر ئوغۇل ئوقۇغۇچىلار ئىچىدىكى «ئا» ئوقۇغۇچى بىلەن قىز ئوقۇغۇچىلار ئىچىدىكى «ب» ئوقۇغۇچىنىڭ كەم دېگەندە بىرى قاتنىشىشى تەلەپ قىلىنسا، قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

(4) ئەگەر 4 ئوقۇغۇچىنىڭ ئىچىدە چوقۇم ھەم ئوغۇل ئوقۇغۇچى، ھەم قىز ئوقۇغۇچىنىڭ بولۇشى تەلەپ قىلىنسا، قانچە خىل تاللاش ئۇسۇلى بار؟

16. 6 ئادەم مەلۇم پائالىيەتكە قاتنىشىشقا بىرلا ۋاقىتتا تەكلىپ قىلىندى. ئەگەر بۇ پائالىيەتكە چوقۇم ئادەم بېرىشى كېرەك بولسا ھەمدە قانچە ئادەم بېرىشنى ئۇلارنىڭ ئۆزلىرى بەلگىلىسە، ئوخشاش بولمىغان جەمئىي قانچە خىل بېرىش ئۇسۇلى بار؟

17. 200 مەھسۇلاتنىڭ ئىچىدە 2 ناچار مەھسۇلات بار. ئۇلارنىڭ ئىچىدىن خالىغان 5 نى ئالغاندا:

(1) «دەل 2 سى ناچار مەھسۇلات» بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل بولىدۇ؟

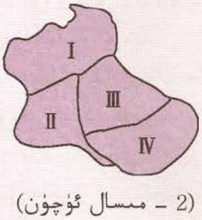
(2) «دەل 1 ى ناچار مەھسۇلات» بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل بولىدۇ؛

(3) «ناچار مەھسۇلات چىقمايدىغان» بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل بولىدۇ؟

(4) «كەم دېگەندە 1 ى ناچار مەھسۇلات» بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل بولىدۇ؟

B گۇرۇپپا

1. مەلۇم پاراۋانلىق لاتارىيە لايىھەسىدە، 1 دىن 37 گىچە بولغان 37 رەقەم ئىچىدىن 7 رەقەم تاللىۋېلىنىپ، تاللىۋېلىنغان بۇ 7 رەقەم ئېچىلغان 7 رەقەم بىلەن ئوخشاش بولسىلا (رەقەملەرنىڭ تىزىلىش تەرتىپى نەزەرگە ئېلىنمايدۇ)، 1 ـ دەرىجىلىك مۇكاپات چىقىدۇ. ئۇنداق بولسا، لاتارىيە بېلىتىدىن قانچىنى سېتىۋالغاندا 1 ـ دەرىجىلىك مۇكاپاتقا ئېرىشكىلى بولىدۇ؟ ئەگەر 1 ـ دەرىجىلىك مۇكاپاتقا ئېرىشىش پۇرسىتى $\frac{1}{6\ 000\ 000}$ دىن يۇقىرى، ئەمما $\frac{1}{500\ 000}$ دىن ئېشىپ كەتمەيدىغان قىلىپ ئاشۇرۇلسا، 37 سان ئىچىدىن قانچە سان تاللىۋېلىنىدىغان قىلىپ بېكىتىلىشى كېرەك؟



(2 ـ مىسال ئۈچۈن)

2. سولدىكى رەسىمنىڭ تۆت بۆلىكىنى ئوخشاش بولمىغان بەش خىل رەڭ بىلەن بوياشتا، ئورتاق تەرەپكە ئىگە ئىككى بۆلەكنى بىر خىل رەڭ بىلەن بوياشقا بولماسلىق تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل بوياش ئۇسۇلى بار؟

3. 1، 3، 5، 7، 9 لاردىن خالىغان 3 رەقەمنى، 2، 4، 6، 8 لەردىن خالىغان 2 رەقەمنى ئېلىپ، تەكرار رەقىمى بولمىغان بەش خانىلىق ساندىن جەمئىي قانچىنى تۈزۈشكە بولىدۇ؟

4. «ئا»، «ب»، «س»، «د»، «ئې» دىن ئىبارەت بەش ئوقۇغۇچى ئوتتۇرىسىدا ئېلىپ بېرىلغان مەلۇم ئەمگەك تېخنىكىسى مۇسابىقىسىدە، بىرىنچىدىن بەشىنچىگىچە بولغانلارنىڭ تەرتىپى ئېنىقلانغاندىن كېيىن، «ئا»، «ب» ئىككى ئوقۇغۇچى ئۆزىنىڭ نەتىجىسىنى سورىغاندا، جاۋاب بەرگۈچى «ئا» غا «ناھايىتى ئەپسۇس، سىز بىلەن «ب» ھەر ئىككىڭلار چېمپىيون بولالمىدىڭلار»؛ «ب» غا «سىز ئەلۋەتتە ئەڭ ناچىرى ئەمەس» دېگەن. بۇ جاۋابلارنى تەھلىل قىلغاندا، بەش ئادەمنىڭ تەرتىپىنىڭ ئوخشاش بولمىغان قانچە خىل ئەھۋالى بولۇشى مۇمكىن؟

5. $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$ نىڭ مەنىسىنى بىر ئەمەلىي ئارقا كۆرۈنۈش بەرپا قىلىش ئارقىلىق چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى 3-1

1-3-1 ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى

ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى "$(a+b)^n$" نىڭ يېيىلمىسىنى تەتقىق قىلىشتا ئىشلىتىلىدۇ. "$(a+b)^n$" نىڭ يېيىلمىسى دېگىنىمىز زادى نېمە؟ بىزنىڭ بۇ يېيىلمىنى ساناش پرىنسىپى دېگەن بابتا ئۆگىنىدىغانلىقىمىز ئۇنىڭ تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى، ئورۇنلاشتۇرۇش ۋە گۇرۇپپىلاشقا دائىر بىلىملەر بىلەن مۇناسىۋەتلىك ئىكەنلىكىدىن دېرەك بېرىدۇ. ئۇنداق بولسا، ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسى بىلەن بۇ بىلىملەرنى قانداق باغلاشتۇرۇش كېرەك؟

ئىزدىنىش

$(a+b)^2$ ،$(a+b)^3$ ،$(a+b)^4$ نىڭ يېيىلمىسىنى ئىككى ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلىنىپ قانداق كەلتۈرۈپ چىقىرىش كېرەك؟ بۇنىڭغا ئاساسەن، "$(a+b)^n$" نىڭ يېيىلمىسىنىڭ قانداق بولىدىغانلىقىنى قىياس قىلالامسىز؟

بىز تولۇقسىز ئوتتۇرا مەكتەپتە $(a+b)^2$ نىڭ يېيىلمىسىنى كۆپ ئەزالىقلارنى كۆپەيتىش قائىدىسىدىن پايدىلىنىپ كەلتۈرۈپ چىقارغانىدۇق:

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

يۇقىرىقى جەرياندىن $(a+b)^2$ نىڭ 2 دانە $(a+b)$ نىڭ كۆپەيتىلىشى ئىكەنلىكىنى كۆرەلەيمىز. كۆپ ئەزالىقلارنى كۆپەيتىش قائىدىسىگە ئاساسەن، ھەربىر $(a+b)$ غا كۆپەيتكەن چاغدا a نى تاللاش ياكى b نى تاللاشتىن ئىبارەت ئىككى خىل تاللاش بار بولۇپ، ھەربىر $(a+b)$ دىكى a ياكى b تاللىنىۋېلىنغاندىن كېيىن، ئاندىن يېيىلمىنىڭ بىر ئەزاسىغا ئېرىشكىلى بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، ئوخشاش ئەزالارنى ئىخچاملاشتىن بۇرۇن، $(a+b)^2$ نىڭ يېيىلمىسىدا جەمئىي $2\times2=2^2$ ئەزا بار بولىدۇ ھەممە ھەربىر ئەزا $a^{2-k}\cdot b^k$ $(k=0, 1, 2)$ كۆرۈنۈشتە بولىدۇ.

ئەمدى $a^{2-k}\cdot b^k$ كۆرۈنۈشتىكى ئوخشاش ئەزالارنىڭ سانىنى تەھلىل قىلايلى.

$k=0$ بولغاندا، $a^{2-k}\cdot b^k=a^2$ بولۇپ، ئۇ 2 دانە $(a+b)$ نىڭ ھەر ئىككىسىدىن b نىڭ تاللانمىغانلىقى-

دىن كېلىپ چىقىدۇ ھەمدە ئۇ 2 دانە $(a+b)$ ئىچىدىن 0 دانە b نى ئالغاندىكى (يەنى ئىككىسىدىن a نى ئالغاندىكى) گۇرۇپپىلاش سانى C_2^0 گە باراۋەر كېلىدۇ، شۇڭا a^2 نىڭ سانى پەقەت 1 بولىدۇ؛

$k=1$ بولغاندا، $a^{2-k}\cdot b^k=ab$ بولۇپ، ئۇ بىر $(a+b)$ دىن a نى، يەنە بىر $(a+b)$ دىن b نى تاللاشتىن كېلىپ چىقىدۇ. b تاللىنىۋېلىنغاندىن كېيىن، a نى تاللاش ئۇسۇلىمۇ ئۇنىڭغا ئەگىشىپ بەلگىلىنىدىغانلىقى ئۈچۈن، ab نىڭ كۆرۈلۈش قېتىم سانى 2 دانە $(a+b)$ ئىچىدىن 1 دانە b نى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانىغا باراۋەر كېلىدۇ، يەنى ab نىڭ سانى C_2^1 بولىدۇ؛

$k=2$ بولغاندا، $a^{2-k}\cdot b^k=b^2$ بولۇپ، ئۇ 2 دانە $(a+b)$ نىڭ ھەر ئىككىسىدىن b نى تاللاشتىن كېلىپ چىقىدۇ ھەمدە 2 دانە $(a+b)$ ئىچىدىن 2 دانە b نى تاللىغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى C_2^2 گە باراۋەر كېلىدۇ. شۇڭا، b^2 نىڭ سانى پەقەت 1 بولىدۇ.

يۇقىرىقى تەھلىلدىن تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

$$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2.$$

ئىزدىنىش

يۇقىرىدىكى جەريانغا تەقلىد قىلىپ، $(a+b)^3$، $(a+b)^4$ نىڭ يېيىلمىسىنى ئۆزىڭىز كەلتۈرۈپ چىقىرالامسىز؟

يۇقىرىدىكى كونكرېت مەسىلىلەرنى تەھلىل قىلىشتىن ئىلھام ئېلىپ، خالىغان مۇسبەت پۈتۈن سان n غا نىسبەتەن تۆۋەندىكى قىياسنى ئوتتۇرىغا قويالايمىز:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n\ (n\in\mathbf{N}^*).$$

بۇ قىياسنى قانداق ئىسپاتلاش كېرەك؟

ئىسپات: $(a+b)^n$ دا n دانە $(a+b)$ ئۆزئارا كۆپەيتىلىدىغانلىقى ھەمدە ھەربىر $(a+b)$ غا كۆپەيتكەندە a نى تاللاش ياكى b نى تاللاشتىن ئىبارەت ئىككى خىل تاللاش بار بولۇپ، ھەربىر $(a+b)$ دىن a ياكى b تاللىنىۋېلىنغاندىن كېيىن، ئاندىن يېيىلمىنىڭ بىر ئەزاسىغا ئېرىشكىلى بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىش ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، ئوخشاش ئەزالارنى ئىخچاملاشتىن بۇرۇن، $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدا جەمئىي 2^n ئەزا بار بولىدۇ ھەمدە ھەربىر ئەزا $a^{n-k}b^k$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ كۆرۈنۈشتە بولىدۇ.

مەلۇم k $(k\in\{0, 1, 2, \cdots, n\})$ گە ماس كېلىدىغان ئەزا $a^{n-k}b^k$ غا $n-k$ دانە $(a+b)$ ئىچىدىن a نى، k دانە $(a+b)$ ئىچىدىن b نى تاللاش ئارقىلىق ئېرىشكىلى بولىدۇ. b تاللىنىۋېلىنغاندىن كېيىن، a نى تاللاش ئۇسۇلىمۇ ئۇنىڭغا ئەگىشىپ بەلگىلىنىدىغانلىقى ئۈچۈن، $a^{n-k}b^k$ نىڭ كۆرۈلۈش قېتىم سانى n دانە $(a+b)$ ئىچىدىن k دانە b نى ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش سانى C_n^k گە باراۋەر كېلىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدا، $a^{n-k}b^k$ نىڭ سانى جەمئىي C_n^k بولىدۇ، ئۇلاردىكى ئوخشاش ئەزالارنى ئىخچاملاش، تۆۋەندىكى ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسى كېلىپ چىقىدۇ:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n.$$

بۇ فورمۇلا **ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى** (binomial theorem) دەپ ئاتىلىدۇ.

كۆرەلەيمىزكى، $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدا جەمئىي $n+1$ ئەزا بار، ئۇنىڭدىكى ھەرقايسى ئەزالارنىڭ كوئېففىتسېنتى C_n^k $(k\in\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\})$ **ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتى** (binomial coefficient) دەپ ئاتىلىدۇ، يېيىلمىدىكى $C_n^k a^{n-k}b^k$ ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسىنىڭ **ئومۇمىي ئەزاسى** دەپ ئاتىلىپ، T_{k+1} بىلەن ئىپادىلىنىدۇ، يەنى ئومۇمىي ئەزا يېيىلمىدىكى $k+1$ ـ نچى ئەزا بولىدۇ:

$$\boxed{T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k.}$$

ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىدا، $a=1$، $b=x$ دەپ پەرەز قىلساق، تۆۋەندىكى فورمۇلا كېلىپ چىقىدۇ:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n.$$

1 ـ مىسال. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ نىڭ يېيىلمىسىنى تاپايلى.

تەھلىل: ئاسان بولۇشى ئۈچۈن، ئاۋۋال ئاددىيلاشتۇرۇۋېلىپ، ئاندىن يېيىلمىنى تاپىمىز.

يېشىش: ئەسلىي ئىپادىنى ئاددىيلاشتۇرۇپ، ئاندىن يايساق:

$$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6=\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)^6=\frac{1}{x^3}(2x-1)^6$$

$$=\frac{1}{x^3}[(2x)^6-C_6^1(2x)^5+C_6^2(2x)^4-C_6^3(2x)^3+C_6^4(2x)^2-C_6^5(2x)+C_6^6]$$

$$=\frac{1}{x^3}(64x^6-6\cdot 32x^5+15\cdot 16x^4-20\cdot 8x^3+15\cdot 4x^2-6\cdot 2x+1)$$

$$=64x^3-192x^2+240x-160+\frac{60}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

2 ـ مىسال. (1) $(1+2x)^7$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 4 ـ نچى ئەزانىڭ كوئېففىتسېنتىنى تاپايلى؛

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى x^3 نىڭ كوئېففىتسېنتىنى تاپايلى.

$(1+2x)^7$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 4 ـ نچى ئەزانىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتى $C_7^3=35$ بولىدۇ. ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسىدىكى مەلۇم بىر ئەزانىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتى بىلەن مۇشۇ ئەزانىڭ كوئېففىتسېنتى ئوخشاش بولمىغان ئىككى ئۇقۇمدۇر.

يېشىش: (1) $(1+2x)^7$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 4 ـ نچى ئەزا تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$T_{3+1}=C_7^3\cdot 1^{7-3}\cdot(2x)^3$$
$$=C_7^3\cdot 2^3\cdot x^3$$
$$=35\times 8x^3$$
$$=280x^3.$$

شۇڭا، يېيىلمىدىكى 4 ـ نچى ئەزانىڭ كوئېففىتسېنتى 280.

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئومۇمىي ئەزاسى:

$$C_9^r x^{9-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_9^r x^{9-2r}.$$

مىسالنىڭ مەنىسىگە ئاساسەن:

$$9-2r=3,$$
$$r=3.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، x^3 نىڭ كوئېففىتسېنتى:

$$(-1)^3C_9^3=-84.$$

مەشىق

1. $(p+q)^7$ نىڭ يېيىلمىسىنى يېزىڭ.
2. $(2a+3b)^6$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 3 ىنچى ئەزانى تېپىڭ.
3. $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى $r+1$ ىنچى ئەزانى يېزىڭ.
4. توغرا جاۋابنى تاللاڭ:

$(x-1)^{10}$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 6 ىنچى ئەزانىڭ كوئېففىتسېنتى (　　) بولىدۇ.

(A) C_{10}^6　　(B) $-C_{10}^6$　　(C) C_{10}^5　　(D) $-C_{10}^5$

2-3-1 «ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى» ۋە ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتنىڭ خۇسۇسىيىتى

ئىزدىنىش

$(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلارنى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ ھېسابلاڭ ھەم جەدۋەلگە تولدۇرۇڭ.

n	$(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتى						
1							
2							
3							
4							
5							
6							

ھېسابلاش ۋە جەدۋەل تولدۇرۇش ئارقىلىق قانداق قانۇنىيەتنى بايقىدىڭىز؟

يۇقىرىقى جەدۋەلدىن ھەربىر توغرا قۇردىكى كوئېففىتسېنتلار سىممېترىكلىككە ئىگە ئىكەنلىكىنى كۆرۈۋالايمىز. ئۇنداق بولسا، يەنە قانداق قانۇنىيەتلەر باردۇ؟ كۆزىتىشكە ئاسان بولسۇن ئۈچۈن، جەدۋەلنى تۆۋەندىكىدەك يېزىۋالىمىز:

$(a+b)^1$ ······························ 1 1

$(a+b)^2$ ···························· 1 2 1

$(a+b)^3$ ·························· 1 3 3 1

$(a+b)^4$ ························ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ ······················ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6$ ···················· 1 6 15 20 15 6 1

······································

ئىپادىلىنىش شەكلىنى ئۆزگەرتىۋالساق، بەزىدە قانۇنىيەتلەرنى بايقىشىمىزغا ئاسانلىق تۇغۇلىدۇ.

ئىزدىنىش

يۇقىرىقى ئىپادىلەش شەكلىگە تايىنىپ، بەزى يېڭى قانۇنىيەتلەرنى بايقىيالامسىز؟

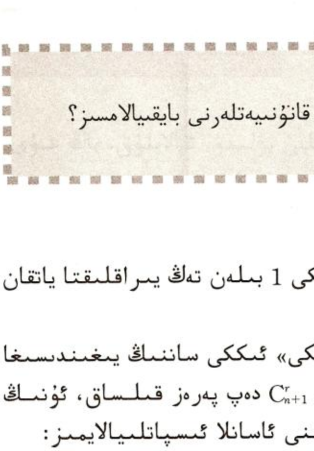
بۇ جەدۋەلگە نۇرغۇن قانۇنىيەتلەر يوشۇرۇنغان، مەسىلەن:

ئوخشاش بىر قۇردا، ھەربىر قۇرنىڭ ئىككى ئۇچى 1 بولۇپ، بۇ ئىككى 1 بىلەن تەڭ يىراقلىقتا ياتقان ئەزالارنىڭ كوئېففىتسېنتى ئۆزئارا تەڭ بولىدۇ؛

قوشنا ئىككى قۇردا، 1 دىن باشقا ھەربىر سان ئۈزىنىڭ «يەلكىسىدىكى» ئىككى سانىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدۇ. ئەمەلىيەتتە، جەدۋەلدىكى 1 دىن باشقا خالىغان بىر سانىنى C_{n+1}^r دەپ پەرەز قىلساق، ئۇنىڭ يەلكىسىدىكى ئىككى سان ئايرىم ـ ئايرىم C_n^r ۋە C_n^{r-1} بولىدۇ، تۆۋەندىكىنى ئاسانلا ئىسپاتلىيالايمىز:

$$C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r.$$

كۆرسىتىپ ئۆتۈش كېرەككى، بۇ جەدۋەلنى ئېلىمىزنىڭ جەنۇبىي سۇڭ سۇلالىسى دەۋرىدە ئۆتكەن ماتېماتىكا ئالىمى ياڭ خۇي 1261 ـ يىلى يازغان «توققۇز بابلىق ھېسابنامىگە ئىزاھات» دېگەن كىتابىدا ئوتتۇرىغا قويغان. ئوخشىمايدىغان يېرى بۇ يەردىكى جەدۋەل ئەرەب رەقەملىرى بىلەن ئىپادىلەنگەن، ياڭ خۇينىڭ كىتابىدا بولسا خەنزۇچە خەتلەر بىلەن خاتىرىلەنگەن (1.3.1 ـ رەسىم).



1.3.1 ـ رەسىم

بۇ جەدۋەل ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى دەپ ئاتىلىدۇ. «توققۇز بابلىق ھېسابنامىگە ئىزاھات» دېگەن بۇ كىتابتا جەدۋەلدىكى «—» دىن باشقا ھەربىر سانىنىڭ ئۆزىنىڭ يەلكىسىدىكى ئىككى سانىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ ئىكەنلىكى چۈشەندۈرۈلگەن، ياڭ خۇي بۇ ئۇسۇلنى «شىسو» دېگەن ھېساب كىتابىدىن ئالغانلىقىنى، ئېلىمىزنىڭ شىمالىي سۇڭ سۇلالىسى دەۋرىدىكى ماتېماتىكا ئالىمى جيا شيەن (تەخمىنەن مىلادىيە 11 ـ ئەسىر) بۇ ئۇسۇلدىن پايدىلانغانلىقىنى كۆرسىتىپ ئۆتكەن. بۇلار ئېلىمىزدە بۇ جەدۋەلنىڭ بايقىلىشى 11 ـ ئەسىردىن كېيىن ئەمەسلىكىنى كۆرسىتىپ بېرىدۇ. ياۋروپالىقلار بۇ جەدۋەلنى فرانسىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى پاسكال (Blaise Pascal، 1623 ~ 1662) تۇنجى بولۇپ بايقىغان، دەپ قارايدۇ ۋە ئۇنى پاسكال ئۈچبۇلۇڭى دەپ ئاتايدۇ. دېمەك، ئېلىمىزدە ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى ياۋروپالىقلاردىن 500 يىللار ئىلگىرى بايقالغان، بۇنىڭدىن

كۆرەلەيمىزكى، ئىلمىمىزنىڭ قەدىمكى دەۋرىدىكى ماتېماتىكىغا ئائىت مۇۋەپپەقىيەتلىرى جۇڭخۇا مىللەتلىرىنىڭ پەخىرلىنىشىگە ئەرزىيدۇ.

$(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرى

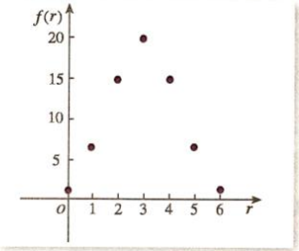
$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^n,$$

نى فۇنكسىيە تۇرغۇسىدىنمۇ تەتقىق قىلالايمىز. C_n^r نى ئەركىن ئۆزگەرگۈچى مىقدارى r بولغان فۇنكسىيە $f(r)$ دەپ قارىساق، ئۇنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسى

$$\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

بولىدۇ. n نىڭ قىممىتى ئېنىق بولغاندا، بىز يەنە بۇ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنىمۇ سىزالايمىز. مەسىلەن، $n=6$ بولغاندا، ئۇنىڭ گرافىكى 7 دانە تەنها نۇقتا بولىدۇ (2.3.1 ـ رەسىمدىكىدەك).

$n=7,\ 8,\ 9$ بولغاندىكى فۇنكسىيە گرافىكلىرىنى سىزىڭ. ئۇلارنىڭ قانداق ئوخشايدىغان ۋە ئوخشىمايدىغان تەرەپلىرىنىڭ بارلىقىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟



2.3.1 ـ رەسىم

تۆۋەندە «ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى» ۋە 2.3.1 ـ رەسىمگە بىرلەشتۈرۈپ، ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتنىڭ بەزىبىر خۇسۇسىيەتلىرىنى تەتقىق قىلىمىز.

(1) **سىممېترىكلىكى.** باش ۋە ئاخىرقى ئىككى ئۇچتىن «تەڭ يىراقلىقتا» ياتقان ئىككى دانە ئىككى ئەزالىقنىڭ كوئېففىتسېنتى ئۆزئارا تەڭ. بۇ خۇسۇسىيەتنى فورمۇلا $C_n^m=C_n^{n-m}$ دىن بىۋاسىتە كەلتۈرۈپ چىقىرىشقا بولىدۇ.

تۈز سىزىق $r=\frac{n}{2}$ فۇنكسىيە $f(r)$ نىڭ گرافىكىنى سىممېترىك بولغان ئىككى بۆلەككە ئايرىيدۇ، ئۇ گرافىكنىڭ سىممېترىك ئوقىدۇر.

(2) **ئېشىش ـ كېمىيىشچانلىقى ۋە ئەڭ چوڭ قىممىتى.**

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!\ k}$$

$$=C_n^{k-1}\frac{(n-k+1)}{k}$$

بولغانلىقتىن، C_n^k نىڭ C_n^{k-1} گە نىسبەتەن ئېشىش ـ كېمىيىش ئەھۋالى $\frac{(n-k+1)}{k}$ تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ.

$$\frac{(n-k+1)}{k}>1 \Leftrightarrow k<\frac{n+1}{2}$$

دىن بىلىشكە بولىدۇكى، $k<\frac{n+1}{2}$ بولغاندا، ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتى تەدرىجىي چوڭىيىدۇ.

سىممېترىكلىككە ئاساسەن ئۇنىڭ كېيىنكى يېرىم قىسمىنىڭ تەدرىجىي كىچىكلەيدىغانلىقىنى ھەمدە ئوتتۇرىدا ئەڭ چوڭ قىممەت ئالىدىغانلىقىنى بىلىشكە بولىدۇ. n جۈپ سان بولغاندا، ئوتتۇرىدىكى بىر ئەزا ئەڭ چوڭ قىممەت ئالىدۇ؛ n تاق سان بولغاندا، ئوتتۇرىدىكى ئىككى ئەزا $C_n^{\frac{n-1}{2}}$، $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ ئۆزئارا تەڭ ھەمدە بىرلا ۋاقىتتا ئەڭ چوڭ قىممەت ئالىدۇ.

(3) ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى.

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n$$ ❶

ئىكەنلىكى بىرىلگەن، $x=1$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n.$$

بۇ، $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى 2^n گە تەڭ ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرىدۇ.

❶ بۇ «گورۇپپىلانغان تەڭلىك» نى گورۇپپىلاش مەنىسىدىن چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

بۇ خۇسۇسىيەتلەردىن پايدىلىنىپ نۇرغۇن مەسىلىلەرنى ھەل قىلغىلى بولىدۇ. ئالايلۇق، ياڭ خۈي ئۈچبۇلۇڭىدىكى 1 دىن باشقا ھەربىر سان ئۈزىنىڭ يەلكىسىدىكى ئىككى ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدىغانلىقىدىن ئىبارەت بۇ خۇسۇسىيەتتىن پايدىلىنىپ، n غا ماس كېلىدىغان ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىغا ئاساسەن $n+1$ غا ماس كېلىدىغان ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنى يېزىپ چىقىشقا بولىدۇ. مەسىلەن، ياڭ خۈي ئۈچبۇلۇڭىدىكى $n=6$ گە ماس كېلىدىغان ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىغا ئاساسەن، $n=7$ گە ماس كېلىدىغان ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنى تۆۋەندىكىدەك يېزىپ چىقىشقا بولىدۇ:

1 7 21 35 35 21 7 1

ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرى جەدۋىلىنى مۇشۇنداق كېڭەيتىپ، بۇ جەدۋەلگە ئاساسەن ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتىنى تېپىشقا بولىدۇ.

3 ـ **مىسال.** $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدا، تاق ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى جۈپ ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلايلى.

تەھلىل: تاق ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots,$$

جۈپ ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى:

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots,$$

ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسى:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n.$$

دىكى a، b❶ خالىغان ھەقىقىي سان ئالالايدىغانلىقى ئۈچۈن، a، b غا مۇۋاپىق قىممەت بېرىش ئارقىلىق يۇقىرىدىكى ئىككى كوئېففىتسېنتلار يىغىندىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز.

ئىسپات: يېيىلما

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$$

دا، $a=1$، $b=-1$ دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا:

❶ ئەمەلىيەتتە، a، b لارنىڭ قىممىتى خالىغان ھەقىقىي سان، خالىغان كۆپ ئەزالىق ياكى باشقا نەرسە بولسىمۇ بولىۋېرىدۇ. بىز a، b لارنىڭ قىممىتىنى كونكرېت مەسىلىنىڭ ئېھتىياجىغا ئاساسەن جانلىق تاللىساق بولىدۇ.

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n,$$

يەنى

$$0=(C_n^0+C_n^2+\cdots)-(C_n^1+C_n^3+\cdots),$$

شۇڭا:

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$$

دىمەك، $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدا، تاق ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى جۈپ ئەزالارنىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسىغا تەڭ.

ئەمەلىيەتتە

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n$$

نى x كە دائىر فۇنكسىيە، يەنى

$$f(x)=(1+x)^n$$
$$=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n$$

دەپ قارىساق، ئۇ ھالدا $f(-1)=0$ بولىدۇ، بۇنىڭغا ئاساسەن ئىسپاتلىماقچى بولغان نەتىجىنى ئاسانلا كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز.

مەشىق

1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) $(a+b)^n$ نىڭ ھەرقايسى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى ______ بولىدۇ؛

(2) $C_{11}^1+C_{11}^3+\cdots+C_{11}^{11}=$ ______ ;

(3) $\dfrac{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}{C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}}=$ ______ .

2. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$ (n جۈپ سان) نى ئىسپاتلاڭ.

3. n تەرتىپ بويىچە 1 دىن 10 غىچە قىممەتلەرنى ئالغاندىكى ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرى جەدۋىلىنى يېزىپ چىقىڭ.

«ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭى» دىكى بەزى سىرلار

ئالدىدا ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭىدىن پايدىلىنىپ ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسىنىڭ بەزى خۇسۇسىيەتلىرىنى مۇھاكىمە قىلدۇق. ئەمەلىيەتتە، ياڭ خۇي ئۈچبۇلۇڭىنىڭ يەنە نۇرغۇن قىزىقارلىق خۇسۇسىيەتلىرى بار. ئەمدى مۇشۇ خۇسۇسىيەتلەر ئۈستىدە ئىزدىنىپ كۆرەيلى.

0 ـ نچى قۇر	1
1 ـ نچى قۇر	1 1
2 ـ نچى قۇر	1 2 1
3 ـ نچى قۇر	1 3 3 1
4 ـ نچى قۇر	______
5 ـ نچى قۇر	______
6 ـ نچى قۇر	______
⋮	⋮
$n-1$ ـ نچى قۇر	$1 \quad C_{n-1}^{1} \quad C_{n-1}^{2} \quad \cdots \quad C_{n-1}^{r-1} \quad C_{n-1}^{r} \quad \cdots \quad C_{n-1}^{n-2} \quad 1$
n ـ نچى قۇر	______
⋮	⋮

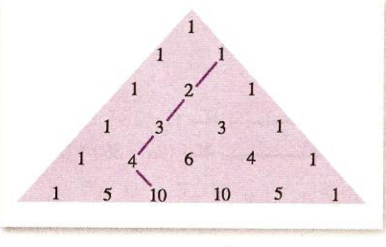
1. بۇ شەكىلنى كۆزىتىپ، ھەربىر قۇردىكى رەقەملەرنىڭ قانۇنىيىتىنى بايقىيالامسىز؟ بايقىغىنىڭىزنى بوش ئورۇنغا يېزىڭ.

يۇقىرىقى شەكىلنى كۆزىتىپ شۇنى بايقىيالايمىزكى، ياڭ خۇي ئۇچبۇلۇڭىنىڭ n ـ نچى قۇرى ئىككى ئەزالىق $(a+b)^n$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ كوئېففىتسېنتى بولىدۇ، يەنى

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n.$$

2. ياڭ خۇي ئۇچبۇلۇڭىنى كۆزىتىپ، بۇ ئۇچبۇلۇڭنى تەشكىل قىلغان ھەر ئىككى قوشنا قۇردىكى سانلار ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بارلىقىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

بايقاشقا بولىدۇكى، بۇ ئۇچبۇلۇڭنىڭ ئىككى يېنى رەقەم 1 لەردىن تەركىب تاپقان بولۇپ، قالغان سانلار ئۆزىنىڭ يەلكىسىدىكى ئىككى ساننىڭ يىغىندىسىغا تەڭ.



1 ـ رەسىم

3. 1 ـ رەسىمدىكىدەك، تۇتاشتۇرۇش سىزىقى ئۈستىدىكى سانلارنى كۆزىتىپ قانداق قانۇنىيەتنى بايقىيالىدىڭىز؟ ئۆزىڭىز يەنە بەزى سانلارنى تۇتاشتۇرۇپ سىناپ بېقىڭ.

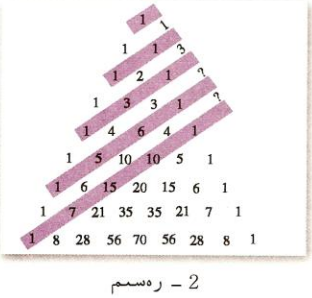
ئۆزىڭىز بايقىغان قانۇنىيەتكە ئاساسەن، تۆۋەندىكى سانلار ئارقىمۇئارقىلىقلىرىنىڭ ئالدىنقى بىرقانچە ئەزاسى يىغىندىسىنى قىياس قىلىپ بېقىڭ:

$1+2+3+\cdots+C_{n-1}^{1}=$ ______ ,

$1+3+6+\cdots+C_{n-1}^{2}=$ ______ ,

$1+4+10+\cdots+C_{n-1}^{3}=$ ______ ,

……



2 ـ رەسىم

ئومۇمەن،

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_{n-1}^r= \text{______} . \quad (n>r)$$

ئەمەلىيەتتە، يۇقىرىدىكى تەڭلىكنى ماتېماتىكىلىق ئىندۇكسىيە ئۇسۇلىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلىغىلى بولىدۇ.

4. 2 ـ رەسىمدىكى يانتۇ قۇرلارغا قاراڭ، ياڭ خۇي ئۇچبۇلۇڭىدا ئالدىنقى بىرقانچە يانتۇ قۇردىكى رەقەملەرنىڭ

يىغىندىسى يانتۇ قۇرلارنىڭ ئاخىرىدا بېرىلگەن، ئەمدى «?» بار ئورۇنلارغا قالغان قۇرلاردىكى رەقەملەرنىڭ يىغىندىسىنى يېزىپ، بۇ يىغىندىلارنى ئىنچىكىلىك بىلەن كۆزىتىڭ، نېمىنى بايقىيالىدىڭىز؟

بۇ بىرقانچە قۇردىكى رەقەملەرنىڭ تىزىلىش قانۇنىيىتىدىن سىرت، يەنە باشقا رەقەملەرنىڭ تىزىلىش قانۇنىيىتىنى تاپالامسىز؟ ساۋاقداشلىرىڭىز بىلەن بۇ ھەقتە پىكىر ئالماشتۇرۇڭ.

3.1 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. (1) $0<p<1$ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، $(p+(1-p))^n$ نىڭ يېيىلمىسىنى يېزىڭ؛

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n$ نىڭ يېيىلمىسىنى يېزىڭ.

2. ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ تۆۋەندىكىلەرنى يېيىڭ:

(1) $(a+\sqrt[3]{b})^9$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$.

3. ئاددىيلاشتۇرۇڭ:

(1) $(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5$;

(2) $(2x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})^4-(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}})^4$.

4. (1) $(1-2x)^{15}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئالدىنقى 4 ئەزاسىنى تېپىڭ؛

(2) $(2a^3-3b^2)^{10}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئوتتۇرىدىكى 8 ـ ئەزاسىنى تېپىڭ؛

(3) $\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئوتتۇرىدىكى بىر ئەزاسىنى تېپىڭ؛

(4) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^{15}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئوتتۇرىدىكى ئىككى ئەزاسىنى تېپىڭ.

5. تۆۋەندىكى ئىپادىلەرنىڭ ئىككى ئەزالىق يېيىلمىسىدا، كۆرسىتىلگەن ھەرقايسى ئەزانىڭ كوئېففىتسىيېنتىنى تېپىڭ:

(1) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ نىڭ $\frac{1}{x^5}$ نى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئەزاسى؛

(2) $\left(2x^3-\frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ نىڭ ئازاد ئەزاسى.

6. ئىسپاتلاڭ:

(1) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئازاد ئەزاسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$(-2)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)}{n!};$$

(2) $(1+x)^{2n}$ نىڭ يېيىلمىسىنىڭ ئوتتۇرىدىكى بىر ئەزاسى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)}{n!}(2x)^n.$$

7. فۇنكسىيە $f(r)=C_7^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 7)$ نىڭ گرافىكىنى «ياڭ خۈي ئۈچبۇلۇڭى» دىن پايدىلىنىپ سىزىڭ.

8. $(1+x)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 4 ىنچى ئەزا بىلەن 8 ىنچى ئەزانىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرى ئۆزئارا تەڭ ئىكەنلىكى بېرىلگەن، بۇ ئىككى ئەزانىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ:

(1) $(n+1)^n-1$ چوقۇم n^2 قا پۈتۈن بۆلۈنىدۇ؛

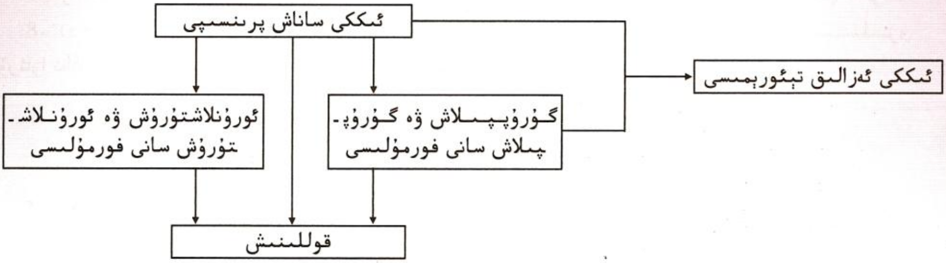
(2) $99^{10}-1$ چوقۇم 1000 غا پۈتۈن بۆلۈنىدۇ.

2. ئىسپاتلاڭ:

$$2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1.$$

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما رامكىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى ۋە باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى ساناشقا دائىر ئەڭ ئاساسىي ئىككى پرىنسىپتۇر.

بىر مۇرەككەپ مەسىلىگە دۇچ كەلگىنىمىزدە، بۇ مەسىلىنى تۈرگە ئايرىش ياكى باسقۇچقا بۆلۈش ئارقىلىق بەزى ئاددىي مەسىلىلەرگە ئاجرىتىۋالىمىز، بۇ ئاددىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىۋالغاندىن كېيىن، ئۇلارنى بىرلەشتۈرۈش ئارقىلىق پۈتكۈل مەسىلىنى ھەل قىلىپ، مۇرەككەپ مەسىلىلەرنى ئاددىي مەسىلىلەر بىلەن بىر تەرەپ قىلىش ئۈنۈمىگە ئېرىشىمىز، مانا بۇ، بىر خىل مۇھىم ھەم ئاساسىي ئىدىيىۋى ئۇسۇل بولۇپ، ئىككى ساناش پرىنسىپى دەل مۇشۇ خىل ئىدىيىنىڭ گەۋدىلەندۈرۈلۈشىدۇر.

يەنە بىر تەرەپتىن، توپلام تۈرغۇسىدىن ئويلاشساق، تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى تۆۋەندىكىدەك بىر پاكىتنى نامايان قىلىدۇ:

U توپلام ئىككى ـ ئىككىدىن ئۆزئارا كېسىشمەيدىغان قىسمىي توپلام S_1، S_2، ⋯، S_k غا بۆلۈنسە ھەمدە S_i $(i=1, 2, \cdots, k)$ لارنىڭ ئېلېمېنت سانى ئايرىم ـ ئايرىم n_i بولسا، ئۇ ھالدا U توپلامنىڭ ئېلېمېنت سانى:

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k.$$

2. سانلارنى قوشۇش ئەمىلى ۋە كۆپەيتىش ئەمىلى بىز ئەڭ پىششىق بىلىدىغان ئىككى خىل ئەمەلدۇر. ئەمەلىيەتتە، بۇ ئىككى خىل ئەمەل ئىنسانلارنىڭ ساناش پائالىيىتى جەريانىدا تەرەققىي قىلدۇرۇپ شەكىللەندۈرگەن ماھارىتى بولۇپ، ئۇلار ئىچىدىكى كۆپەيتىش ئەمىلى قوشۇشنىڭ ئاددىيلاشتۇرۇلۇشى ھېسابلىنىدۇ. مۇشۇ ئىككى خىل ماھارەتنى كېڭەيتىش ۋە تەرەققىي قىلدۇرۇش نەتىجىسىدە بىز بۇ بابتا ئۆگەنگەن تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى بىلەن باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى مەيدانغا كەلگەن. بۇ بابنى ئۆگەنگەندىن كېيىن، ئىككى ساناش پرىنسىپى بىلەن سانلارنى قوشۇش، كۆپەيتىش ئەمەللىرى ئارىسىدىكى باغلىنىشنى سۆزلەپ بېرەلەمسىز؟

3. تۈر بويىچە قوشۇپ ساناش پرىنسىپى «تۈرگە ئايرىلىدىغان» پائالىيەتكە ماس كېلىدۇ ھەمدە ھەر بىر تۈردىكى ئۇسۇللاردىن پايدىلىنىپ ماس ئىشنى ئورۇندىغىلى بولىدۇ. مەسىلەن، بىر قورۇغا كىرىش

ئۈچۈن بىر تامدىن ئۆتۈشكە توغرا كېلىدۇ دەيلى، ئەگەر بۇ تامنىڭ سول تەرىپىدە m ئىشىك، ئوڭ تەرىپىدە n ئىشىك بار بولسا، ئۇ هالدا قوروغا كىرىش ئۇسۇللىرىنىڭ سانى $m+n$ بولىدۇ. بۇ يەردىكى m، n لار ئايرىم ـ ئايرىم سول ۋە ئوڭ تەرەپتىن قوروغا كىرىش ئۇسۇللىرىنىڭ سانىنى ئىپادىلەيدۇ. تۈرگە ئايرىشتا ئەڭ مۇھىمى تەكرارلىماسلىق هەم چۈشۈرۈپ قويماسلىقتا دىققەت قىلىش كېرەك، بۇ تەلەپنى توپلام تىلى بىلەن بايان قىلالامسىز؟

4. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپى «باسقۇچقا بۆلۈنىدىغان» پائالىيەتكە ماس كېلىدۇ. هەمدە هەربىر باسقۇچنى تاماملاپ بولغاندىلا ئاندىن ماس ئىشنى ئورۇندىغىلى بولىدۇ. مەسىلەن، بىر قوروغا كىرىش ئۈچۈن ئىككى تامدىن ئۆتۈشكە توغرا كېلىدۇ دەيلى، ئەگەر بىرىنچى تامدا m ئىشىك، ئىككىنچى تامدا n ئىشىك بار بولسا، ئۇ هالدا قوروغا كىرىش ئۇسۇللىرىنىڭ سانى $m \cdot n$ بولىدۇ. بۇ يەردىكى m، n لار ئايرىم ـ ئايرىم بىرىنچى ۋە ئىككىنچى ئىشىكتىن ئۆتۈش ئۇسۇللىرىنىڭ سانىنى ئىپادىلەيدۇ. باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىنىڭ قوللىنىلىشىنى ئەمەلىي مىساللاردىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

5. ئورۇنلاشتۇرۇش بىلەن گۇرۇپپىلاش ئىككى تۈرلۈك ئالاھىدە ساناش مەسىلىسىدۇر.

ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ ئالاھىدىلىكى ئۇنىڭدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ «پەرقلىنىشچانلىقى» ۋە «تەرتىپچانلىقى» دا ئىپادىلىنىدۇ. مەسىلەن، «سىنىپتىكى 50 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 4 نى تاللاپ، ئۇلارنى ئايرىم ـ ئايرىم سىنىپ باشلىقى، ئۆگىنىش هەيئىتى، ئەدەبىيات ـ سەنئەت هەيئىتى ۋە تەنتەربىيە هەيئىتى قىلىپ تەيىنلەش» بىر ئورۇنلاشتۇرۇش مەسىلىسىدۇر. بۇ مەسىلە نېمە ئۈچۈن ئېلېمېنتلارنىڭ «پەرقلىنىشچانلىقى» ۋە «تەرتىپچانلىقى» دىن ئىبارەت ئالاھىدىلىككە ئىگە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

گۇرۇپپىلاشنىڭ ئالاھىدىلىكى ئۇنىڭدىكى ئېلېمېنتلارنىڭ پەقەت «پەرقلىنىشچانلىق» قىلا ئىگە بولۇپ، ئېلېمېنتلارنىڭ تەرتىپىنى ئويلىششىنىڭ زۆرۈرىيىتى يوقلۇقىدا ئىپادىلىنىدۇ. مەسىلەن، يۇقىرىقى مەسىلە «سىنىپتىكى 50 ئوقۇغۇچى ئىچىدىن 4 ۋەكىل سايلاپ بىر پائالىيەتكە قاتناشتۇرۇش» دەپ ئۆزگەرتىلسە، ئۇ بىر گۇرۇپپىلاش مەسىلىسىگە ئايلىنىدۇ. ماهىيەت جەھەتتىن ئېيتقاندا، «ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنت ئىچىدىن k دانە ئېلېمېنت ئالغاندىكى گۇرۇپپىلاش» مۇشۇ ئوخشاش بولمىغان n دانە ئېلېمېنتتىن تەركىب تاپقان توپلامنىڭ بىر k ئېلېمېنتلىق قىسمىي توپلىمى بولىدۇ.

ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسى ۋە گۇرۇپپىلاش سانى فورمۇلىسىنىڭ كەلتۈرۈپ چىقىرىلىشى ئىككى ساناش پرىنسىپىنىڭ بىر قوللىنىلىش جەريانى هېسابلىنىدۇ. بۇ كەلتۈرۈپ چىقىرىش جەريانىنى ئەسلىيەلەمسىز؟

6. گۇرۇپپىلاش سانى فورمۇلىسىنىڭ خۇسۇسىيىتىنى ئىسپاتلىغاندا «گۇرۇپپىلاشنىڭ مەنىسىنى بەرپا قىلىش» ئۇسۇلىنى قوللاندۇق، بۇ ئۇسۇلنىڭ ئاساسى ئوخشاش بىر مەسىلىنىڭ ئىككى خىل چۈشەندۈرۈلۈشىنى «يولى هەر خىل، نەتىجىسى بىر خىل» قىلىشتىن ئىبارەت. بىر مەسىلىگە دۇچ كەلگىنىمىزدە، كۆپ هاللاردا ئەسلىدە بار بىلىملىرىمىزدىن پايدىلىنىپ بۇ مەسىلىنى يېڭىۋاشتىن چۈشەندۈرۈشىمىزگە توغرا كېلىدۇ، بۇ جەريان ئەمەلىيەتتە مەسىلىنى چۈشىنىش جەريانى، نامەلۇمنى مەلۇمغا ئايلاندۇرۇش جەريانى بولۇپ، مەسىلىلەرنى هەل قىلىشتا كۆپ هاللاردا ئىنتايىن مۇھىم رول ئوينايدۇ.

7. ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسى

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$$

نى كەلتۈرۈپ چىقىرىشتا ئىككى ساناش پرىنسىپىدىن پايدىلاندۇق ھەمدە بۇ ئىككى پرىنسىپتىن پاي-دىلانغاندا كۆپ ئەزالىقلارنى كۆپەيتىش جەريانىدىكى: ھەربىر ئەزا $a^{n-k}b^k$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ كۆرۈنۈشتە بو-لىدۇ دېگەن تەجرىبىمىزگە تاياندۇق، ئاندىن $a^{n-k}b^k$ گە ئېرىشىش باسقۇچلىرىنى ئىككى ساناش پرىنسىپى بىلەن چۈشەندۈرۈپ، باشقا ئوخشاش ئەزالارنىڭ سانى C_n^k بولىدۇ دېگەن يەكۈننى كەلتۈرۈپ چىقاردۇق. بۇ جەريان ئەستايىدىل ئەسلەپ ئۆزلەشتۈرۈۋېلىشىمىزغا ئەرزىيدۇ.

8. ئىككى ساناش پرىنسىپى، ئورۇنلاشتۇرۇش سانى فورمۇلىسى، گۇرۇپپىلاش سانى فورمۇلىسى ۋە ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىنى كەلتۈرۈپ چىقىرىشتا، بىز باشتىن ـ ئاخىر بەزى ئاددىي، كونكرېت ئىشلارنى چىقىش قىلىپ، ئۇلاردىن ئومۇمىي خاراكتېرلىك مەسىلىلەرنى ھەل قىلىش تەجرىبىسىگە ئې-رىشىپ، ئومۇمىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىشتىكى پىكىر يولىنى بارلىققا كەلتۈردۇق. بۇمۇ ماتېماتىكا ۋە باشقا پەنلەرنى ئۆگىنىشتە ئەينەك قىلىشقا بولىدىغان دائىمىي ئۇسۇلدۇر.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مەسىلىلىرى

A گۇرۇپپا

1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) كۆپەيتمە $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$ نىڭ يېيىلمىسىدا جەمئىي ________ ئەزا بار.

(2) ئوقۇغۇچىلارنىڭ ئۆز يىللىقىدا تەسىس قىلىنغان 7 تاللىما دەرس ئىچىدىن خالىغان 3 نى، دەرستىن سىرتقى 6 خىل پائالىيەت گۇرۇپپىسى ئىچىدىن خالىغان 2 سىنى تاللىشىغا يول قويۇلسا، ئوخشاش بولمىغان تاللاش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ________ .

(3) 6 ناخشىچىنىڭ ناخشا نومۇرى ئورۇنداش تەرتىپىنى ئورۇنلاشتۇرۇشتا، مەلۇم ناخشىچىنىڭ بىرىنچى بولۇپ مەيدانغا چىقماسلىقى ھەم ئەڭ ئاخىردا مەيدانغا چىقماسلىقى تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ________ .

(4) 5 ئادەمگە ئورۇن نومۇرى يوق 4 پۇتبول بېلىتىنى تارقىتىپ بېرىشتە، ھەربىر ئادەمگە كۆپ بولغاندا 1 بېلەت بېرىش ھەمدە بېلەتلەرنى چوقۇم تارقىتىپ بولۇش تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان تارقىتىش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ______.

(5) 5 ئوقۇغۇچى بىرلا ۋاقىتتا ئۆتكۈزۈلىدىغان دەرستىن سىرتقى 3 بىلىم لېكسىيىسىنى ئاڭلىماقچى بولدى، ھەربىر ئوقۇغۇچىنىڭ بۇ 3 لېكسىيىنىڭ خالىغان بىرىنى تاللىشىغا يول قويۇلسا، ئوخشاش بولمىغان تاللاشلارنىڭ خىل سانى ________ .

(6) مۇنتىزىم 12 تەرەپلىكنىڭ دىئاگوناللىرىنىڭ سانى ________ .

(7) $(1+x)^{2n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى كوئېففىتسېنتى ئەڭ چوڭ بولغان ئەزا ________ ىنچى ئەزا بولىدۇ.

2. (1) رەقەم 1، 2، 3، 4، 5، 6 لەردىن پايدىلىنىپ تەكرار رەقىمى بولمىغان مۇسبەت پۈتۈن ساندىن قانچىنى تۈزگىلى بولىدۇ؟

(2) رەقەم 1، 2، 3، 4، 5، 6 لەردىن پايدىلىنىپ تەكرار رەقىمى بولمىغان ھەمدە 500 000 دىن چوڭ مۇسبەت پۈتۈن ساندىن قانچىنى تۈزگىلى بولىدۇ؟

3. (1) بىر توپلامنىڭ 8 ئېلېمېنتى بار بولسا، ئۇنىڭ تەركىبىدە 3 ئېلېمېنتى بار بولغان قىسمىي توپلىمىدىن قانچىسى بار؟

(2) بىر توپلامنىڭ 5 ئېلېمېنتى بار بولسا، ئۇنىڭ تەركىبىدە 1 ئېلېمېنتى، 2 ئېلېمېنتى، 3 ئېلېمېنتى، 4 ئېلېمېنتى بار بولغان قىسمىي توپلىمىدىن جەمئىي قانچىسى بار؟

4. بىر ئوقۇغۇچى 10 ساۋاقدىشى ئىچىدىن 6 سىنى مەلۇم پائالىيەتكە قاتنىشىشقا تەكلىپ قىلماقچى بولدى. بۇلارنىڭ ئىچىدىكى 2 ساۋاقداشنى يا بىراقلا تەكلىپ قىلىش، يا ھەر ئىككىسىنى تەكلىپ قىلماسلىقتا توغرا كەلسە، جەمئىي قانچە خىل تەكلىپ قىلىش ئۇسۇلى بار؟

5. (1) تەكشىلىكتە n تال تۈز سىزىق بار. ئۇلارنىڭ ئىچىدە 2 سى پاراللېل بولىدىغىنىمۇ يوق، شۇنداقلا 3 ى بىر نۇقتىدا كېسىشىدىغىنىمۇ يوق بولسا، جەمئىي قانچە كېسىشىش نۇقتىسى بار؟

(2) بوشلۇقتا n دانە تەكشىلىك بار. ئۇلارنىڭ ئىچىدە 2 سى پاراللېل بولىدىغىنىمۇ يوق، شۇنداقلا 3 ى بىر تۈز سىزىقتا كېسىشىدىغىنىمۇ يوق بولسا، جەمئىي قانچە كېسىشىش سىزىقى بار؟

6. 100 مەھسۇلاتنىڭ 97 سى لاياقەتلىك مەھسۇلات، 3 ى ناچار مەھسۇلات، بۇ 100 مەھسۇلات ئىچىدىن خالىغان 5 نى ئېلىپ تەكشۈرگەندە:

(1) ئېلىنغان 5 مەھسۇلاتنىڭ ھەممىسى لاياقەتلىك مەھسۇلات بولۇشىنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

(2) ئېلىنغان 5 مەھسۇلاتنىڭ دەل 2 سى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

(3) ئېلىنغان 5 مەھسۇلاتنىڭ كەم دېگەندە 2 سى ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېلىش ئۇسۇلى قانچە خىل؟

7. ئوخشاش بولمىغان 4 پارچە ماتېماتىكا كىتابى، ئوخشاش بولمىغان 5 پارچە فىزىكا كىتابى ۋە ئوخشاش بولمىغان 3 پارچە خىمىيە كىتابىنى كىتاب جازىسىنىڭ ئوخشاش بىر قەۋىتىگە تىزىشتا، ئوخشاش تۈردىكى كىتابلارنى ئايرىۋەتمەسلىك تەلەپ قىلىنسا، جەمئىي قانچە خىل تىزىش ئۇسۇلى بار؟

8. (1) $(1-2x)^5(1+3x)^4$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى x نىڭ دەرىجىسىنىڭ ئېشىشى بويىچە تىزىلغان 3 ـ ئەزانى تېپىڭ؛

(2) $\left(9x+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ئازاد ئەزانى تېپىڭ؛

(3) $(1+\sqrt{x})^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى 9 ـ، 10 ـ، 11 ـ ئەزانىڭ ئىككى ئەزالىق كوئېففىتسېنتلىرى تەڭ ئايرىملىق سانلار ئارقىمۇئارقىلىقى تۈزىدىغانلىقى بېرىلگەن، n نى تېپىڭ؛

(4) $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى x^4 نىڭ كوئېففىتسېنتىنى تېپىڭ.

9. $55^{55}+9$ نىڭ 8 گە پۈتۈن بۆلۈنىدىغانلىقىنى ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىدىن پايدىلىنىپ ئىسپاتلاڭ (كۆرسەتمە: $55^{55}+9=(56-1)^{55}+9$).

B گۇرۇپپا

1. بوش ئورۇننى تولدۇرۇڭ:

(1) ئەگەر $C_{n+1}^{n-1}=21$ بولسا، ئۇ ھالدا $n=$ ______ .

(2) مەلۇم سىنىپنىڭ تىل ـ ئەدەبىيات، ماتېماتىكا، سىياسەت، ئىنگلىز تىلى، تەنتەربىيە، سەنئەت قاتارلىق 6 دەرسىنىڭ بىر كۈنلۈك دەرس جەدۋىلىنى ئورۇنلاشتۇرۇشتا، ماتېماتىكا دەرسىنى چۈشتىن بۇرۇن (ئالدىنقى 4 دەرس سائىتى) غا، تەنتەربىيە دەرسىنى چۈشتىن كېيىن (كېيىنكى 2 دەرس سائىتى) گە ئورۇنلاشتۇرۇش تەلەپ قىلىنسا، ئوخشاش بولمىغان ئورۇنلاشتۇرۇش ئۇسۇللىرىنىڭ خىل سانى ______ .

(3) $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$، $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ توپلاملار بېرىلگەن بولسا، A توپلامدىن B توپلامغا بولغان ئوخشاش بولمىغان ئەكس ئېتىشتىن ______ نى، B توپلامدىن A توپلامغا بولغان ئوخشاش بولمىغان ئەكس ئېتىشتىن ______ نى تۈرغۇزغىلى بولىدۇ.

(4) بىر خىل ئاپتوموبىل نومۇرى 2 ئىنگلىزچە ھەرپنىڭ كەينىگە 4 رەقەم ئۇلىنىپ كېلىشتىن تەركىب تاپقان ھەمدە ئۇنىڭدىكى 2 ئىنگلىزچە ھەرپ ئوخشاش ئەمەس بولسا، ئوخشاش بولمىغان ئاپتوموبىل نومۇرلىرىنىڭ سانى ______ .

(5) كۇبنىڭ چوققىلىرىنى چوققا قىلغان ئۈچ قىرلىق پىرامىدالارنىڭ سانى ______ .

(6) $(1-2x)^n$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى ھەرقايسى ئەزالار كوئېففىتسېنتلىرىنىڭ يىغىندىسى ______ .

2. رەقەم 0، 1، 2، 3، 4، 5 لەردىن پايدىلىنىپ تەكرار رەقەمى بولمىغان سان تۈزۈشتە:

(1) ئالتە خانىلىق تاق ساندىن قانچىنى تۈزگىلى بولىدۇ؟

(2) 201345 دىن چوڭ مۇسبەت پۈتۈن ساندىن قانچىنى تۈزگىلى بولىدۇ؟

3. (1) تەكشىلىكتە ياتقان ئىككى گۇرۇپپا پاراللېل سىزىقنىڭ بىر گۇرۇپپىسىدا m تال، يەنە بىر گۇرۇپپىسىدا n تال تۈز سىزىق بار. بۇ ئىككى گۇرۇپپا پاراللېل سىزىق ئۆزئارا كېسىشسە، قانچە پاراللېل تۆت تەرەپلىك ھاسىل بولىدۇ؟

(2) بوشلۇقتىكى ئۈچ گۇرۇپپا پاراللېل تەكشىلىكنىڭ بىرىنچى گۇرۇپپىسىدا m دانە، ئىككىنچى گۇرۇپپىسىدا n

دانە، ئۈچىنچى گۇرۇپپىسىدا l دانە تەكشىلىك بار. ئوخشاش بولمىغان گۇرۇپپىلاردىكى تەكشىلىكلەرنىڭ ھەممىسى كېسىشسە ھەمدە كېسىشىش سىزىقلىرىنىڭ ھەممىسى پاراللېل بولمىسا، قانچە پاراللېل ئالتە ياقلىق ھاسىل بولىدۇ؟

4. مەلۇم خىل مەھسۇلاتنى 5 ئىش تەرتىپى بىلەن پىششىقلاپ ئىشلەشكە توغرا كېلىدۇ.

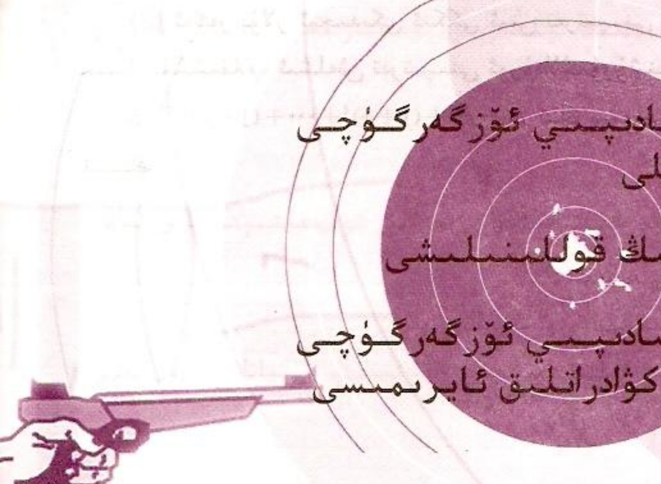
(1) ئەگەر بۇلار ئىچىدىكى مەلۇم بىر ئىش تەرتىپىنى ئەڭ ئاخىرىغا ئورۇنلاشتۇرۇشقا يول قويۇلمىسا، پىششىقلاپ ئىشلەش تەرتىپىنى ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ قانچە خىل ئۇسۇلى بار؟

(2) ئەگەر بۇلار ئىچىدىكى ئىككى ئىش تەرتىپىنى ھەم ئەڭ ئالدىغا، ھەم ئەڭ ئاخىرىغا ئورۇنلاشتۇرۇشقا يول قويۇلمىسا، پىششىقلاپ ئىشلەش تەرتىپىنى ئورۇنلاشتۇرۇشنىڭ قانچە خىل ئۇسۇلى بار؟

5. $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ نىڭ يېيىلمىسىدىكى x^2 نى ئۆز ئىچىگە ئالغان ئەزانىڭ كوئېففىتسېنتىنى تېپىڭ.

2 ـ باب

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىماتى



1ـ2 دىسكرېت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

2ـ2 ئىككى ئەزالىق تەقسىماتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

3ـ2 دىسكرېت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىسى

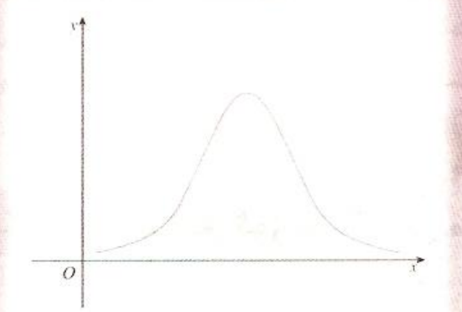
4ـ2 نورمال تەقسىمات

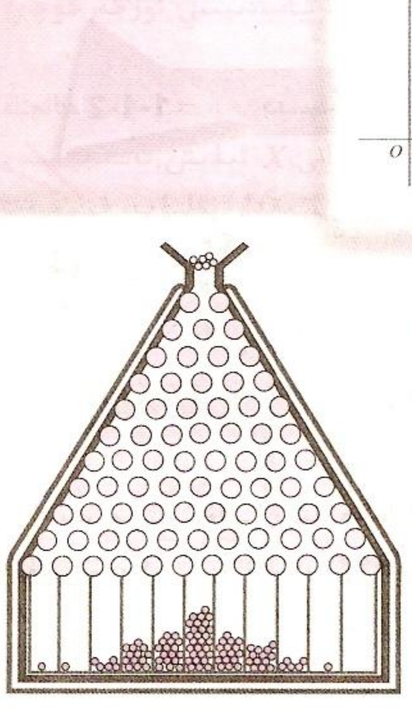
قارىغا ئېتىش ماھىرىنىڭ ھەر قېتىمقى قارىغا ئېتىش نەتىجىسى تاسادىپىيلىقتا ئىگە بولىدۇ. ئۇنىڭ قارىغا ئېتىش ئالاھىدىلىكىنى قانداق سۈرەتلەش كېرەك؟ قارىغا ئېتىش سەۋىيەسىنى قانداق باھالاش كېرەك؟

بىز ئېھتىماللىقنىڭ تاسادىپىي ۋەقەلەرنىڭ يۈز بېرىش مۇمكىنچىلىكىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى تەسۋىرلەشتىكى ئۆلچەم ئىكەنلىكىنى ھەمدە بەزى ئاددىي ئېھتىماللىق مودېللىرىنىمۇ بىلىۋالغانىدۇق. مەسىلەن، سۈپىتى تەكشى بىر مېتال پۇلنى تاشلاشقا دائىر كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىدىكى ۋەقە «ئوڭ چۈشۈش» نىڭ ئېھتىماللىقى؛ سۈپىتى تەكشى بىر شەشخالنى تاشلاشقا دائىر كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىدىكى ۋەقە «1 چېكىت چۈشۈش» نىڭ ئېھتىماللىقى؛ يېڭى تۇغۇلغان بوۋاقلارنىڭ جىنسىنى تەسۋىرلەشكە دائىر ئېھتىماللىق مودېلىدىكى ۋەقە «قىز بولۇش» نىڭ ئېھتىماللىقى ... دېگەندەك. بۇ ئوخشاش بولمىغان ئېھتىماللىق مودېللىرىدا تىلغا ئېلىنغان ۋەقەلەرنىڭ قانداق ئورتاق ئالاھىدىلىكى بار؟ بۇ تاسادىپىي ۋەقەلەرنى بىرلىككە كەلگەن بىر ئېھتىماللىق مودېلى ئارقىلىق سۈرەتلىگىلى بولامدۇ؟ بۇنىڭ ئۈچۈن، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىماتىغا دائىر بەزى بىلىملەرنى ئۆگىنىشىمىزگە توغرا كېلىدۇ.

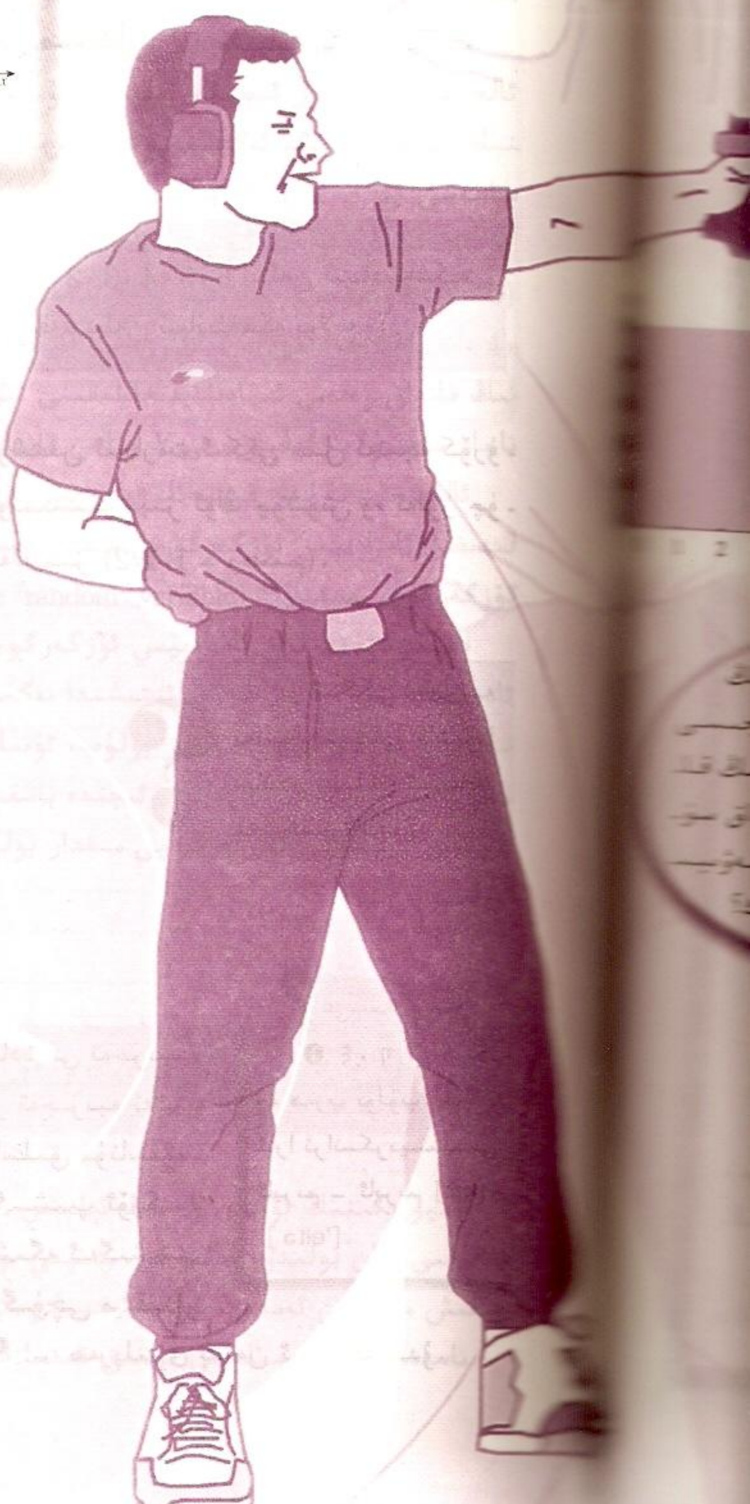
تاسادىپىي تەجرىبىنىڭ نەتىجىسىنى مىقدارلاشتۇرۇپ، ئۇنى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن ئىپادىلەش بىزنىڭ قىزىقىۋاتقان تاسادىپىي ھادىسىلەرنى ماتېماتىكىلىق قورال بىلەن تەتقىق قىلىشىمىزغا ئىمكانىيەت يارىتىپ بېرىدۇ. بۇ بابتا، زورۇر دەرسلىكلەردە ئۆگەنگەن ئېھتىماللىق بىلىملىرى ئاساسىدا، بەزى دىسكرېت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى ۋە ئۇنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى، كۋادراتلىق ئايرىمىسى قاتارلىق بىلىملەرنى ئۆگىنىمىز، بەزى تاسادىپىي ھادىسىلەرنى دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئىدىيىسىنى قوللىنىپ تەسۋىرلەيمىز ۋە تەھلىل قىلىمىز، بەزى ئاددىي ئەمەلىي مەسىلىلەرنى ھەل قىلىپ، ئېھتىماللىق مودېلىنىڭ رولى ۋە ئېھتىماللىق ئىدىيەسىنى قوللىنىپ مەسىلىلەر ئۈستىدە پىكىر يۈرگۈزۈش ۋە ئۇنى ھەل قىلىشنىڭ ئالاھىدىلىكىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلەپ ھېس قىلىمىز.

2





تەبئىي ھادىسىلەر، ئىشلەپچىقى-
رىش ۋە تۇرمۇش ئەمەلىيىتىدە، نۇرغۇن
تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار
نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ ياكى
تەقرىبىي بويسۇنىدۇ.



CHAPTER 2

1-2 دىسكرېت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ۋە ئۇنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

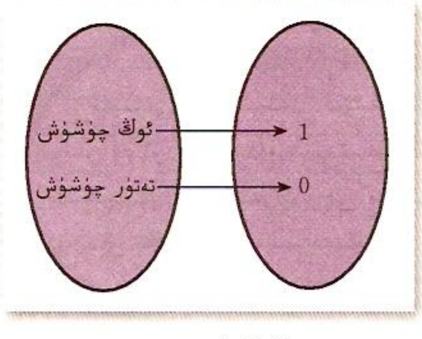
1-1-2 دىسكرېت تىپلىق ئۆزگەرگۈچى مىقدار

مۇلاھىزە ؟

بىر ششخالنى تاشلىغاندا كۆرۈلىدىغان چېكىت سانىنى رەقەم 1، 2، 3، 4، 5، 6 بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. ئۇنداق بولسا، بىر مېتال پۇلنى تاشلىغاندىكى نەتىجىنىمۇ رەقەم بىلەن ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟

بىر مېتال پۇلنى تاشلىغاندا ئوڭ چۈشۈش ۋە تەتۈر چۈشۈشتىن ئىبارەت ئىككى خىل نەتىجە كۆرۈلۈشى مۇمكىن، بۇ تاسادىپىي تەجرىبىنىڭ نەتىجىسى سان بولمىسىمۇ، بىز ئوڭ چۈشۈش ۋە تەتۈر چۈشۈشنى يەنىلا ئايرىم ـ ئايرىم رەقەم 1 ۋە 0 بىلەن ئىپادىلىيەلەيمىز (2.1.1 ـ رەسىم).

بۇ ئىككى تەجرىبە نەتىجىسىنى باشقا سانلار بىلەن ئىپادىلەشكە بولامدۇ؟



2.1.1 ـ رەسىم

ششخال تاشلاش ۋە مېتال پۇل تاشلاشتىن ئىبارەت تاسادىپىي تەجرىبىلەردە، بىز بىر ماسلىق مۇناسىۋەتنى تۇرغۇزۇۋېلىپ، ھەربىر تەجرىبە نەتىجىسىنى بىر ئېنىق رەقەم بىلەن ئىپادىلىدۇق. مۇشۇنداق ماسلىق مۇناسىۋەتنىڭ ئاستىدا، رەقەم تەجرىبە نەتىجىسىنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدۇ. مۇشۇنىڭغا ئوخشاش، تەجرىبە نەتىجىسىنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغان ئۆزگەرگۈچى مىقدار **تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار** (random variable) دەپ ئاتىلىدۇ ۋە ئادەتتە X، Y، ξ، η [1] ... ھەرپلىرى بىلەن ئىپادىلىنىدۇ.

[1] ξ، η لار گرېكچە ھەرپ بولۇپ، خەلقئارا ترانسكرىپسىيىسى ئايرىم ـ ئايرىم [ksiː]، [ˈeitə].

مۇلاھىزە؟

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن فۇنكسىيىنىڭ ئوخشىشىپ كېتىدىغان تەرەپلىرى بارمۇ؟

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن فۇنكسىيىنىڭ ھەر ئىككىسى بىر خىل ئەكس ئېتىش بولۇپ، تاسادىپىي مىقدار تاسادىپىي تەجرىبىنىڭ نەتىجىسىنى ھەقىقىي سانغا ئەكس ئەتتۈرىدۇ، فۇنكسىيە بولسا ھەقىقىي ساننى ھەقىقىي سانغا ئەكس ئەتتۈرىدۇ. بۇ ئىككى خىل ئەكس ئېتىش ئارىسىدا، تەجرىبە نەتىجىسىنىڭ دائىرىسى فۇنكسىيىنىڭ ئېنىقلىنىش ساھەسىگە، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى فۇنكسىيىنىڭ قىممەت ساھەسىگە باراۋەر كېلىدۇ. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى ئۇنىڭ قىممەت ساھەسى دېيىلىدۇ.

مەسىلەن، تەركىبىدە 10 ناچار مەھسۇلات بار بولغان 100 مەھسۇلات ئىچىدىن 4 نى خالىغانچە ئالغاندا، ئۇلار ئۆز ئىچىگە ئېلىشى مۇمكىن بولغان ناچار مەھسۇلاتنىڭ سانى X ئېلىش نەتىجىسىنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىدۇ، ئۇ بىر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، قىممەت ساھەسى $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ بولىدۇ.

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقداردىن پايدىلىنىپ بەزى ۋەقەلەرنى ئىپادىلىگىلى بولىدۇ. مەسىلەن، $\{X=0\}$ دېگىنىمىز «0 دانە ناچار مەھسۇلات ئېلىش» نى، $\{X=4\}$ بولسا «4 دانە ناچار مەھسۇلات ئېلىش» نى ئىپادىلەيدۇ، ۋە باشقىلار. بۇ يەردە $\{X<3\}$ نىڭ قانداق ۋەقەنى ئىپادىلەيدىغانلىقىنى ئېيتىپ بېرەلەمسىز؟ «3 تىن ئارتۇق ناچار مەھسۇلات ئېلىش» نى X بىلەن قانداق ئىپادىلەش كېرەك؟

ئالىدىغان بارلىق قىممەتلىرىنى بىر ـ بىرلەپ كۆرسىتىپ بېرىشكە بولىدىغان تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار **دىسكرىت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار**[1] (discrete random variable) دەپ ئاتىلىدۇ.

[1] بۇ باپتا تەتقىق قىلىنىدىغان دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي مىقدارلار پەقەت چەكلىك دانە قىممەتنىلا ئالىدۇ.

دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا جىق مىسال كەلتۈرگىلى بولىدۇ. مەسىلەن، بىر ئادەمنىڭ بىر قېتىم قارىغا ئېتىشىدا تەگكۈزۈشى مۇمكىن بولغان ھالقا سانى X دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، ئۇنىڭ مۇمكىن بولغان بارلىق قىممەتلىرى 0، 1، ⋯، 10 بولىدۇ؛ مەلۇم تور بېتىنىڭ 24 سائەت ئىچىدە باشقىلار تەرىپىدىن كۆز يۈگۈرتۈلۈش قېتىم سانى Y مۇ دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، ئۇنىڭ مۇمكىن بولغان بارلىق قىممەتلىرى 0، 1، 2، ⋯ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

لامپۇچكىنىڭ ئۆمرى X دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارمۇ؟

لامپۇچكىنىڭ ئۆمرى X نىڭ ئېلىشى مۇمكىن بولغان قىممىتى ھەرقانداق بىر مەنپىي بولمىغان ھەقىقىي سان بولىدۇ، ھالبۇكى، مەنپىي بولمىغان بارلىق ھەقىقىي سانلارنى بىر ـ بىرلەپ كۆرسىتىپ چىقىش مۇمكىن ئەمەس، شۇڭا X دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولالمايدۇ.

تاسادىپىي ھادىسىلەرنى تەتقىق قىلغاندا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا كۆڭۈل بۆلۈۋاتقان شۇ

مەسىلىگە ئاساسەن دەل جايىدا ئېنىقلىما بېرىش كېرەك. مەسىلەن، بىز لامپوچكىنىڭ ئىشلىتىلىش ئۆمرىنىڭ 1000 سائەتكە تەڭ ياكى ئۇنىڭدىن چوڭ بولۇش ـ بولماسلىقىغا كۆڭۈل بۆلسەك، ئۇ ھالدا تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا تۆۋەندىكىدەك ئېنىقلىما بەرسەك بولىدۇ:

$$Y=\begin{cases}0, & \text{ئۆمرى} < 1000 \text{ سائەت};\\ 1, & \text{ئۆمرى} \geqslant 1000 \text{ سائەت}.\end{cases}$$

Y ئوخشاش بولمىغان ئىككى قىممەت 0 ۋە 1 نىلا ئالىدىغانلىقتىن، ئۇنىڭ قۇرۇلمىسى لامپوچكىنىڭ ئۆمرى X كە قارىغاندا تېخىمۇ ئاددىي بولىدۇ، ئۇ دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، تەتقىقاتلاردا قوللىنىشقا ناھايىتى قولايلىق.

مەشىق

1. تۆۋەندىكى تاسادىپىي تەجرىبىلەرنىڭ نەتىجىسىنى دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن ئىپادىلىگىلى بولامدۇ؟ ئەگەر ئىپادىلىگىلى بولسا، ھەرقايسى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ مۇمكىن بولغان قىممەتلىرىنى يېزىڭ ھەمدە بۇ قىممەتلەر ئىپادىلىگەن تاسادىپىي تەجرىبە نەتىجىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

(1) ئىككى شىشخالنى تاشلىغاندىكى چېكىت سانلىرىنىڭ يىغىندىسى؛

(2) بىر پۇتبول كوماندىسىنىڭ جازا توپ تەۋپ ئۇقتىسىدىن ۋاراتاغا 5 قېتىم توپ تېپىپ كىرگۈزگەن توپ سانى؛

(3) بوتۇلكىسىغا 2500 ml دەپ يېزىلغان مەلۇم خىل ئىچىملىكتىن 1 بوتۇلكىنى خالىغانچە ئالغاندىكى ئەمەلىي مىقدار بىلەن بەلگىلەنگەن مىقدارنىڭ پەرقى.

2. دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا دائىر ئىككى مىسال كەلتۈرۈڭ.

2-1-2 دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

سۇپىتى تەكشى بىر شىشخال تاشلىنىدىغان تاسادىپىي تەجرىبىدە، بىز تەجرىبە نەتىجىسىنى ئالدىن بىلەلمەيدىغانلىقىمىز ئۈچۈن، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىشىنىمۇ ئەلۋەتتە ئالدىن بىلەلمەيمىز. بىراق، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئۆزگىرىش قانۇنىيىتىنى چېكىت سانلىرىنىڭ كۆرۈلۈش ئېھتىماللىقىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلالايمىز.

شىشخالنىڭ يۇقىرىغا قاراپ چۈشكەن يېقىدىكى چېكىت سانىنى X بىلەن ئىپادىلەيلى. شىشخالنى تاشلاشتىن بۇرۇن X نىڭ قانداق قىممەت ئالىدىغانلىقىنى ئېنىقلىيالمىساقمۇ، لېكىن كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىغا دائىر بىلىملىرىمىزگە ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، X نىڭ ئوخشاش بولمىغان ھەرقايسى قىممەتلەرنى ئېلىش ئېھتىماللىقى ئوخشاشلا $\frac{1}{6}$ بولىدۇ. 1.2 ـ جەدۋەلدە تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ مۇمكىن بولغان قىممەتلىرى ۋە ئۇنىڭ بۇ قىممەتلەرنى ئېلىش ئېھتىماللىقلىرى بېرىلدى.

1.2 ـ جەدۋەل

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

بۇ جەدۋەلدىن پايدىلىنىپ X ئىپادىلىگەن ۋەقەلەرنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپقىلى بولىدۇ. مەسىلەن، بۇ تاسادىپىي تەجرىبىدە ۋەقە $\{X<3\}=\{X=1\}\cup\{X=2\}$ بولۇپ، ئېھتىماللىقنىڭ قوشۇلۇشچانلىقىغا ئاساسەن:

$$P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

ئوخشاشلا، ۋەقە {X جۈپ سان} نىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(X \text{ جۈپ سان})=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)=\frac{1}{2}.$$

1.2 ـ جەدۋەل شىشخال تاشلىنىدىغان بۇ تاسادىپىي تەجرىبىدىكى قانۇنىيەتنى تەسۋىرلەشتە مۇھىم رول ئوينايدۇ.

ئومۇمەن، دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ ئېلىشى مۇمكىن بولغان ئوخشاش بولمىغان قىممەتلىرى

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n,$$

بولسا، X نىڭ ھەربىر قىممەت x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ نى ئېلىش ئېھتىماللىقى $P(X=x_i)=p_i$ نى جەدۋەل شەكلىدە تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

2.2 ـ جەدۋەل

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

بۇ جەدۋەل دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ **ئېھتىماللىق تەقسىمات جەدۋىلى** (probability distribution series)، قىسقىچە X نىڭ **تەقسىمات جەدۋىلى** (distribution series) دەپ ئاتىلىدۇ. بەزىدە ئۇ يەنە ئاددىي ھالدا تەڭلىك

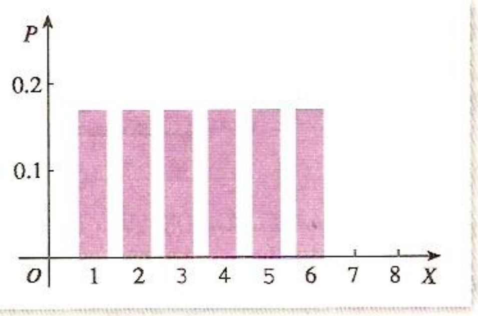
$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1, 2, \cdots, n$$

بىلەنمۇ ئىپادىلىنىدۇ.

دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى يەنە گرافىك بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. مەسىلەن، شىشخال تاشلاش تەجرىبىسىدە، چۈشكەن چېكىت سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنىڭ تىك بۇلۇڭلۇق كوئوردىنات سىستېمىسىدىكى دىئاگراممىسى 2.1.2 ـ رەسىمدىكىدەك بولىدۇ.

دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى مۇشۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار سۈرەتلىگەن تاسادىپىي ھادىسىنى تولۇق تەسۋىرلەپ بېرىدۇ.

فۇنكسىيىنى ئانالىتىك ئىپادە، جەدۋەل ياكى گرافىك بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ، دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنىمۇ ئانالىتىك ئىپادە، جەدۋەل ياكى دىئاگرامما بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ.



2.1.2 ـ رەسىم

2.1.2 ـ رەسىمدە، ئابسىبسا تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممىتىگە، ئوردىنات ئېھتىمال ـ لىقىقا ۋەكىللىك قىلىدۇ. رەسىمدىن كۆرەلەيمىزكى، X نىڭ قىممەت ئېلىش دائىرىسى $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بولۇپ، ئۇنىڭ ھەربىر قىممەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقى ئوخشاشلا $\frac{1}{6}$ بولىدۇ.

ئېھتىماللىقنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن، دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى تۆۋەندىكىدەك خۇسۇسىيەتلەرگە ئىگە ئىكەنلىكىنى بىلەلەيمىز:

(1) $p_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n;$

(2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئىپادىلىگەن ۋەقەنىڭ ئېھتىماللىقىنى تەقسىمات جەدۋىلى ۋە ئېھتى ـ ماللىقنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاشقا بولىدۇ.

1 ـ مىسال. بىر باسما مىخ (قالپاقلىق مىخ) تاشلىنىدىغان تاسادىپىي تەجرىبىدە

$$X=\begin{cases}1, & \text{ئۇچى يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈش} \\ 0, & \text{ئۇچى تۆۋەنگە قاراپ چۈشۈش}\end{cases}$$

دەپ ئېلىنغان. ئۇچى يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈشنىڭ ئېھتىماللىقى p بولسا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى يازايلى.

يېشىش: تەقسىمات جەدۋىلىنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئاساسەن، ئۇچى تۆۋەنگە قاراپ چۈشۈشنىڭ ئېھتىمال ـ لىقى $(1-p)$ بولىدۇ. شۇڭا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

3.2 ـ جەدۋەل

X	0	1
P	$1-p$	p

ئەگەر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋى ـ لى 3.2 ـ جەدۋەلدىكىدەك بولسا، ئۇ ھالدا X نى **ئىككى نۇقتى ـ لىق تەقسىمات**[1] (two - point distribution) قا بويسۇنىدۇ دەپ، $p=P(X=1)$ نى **ئۇتۇق ئېھتىماللىقى** دەپ ئاتايمىز.

ئىككى نۇقتىلىق تەقسىمات جەدۋىلى ناھايىتى كەڭ قوللىنىلى ـ دۇ. مەسىلەن، ئېلىنغان لاتارىيە بېلىتىدىن مۇكاپات چىقىش ـ چىقماسلىقى؛ سېتىۋېلىنغان بىر مەھسۇلاتنىڭ سۈپەتلىك مەھسۇلات بولۇش ـ بولماسلىقى، يېڭى تۇغۇلغان بوۋاقنىڭ جىنسى، تاشلانغان توپنىڭ گارغا چۈشۈش ـ چۈشمەسلىكى دېگەندەك مەسىلىلەرنىڭ ھەممىسىنى ئىككى نۇقتىلىق تەقسىمات جەدۋىلىدىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشقا بولىدۇ.

[1] ئىككى نۇقتىلىق تەق ـ سىمات 1-0 تەقسىماتى دەپمۇ ئاتىلىدۇ. مۇمكىن بولغان ئىك ـ كىلا نەتىجىسى بار تاسادىپىي تەجرىبە بېرنۇللى (Bernoulli) تەجرىبىسى دېيىلىدىغانلىق ـ تىن، ئىككى نۇقتىلىق تەقسى ـ مات يەنە بېرنۇللى تەقسىماتى دەپمۇ ئاتىلىدۇ.

2 ـ مىسال. تەركىبىدە 5 ناچار مەھسۇلات بار 100 مەھسۇلات ئىچىدىن 3 نى خالىغانچە ئالغاندا:

(1) ئېلىنغان ناچار مەھسۇلات سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تاپايلى؛

(2) كەم دېگەندە 1 ناچار مەھسۇلات ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى.

يېشىش: (1) 100 مەھسۇلات ئىچىدىن خالىغان 3 نى ئېلىشنىڭ نەتىجىلىرىنىڭ سانى C_{100}^{3}، 100 مەھسۇلات ئىچىدىن خالىغان 3 نى ئالغاندا ئۇلارنىڭ ئىچىدە دەل k دانە ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ نەتىجىلىرىنىڭ سانى $C_5^kC_{95}^{3-k}$ بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، 100 مەھسۇلات ئىچىدىن خالىغان 3 نى ئالغاندا ئۇلارنىڭ ئىچىدە دەل k دانە ناچار مەھسۇلات بولۇشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(X=k)=\frac{C_5^kC_{95}^{3-k}}{C_{100}^3},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

شۇڭا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى:

4.2 ـ جەدۋەل

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_5^0C_{95}^3}{C_{100}^3}$	$\frac{C_5^1C_{95}^2}{C_{100}^3}$	$\frac{C_5^2C_{95}^1}{C_{100}^3}$	$\frac{C_5^3C_{95}^0}{C_{100}^3}$

(2) تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىگە ئاساسەن، كەم دېگەندە 1 ناچار مەھسۇلات ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 1)&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\&\approx 0.138\,06+0.005\,88+0.000\,06\\&=0.144\,00.\end{aligned}$$

ئومۇمەن، تەركىبىدە M دانە ناچار مەھسۇلات بار N دانە مەھسۇلات ئىچىدىن n دانىسىنى ئالغاندا، ئۇلار ئىچىدە دەل X دانە ناچار مەھسۇلات بولسا، ئۇ ھالدا:

$$P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

5.2 ـ جەدۋەل

X	0	1	$\cdots$	m
P	$\frac{C_M^0C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

بۇنىڭدىكى $m=\min\{M,\ n\}$ ھەمدە $n\leqslant N$، $M\leqslant N$، $n,\ M,\ N\in\mathbf{N}^*$.

ئەگەر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى 5.2 ـ جەدۋەلدىكىدەك بولسا، ئۇ ھالدا تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نى **ھېپېر گېئومېترىيىلىك تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ** (hypergeometric distribution) دەيمىز.

3 ـ مىسال. مەلۇم يىللىقتىكى ئوقۇغۇچىلار كۆڭۈل ئېچىش يىغىنىدا بىر مۇكاپاتلىق ئويۇن لايىھىلىدى. بۇ ئويۇندا، بىر خالتىغا چوڭ ـ كىچىكلىكى پۈتۈنلەي ئوخشاش بولغان 10 قىزىل توپ ۋە 20 ئاق توپ سېلىنىپ، ھەر قېتىمدا خالتىدىن 5 توپ ئېلىنىدۇ، كەم دېگەندە 3 قىزىل توپ ئالالىغانلار مۇكاپاتقا ئېرىشىدۇ. مۇكاپاتقا ئېرىشىش ئېھتىماللىقىنى تاپايلى.

يېشىش: ئېلىنغان قىزىل توپنىڭ سانىنى X دەپ پەرەز قىلساق، بۇ X ھېپېر گېئومېترىيىلىك تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ ھەمدە بۇنىڭدا $N=30$، $M=10$، $n=5$ بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، مۇكاپاتقا ئېرىشىش ئېھتىماللىقى:

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 3)&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&=\frac{C_{10}^3C_{30-10}^{5-3}}{C_{30}^5}+\frac{C_{10}^4C_{30-10}^{5-4}}{C_{30}^5}+\frac{C_{10}^5C_{30-10}^{5-5}}{C_{30}^5}\approx 0.191.\end{aligned}$$

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر بۇ ئويۇندا مۇكاپاتقا ئېرىشىش ئېھتىماللىقىنى 55% ئەتراپىدا كونترول قىلىشقا توغرا كەلسە، مۇكاپاتقا ئېرىشىش قائىدىسىنى قانداق لايىھەلەش كېرەك؟

مەشىق

1. ۋاسكېتبول مۇسابىقىسىدە، ھەر قېتىم جازا توپ تاشلىغاندا گارغا چۈشسە 1 نومۇر، چۈشمىسە 0 نومۇر بېرىلىدۇ. مەلۇم تەنھەرىكەتچىنىڭ جازا توپ تاشلىغاندىكى گارغا چۈشۈرۈش ئېھتىماللىقى 0.7 بولسا، ئۇنىڭ بىر قېتىم جازا توپ تاشلاپ نومۇرغا ئېرىشىشىنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تېپىڭ.

2. سۈپىتى تەكشى بىر مېتال پۇلنى 2 قېتىم تاشلىغاندىكى ئوڭ چۈشۈش قېتىم سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تېپىڭ.

3. چوڭ ـ كىچىك شاھلىرى يوق 52 قارتا ئىچىدىن خالىغان 5 نى ئالغاندا كەم دېگەندە 3 كارول ئېلىشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

4. ئىككى نۇقتىلىق تەقسىمات ۋە ھىپېر گېئومېترىيىلىك تەقسىماتقا بويسۇنىدىغان تاسادىپىي ئۆزگەر-گۈچى مىقدارنىڭ ھەرقايسىسىدىن بىر مىسال كەلتۈرۈڭ.

1.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندىكى ئىككى تاسادىپىي تەجرىبىنىڭ نەتىجىسىنى دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن ئىپادىلىگىلى بولامدۇ؟ ئەگەر ئىپادىلىگىلى بولسا، ھەرقايسى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ ئېلىشى مۇمكىن بولغان قىممەتلىرىنى يېزىڭ ھەمدە بۇ قىممەتلەر ئىپادىلىگەن تاسادىپىي ۋەقە نەتىجىسىنى چۈشەندۈرۈڭ:

(1) مەكتەپتىن ئۆيگە قايتىشتا قىزىل ـ يېشىل چىراغلىق 5 كوچا ئېغىزىدىن ئۆتۈشكە توغرا كەلسە، قىزىل چىراغقا دۇچ كېلىشىنىڭ مۇمكىن بولغان قېتىم سانى؛

(2) مەلۇم ئوقۇغۇچىنىڭ ئەلا، ياخشى، ئوتتۇرا ھال، ئۆتۈش، ئۆتەلمەسلىك دەپ 5 دەرىجىگە ئايرىلغان بىر قېتىملىق سىناقتا ئېرىشىشى مۇمكىن بولغان نەتىجىسى.

2. بىر تۇرلۇك بەدەن ئىقتىدارى سىنىقىدا، 1 km ئارىلىقنى 4 min ئىچىدە يۈگۈرۈپ بولۇش ئەلا نەتىجە دەپ بېكىتىلدى. بىر ئوقۇغۇچىنىڭ 1 km غا يۈگۈرۈش ئۈچۈن سەرپ قىلغان ۋاقتى X دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولامدۇ؟ ئەگەر بىز بۇ ئوقۇغۇچىنىڭ ئەلا نەتىجىگە ئېرىشىش ـ ئېرىشەلمەسلىكىگىلا كۆڭۈل بۆلسەك، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنى قانداق ئېنىقلاش كېرەك؟

3. بىر تاسادىپىي تەجرىبىدە ئېنىقلانغان ھەرقانداق بىر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار مۇشۇ تاسادىپىي تەجرىبىدە كۆرۈلۈش مۇمكىن بولغان بارلىق تاسادىپىي ۋەقەلەرنى تەسۋىرلەپ بېرەلەمدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

4. مەلۇم ئوقۇغۇچى بىر دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ تۆۋەندىكى تەقسىمات جەدۋىلىنى تېپىپ چىققان:

X	0	1	2	3
P	0.2	0.3	0.15	0.45

ئۇنىڭ ھېسابلاش نەتىجىسىنىڭ توغرا بولغان ـ بولمىغانلىقىنى چۈشەندۈرۈڭ.

5. بىر مەرگەننىڭ قارىغا ئېتىپ ئېرىشكەن ھالقا سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى تۆۋەندە بېرىلدى:

X	4	5	6	7	8	9	10
P	0.02	0.04	0.06	0.09	0.28	0.29	0.22

ئەگەر 8 ~ 10 ھالقىلارغا تەگكۈزۈش ئەلا نەتىجە ھېسابلانسا، ئۇنىڭ بىر قېتىم قارىغا ئېتىپ ئەلا نەتىجىگە ئېرىشىش ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

6. مەكتەپ 30 نامزات ئىچىدىن 10 نى تاللاپ ئوقۇغۇچىلار ئۇيۇشمىسى تەشكىللىمەكچى، بۇلارنىڭ ئىچىدە مەلۇم سىنىپتىن 4 نامزات بار. ئەگەر ھەربىر نامزاتنىڭ سايلىنىش پۇرسىتى ئوخشاش بولسا، بۇ سىنىپتىن 2 نامزات سايلىنىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئوقۇتقۇچى 10 پارچە دەرس تېكىستىدىن 3 نى تاسادىپىي تاللاپ يادلاتقۇزۇش سىنىقى ئېلىپ بارماقچى، بەلگىلىمە بويىچە، 3 تېكىست ئىچىدىن 2 سىنى يادلىيالىغانلار سىناقتىن ئۆتكەن بولىدۇ. بىر ئوقۇغۇچى بۇ 10 پارچە تېكىستنىڭ 6 سىنى يادلىيالىسا:

(1) ئۇ يادلىيالايدىغان تېكىستلەرنىڭ تاللىنىش سانىنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تېپىڭ؛

(2) ئۇنىڭ سىناقتىن ئۆتۈش ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

2. مەلۇم خىل لاتارىيە بېلەتنىڭ مۇكاپات نومۇرى 1، 2، ⋯، 36 ئىچىدىن خالىغانچە تاللانغان 7 ئاساسىي رەقەمدىن تەركىب تاپىدۇ، سېتىۋېلىنغان لاتارىيە بېلەتتىكى 7 رەقەم ئىچىدە 4 ياكى 4 تىن كۆپ رەقەم ئاساسىي رەقەم بولسىلا مۇكاپات چىقىدۇ، مۇكاپات دەرىجىلىرى ئاساسىي رەقەمنىڭ سانىغا قاراپ تۆۋەندىكىدەك ئايرىلغان:

ئۇز ئىچىگە ئالغان ئاساسىي رەقەم سانى	4	5	6	7
مۇكاپات دەرىجىسى	4 ـ دەرىجە	3 ـ دەرىجە	2 ـ دەرىجە	1 ـ دەرىجە

كەم دېگەندە 3 ـ دەرىجىلىك مۇكاپاتقا ئېرىشىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

ئىككى ئەزالىق تەقسىماتى ۋە ئۇنىڭ قوللىنىلىشى

CHAPTER 2

2-2

1-2-2 شەرتلىك ئېھتىماللىق

ئىزدىنىش

ئۈچ لاتارىيە بېلىتى ئىچىدە مۇكاپات چىقىدىغان بىرلا بېلەت بار. ئەگەر ئۈچ ئوقۇغۇچى بۇ بېلەتلەرنى ئايرىم - ئايرىم قايتۇرماي ئالسا، ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقى ئالدىدىكى ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭكىدىن كىچىكمۇ؟

ئۈچ لاتارىيە بېلەتنى ئايرىم - ئايرىم X_1، X_2، Y ئارقىلىق ئىپادىلەيمىز، بۇنىڭ ئىچىدە Y بىلەن مۇكاپات چىقىدىغان ئاشۇ بېلەتنى ئېلىشنى ئىپادىلىسەك، ئۈچ ئوقۇغۇچىنىڭ بېلەت ئېلىش نەتىجىسىدە جەمئىي ئالتە خىل مۇمكىنچىلىك بار: X_1X_2Y، X_1YX_2، X_2X_1Y، X_2YX_1، YX_1X_2 ۋە YX_2X_1. «ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەت ئېلىشى» دېگەن ۋەقەنى B بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا B ئىككى ئاساسىي ۋەقە X_1X_2Y، X_2X_1Y نى ئۆز ئىچىگە ئالىدۇ. ئېھتىماللىقنى كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاش فورمۇلىسىغا ئاساسەن بىلەلەيمىزكى، ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقى:

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر بىرىنچى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەتنى ئالالمىغانلىقى مەلۇم بولسا، ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

بىرىنچى ئوقۇغۇچى مۇكاپات چىقىدىغان بېلەتنى ئالالمىغانلىقى ئۈچۈن، كۆرۈلۈشى مۇمكىن بولغان ئاساسىي ۋەقەلەردىن X_1X_2Y، X_1YX_2، X_2X_1Y ۋە X_1YX_1 لار قالىدۇ ھەمدە «ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەت ئېلىشى» ئۆز ئىچىگە ئالغان ئاساسىي ۋەقە يەنىلا X_1X_2Y ۋە X_2X_1Y بولىدۇ.

ئېھتىماللىقنى كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاش فورمۇلىسىغا ئاساسەن، ئاخىرقى بىر ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقى $\frac{2}{4}$ يەنى $\frac{1}{2}$ بولىدىغانلىقىنى بىلەلەيمىز. ئەگەر A «بىرىنچى ئوقۇغۇچى مۇكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئالمىدى» دېگەن ۋەقەنى ئىپادىلىسە، ئۇ ھالدا «بىرىنچى ئوقۇغۇچى مۇكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئالمىدى» دېگەن بېرىلگەن شەرت ئاستىدا، «ئاخىرقى بىر ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئېلىشى» نىڭ ئېھتىماللىقى $P(B|A)$ بولىدۇ.

بىرىنچى ئوقۇغۇچىنىڭ بىلەت ئېلىش نەتىجىسىنىڭ مەلۇم بولغانلىقى نېمە ئۈچۈن ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ ماكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئېلىش ئېھتىماللىقىغا تەسىر كۆرسىتىدۇ؟

بۇ مەسىلىدە، بىرىنچى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بىلەتنى ئالمىغانلىقىنى بىلىۋالغانلىق A ۋەقەنىڭ چوقۇم يۈز بېرىدىغانلىقىنى بىلىۋالغانلىق بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولىدۇ. بۇنىڭ بىلەن، كۆرۈلۈشى مۇمكىن بولغان ئاساسىي ۋەقە مۇقەررەر ۋەقە A غا ئايلىنىپ قالىدۇ، بۇ، B ۋەقەنىڭ يۈز بېرىش ئېھتىماللىقىغا تەسىر كۆرسىتىدۇ ـ دە، نەتىجىدە $P(B|A)\neq P(B)$ بولىدۇ.

مۇلاھىزە ?

$P(B|A)$ بىلەن يۇقىرىدىكى A ۋەقە، B ۋەقەلەرنىڭ ئېھتىماللىقى ئارىسىدا قانداق مۇناسىۋەت بار؟

ئۈچ ئوقۇغۇچىنىڭ مۇمكىن بولغان ئېلىش نەتىجىلىرىنىڭ بارلىقىنى Ω بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا Ω ئالتە ئاساسىي ۋەقەدىن تەركىب تاپقان بولىدۇ، يەنى $\Omega=\{X_1X_2Y, X_1YX_2, X_2X_1Y, X_2YX_1, YX_1X_2, YX_2X_1\}$. A ۋەقەنىڭ مۇقەررەر ھالدا يۈز بېرىدىغانلىقى مەلۇم بولغانلىقتىن، بىز مەسىلىنى پەقەت $A=\{X_1X_2Y, X_1YX_2, X_2X_1Y, X_2YX\}$ نىڭ دائىرىسى ئىچىدە ئويلاشساقلا بولىدۇ، يەنى بۇ يەردە پەقەت تۆتلا ئاساسىي ۋەقە X_1X_2Y، X_1YX_2، X_2X_1Y ۋە X_2YX_1 بار. A ۋەقە يۈز بەرگەن ئەھۋال ئاستىدا، B ۋەقەنىڭ يۈز بېرىشى A ۋەقە، B ۋەقەلەرنىڭ تەڭلا يۈز بېرىشى بىلەن، يەنى AB نىڭ يۈز بېرىشى بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولىدۇ. ھالبۇكى، AB ۋەقە ئىككى ئاساسىي ۋەقە X_1X_2Y، X_2X_1Y نى ئۆز ئىچىگە ئالىدىغانلىقتىن، تۆۋەندىكى كۆچكە ئىگە بولىدۇ:

$$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{n(AB)}{n(A)},$$

بۇنىڭدىكى $n(A)$ بىلەن $n(AB)$ ئايرىم ـ ئايرىم A ۋەقە بىلەن AB ۋەقە ئۆز ئىچىگە ئالغان ئاساسىي ۋەقەلەرنىڭ سانىنى ئىپادىلەيدۇ. يەنە بىر تەرەپتىن، ئېھتىماللىقنى كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھېسابلاش فورمۇلىسىغا ئاساسلانساق:

$$P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)},\ \ P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

بۇنىڭدىكى $n(\Omega)$ دېگىنىمىز Ω ئۆز ئىچىگە ئالغان ئاساسىي ۋەقەلەرنىڭ سانىنى ئىپادىلەيدۇ. شۇڭا:

$$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن $P(B|A)$ نى A ۋەقە بىلەن AB ۋەقەنىڭ ئېھتىماللىقلىرى ئارقىلىق ئىپادىلەشكە بولىدۇ.

ئومۇمەن، A، B نى ئىككى ۋەقە ھەمدە $P(A)>0$ دەپ پەرەز قىلىپ،

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}$$

نى A ۋەقە يۈز بەرگەن شەرت ئاستىدىكى B ۋەقەنىڭ يۈز بېرىشىنىڭ **شەرتلىك ئېھتىماللىقى** (conditional probability) دەپ ئاتايمىز، بۇ يەردىكى $P(B|A)$ نى A يۈز بەرگەن شەرت ئاستىدا B نىڭ يۈز بېرىش ئېھتىماللىقى دەپ ئوقۇيمىز.

شەرتلىك ئېھتىماللىقمۇ ئېھتىماللىقنىڭ خۇسۇسىيىتىگە ئىگە بولۇپ، ھەر قانداق ۋەقەنىڭ شەرتلىك ئېھتىماللىقى 0 بىلەن 1 نىڭ ئارىلىقىدا بولىدۇ، يەنى

$$0 \leqslant P(B|A) \leqslant 1.$$

B بىلەن C سىغىشالمايدىغان ۋەقەلەر بولسا، ئۇ ھالدا:

$$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A).$$

1 ـ مىسال. 5 ئىمتىھان سوئالى ئىچىدە 3 تەبىئىي پەن سوئالى، 2 ئىجتىمائىي پەن سوئالى بار. بۇلار ئىچىدىن 2 سوئالنى تەرتىپ بويىچە قايتۇرماي ئالغاندا:

(1) 1 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى؛

(2) 1 ـ قېتىم بىلەن 2 ـ قېتىمنىڭ ھەر ئىككىسىدە تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى.

(3) 1 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىنغان شەرت ئاستىدا، 2 ـ قېتىمدىمۇ تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى.

يېشىش: 1 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنى A ۋەقە، 2 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنى B ۋەقە دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا 1 ـ ۋە 2 ـ قېتىمنىڭ ھەر ئىككىسىدە تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىش AB ۋەقە بولىدۇ.

(1) 5 سوئال ئىچىدىن 2 سوئالنى تەرتىپ بويىچە قايتۇرماي ئېلىش ئۆز ئىچىگە ئالغان ۋەقە سانى:

$$n(\Omega) = \mathrm{A}_5^2 = 20.$$

باسقۇچ بويىچە كۆپەيتىپ ساناش پرىنسىپىغا ئاساسەن، $n(A) = \mathrm{A}_3^1 \times \mathrm{A}_4^1 = 12$ بولىدۇ، شۇڭا:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

(2) چۈنكى $n(AB) = \mathrm{A}_3^2 = 6$، شۇڭا:

$$P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

(3) **1 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى** (1)، (2) لەردىن بىلەلەيمىزكى، 1 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىنغان شەرت ئاستىدا، 2 ـ قېتىمدا تەبىئىي پەن سوئالى ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

> ئەمەلىي قوللىنىشلاردا، 2 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى شەرتلىك ئېھتىماللىقنى تېپىشتىكى بىر خىل مۇھىم ئۇسۇل ھېسابلىنىدۇ.

2 ـ خىل يېشىش ئۇسۇلى چۈنكى $n(AB) = 6$، $n(A) = 12$، شۇڭا:

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

2 - مىسال. بىر ئامانەت كارتىسىنىڭ شىفىرى 6 رەقەمدىن تەركىب تاپىدۇ ھەمدە ھەربىر خانىدىكى رەقەم 0 ~ 9 غىچە رەقەملەر ئىچىدىن خالىغانچە تاللىنىدۇ. بىر ئادەم بانكىنىڭ ئاپتوماتىك پۇل ئېلىش ماشىنىسىدىن پۇل ئالغان چېغىدا شىفىرىنىڭ ئاخىرقى خانىسىدىكى بىر رەقەمنى ئېسىگە ئالالمىغان.

(1) ئاخىرقى خانىدىكى رەقەمنى خالىغانچە باسقاندا، 2 قېتىمدىن ئاشۇرمايلا توغرا بېسىپ چىقىرىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى؛

(2) بۇ ئادەم ئاخىرقى خانىدىكى رەقەمنىڭ جۈپ سان ئىكەنلىكىنى ئېسىگە ئالغان ئەھۋالدا، 2 - قېتىمدىن ئاشۇرمايلا توغرا بېسىپ چىقىرىشنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى.

يېشىش: ئاخىرقى خانىدىكى رەقەمنىڭ i ىنچى قېتىمدا بېسىپ چىقىرىلىشىنى A_i ۋەقە $(i=1, 2)$ دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $A=A_1\cup(\overline{A}_1A_2)$ دېگىنىمىز 2 قېتىمدىن ئاشۇرمايلا توغرا بېسىپ چىقىرىشنى ئىپادىلەيدۇ.

(1) A_1 بىلەن $\overline{A}_1A_2$ سىغىشالمايدىغان ۋەقەلەر بولغانلىقى ئۈچۈن، ئېھتىماللىقنىڭ قوشۇش فورمۇلىسىغا ئاساسەن:

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{10}+\frac{9\times1}{10\times9}=\frac{1}{5}.$$

(2) ئاخىرقى خانىسىدا جۈپ سان بېسىشنى B ۋەقە دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا:

$$P(A|B)=P(A_1|B)+P(\overline{A}_1A_2|B)=\frac{1}{5}+\frac{4\times1}{5\times4}=\frac{2}{5}.$$

مەشىق

1. چوڭ - كىچىك شاھلىرى يوق 52 قارتا ئىچىدىن ھەر قېتىمدا 1 دىن قارتا ئېلىپ قايتۇرماي 2 قېتىم ئېلىشتا، 1 - قېتىمدا كارول ئېلىنغانلىقى مەلۇم بولسا، 2 - قېتىمدىمۇ كارول ئېلىنىشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

2. 100 مەھسۇلات ئىچىدە 5 ناچار مەھسۇلات بار. بۇ 100 مەھسۇلات ئىچىدىن ھەر قېتىمدا 1 نى ئېلىپ قايتۇرماي 2 قېتىم ئېلىشتا، 1- قېتىمدا ناچار مەھسۇلات ئېلىنغانلىقى مەلۇم بولسا، 2 - قېتىمدا سۈپەتلىك مەھسۇلات ئېلىنىشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

3. شەرتلىك ئېھتىماللىققا دائىر ئىككى ئەمەلىي مىسال كەلتۈرۈڭ.

2-2-2 ۋەقەلەرنىڭ ئۆزئارا مۇستەقىللىقى

مۇلاھىزە؟

ئۈچ لاتارىيە بېلىتى ئىچىدە مۇكاپات چىقىدىغان بىرلا بېلەت بار بولۇپ، ئۈچ ئوقۇغۇچى بۇ بېلەتلەرنى ئايرىم - ئايرىم 1 دىن ئالدۇ ھەم ئېلىپ بولۇپلا يەنە ئۆز جايىغا قايتۇردۇ. «1 - ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەت ئالالىغانلىقى» نى A ۋەقە، «ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇكاپات چىقىدىغان بېلەت ئالغانلىقى» نى B ۋەقە دەپ ئالساق، A ۋەقەنىڭ يۈز بەرگەنلىكى B ۋەقەنىڭ يۈز بېرىش ئېھتىماللىقىغا تەسىر كۆرسىتەمدۇ؟

روشەنكى، لاتارىيە بېلەتلىرى ئېلىنغاندىن كېيىن يەنە ئورنىغا قايتۇرۇلىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئاخىرقى بىر ئوقۇغۇچىمۇ ئاشۇ ئۈچ بېلەت ئىچىدىن بىرىنى ئالىدۇ، شۇڭا 1 - ئوقۇغۇچىنىڭ ئېلىش نەتىجىسى ئاخىرقى ئوقۇغۇچىنىڭ ئېلىش نەتىجىسىگە تەسىر كۆرسەتمەيدۇ، يەنى A ۋەقەنىڭ يۈز بەرگەنلىكى B ۋەقەنىڭ يۈز بېرىش ئېھتىماللىقىغا تەسىر كۆرسەتمەيدۇ. شۇڭا:

$$P(B|A)=P(B),$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

ئىككى ۋەقەنى A، B دەپ پەرەز قىلايلى. ئەگەر

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

بولسا، ئۇ ھالدا A ۋەقە بىلەن B ۋەقەنى **ئۆزئارا مۇستەقىل** (mutually independent) دەپ ئاتايمىز.

ئىسپاتلاشقا بولىدۇكى، ئەگەر A بىلەن B ئۆزئارا مۇستەقىل بولسا، ئۇ ھالدا A بىلەن $\overline{B}$، $\overline{A}$ بىلەن B، $\overline{A}$ بىلەن $\overline{B}$ مۇ ئۆزئارا مۇستەقىل بولىدۇ.

3 - **مىسال.** مەلۇم سودا سارىيى ئىككى قېتىم تەلەي سىناش پائالىيىتىنى يولغا قويدى. بۇنىڭدا، بەلگىلىك قىممەتتىكى تاۋارنى سېتىۋالغاندىن كېيىن بىر لاتارىيە بېلىتىگە ئېرىشكىلى بولىدۇ، بېلەتتە بىر نەقلەشتۈرۈش نومۇرى بار، بۇ نومۇر بىلەن بېلەت تارتىش شەكلى ئوخشاش بولغان ئىككى قېتىملىق نەقلەشتۈرۈش پائالىيىتىگە ئايرىم - ئايرىم قاتناشقىلى بولىدۇ. ئەگەر ئىككى قېتىملىق نەقلەشتۈرۈش پائالىيىتىدىكى مۇكاپات چىقىش ئېھتىماللىقى ئوخشاشلا 0.05 بولسا، ئىككى قېتىملىق بېلەت تارتىشتا تۆۋەندىكى ۋەقەلەرنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى:

(1) ھەر ئىككى قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش؛

(2) دەل بىر قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش؛

(3) كەم دېگەندە بىر قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش.

يېشىش: (1) «1 - قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش» نى A ۋەقە، «2 - قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش» نى B ۋەقە دەپ ئالساق، ئۇ ھالدا «ھەر ئىككى قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش» دېگەنلىك AB ۋەقە بولىدۇ. ئىككى قېتىمقى بېلەت تارتىش نەتىجىلىرى بىر - بىرىگە تەسىر كۆرسەتمەيدىغانلىقى ئۈچۈن، A بىلەن B

ئۆزئارا مۇستەقىل بولىدۇ، ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەرنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، ھەر ئىككى قېتىمدا مەلۇم كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.05\times0.05=0.0025.$$

(2) «دەل بىر قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش» نى $(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. $A\overline{B}$ ، $\overline{A}B$ ۋەقەلەر سىغىشالمايدىغانلىقى ئۈچۈن، ئېھتىماللىقنىڭ قوشۇش فورمۇلىسى ۋە ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەرنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، تاپماقچى بولغان ئېھتىماللىق:

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)&=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)\\&=0.05\times(1-0.05)+(1-0.05)\times0.05\\&=0.095.\end{aligned}$$

(3) «كەم دېگەندە بىر قېتىمدا مەلۇم بىر كۆرسىتىلگەن نومۇرنى تارتىپ چىقىرىش» نى $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$ بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ. AB ، $A\overline{B}$ ، $\overline{A}B$ ۋەقەلەر ئىككى ـ ئىككىدىن سىغىشالمايدىغانلىقى ئۈچۈن، ئېھتىماللىقنىڭ قوشۇش فورمۇلىسى ۋە ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەرنىڭ ئېنىقلىمىسىغا ئاساسەن، تاپماقچى بولغان ئېھتىماللىق:

$$P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.0025+0.095=0.0975.$$

مۇلاھىزە؟

ئىككى قېتىملىق تەلەي سىناشتا كەم دېگەندە بىر قېتىم مۇكاپاتقا ئېرىشىشنىڭ ئېھتىماللىقى بىر قېتىملىق تەلەي سىناشتا مۇكاپاتقا ئېرىشىش ئېھتىماللىقىنىڭ 2 ھەسسىسىگە تەڭ بولامدۇ؟ نېمە ئۈچۈن؟

مەشىق

1. سوپىتى تەكشى ئىككى مېتال پۇلنى ئايرىم ـ ئايرىم تاشلىغاندا، «1 نچىسى ئوڭ چۈشۈش» نى A ۋەقە، «2 نچىسى ئوڭ چۈشۈش» نى B ۋەقە، «2 سىنىڭ چۈشۈش نەتىجىسى ئوخشاش» نى C ۋەقە دەپ ئالساق، A ، B ، C لارنىڭ قايسى ئىككىسى ئۆزئارا مۇستەقىل؟

2. خالتا ئىچىدە 2 ئاق توپ ۋە 2 قارا توپ بار.

(1) ئاۋۋال 1 ئاق توپ ئېلىنىپ خالتىغا قايتۇرۇلمىغان بولسا، يەنە بىر ئاق توپ ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە؟

(2) ئاۋۋال بىر ئاق توپ ئېلىنىپ خالتىغا قايتۇرۇلغان بولسا، يەنە بىر ئاق توپ ئېلىشنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە؟

3. ھاۋا رايىدىن ئالدىن بېرىلگەن مەلۇماتلارغا ئاساسلانغاندا، يېڭى يىل بايرىمى مەزگىلىدە A جايدا يامغۇر يېغىش ئېھتىماللىقى 0.2، B جايدا يامغۇر يېغىش ئېھتىماللىقى 0.3 ئىكەن. بۇ مەزگىلدە A، B ئىككى جايدا يامغۇر يېغىش ـ ياغماسلىقى ئۆزئارا تەسىر كۆرسەتمىسە:

(1) A، B نىڭ ھەر ئىككىسىدە يامغۇر يېغىش ئېھتىماللىقىنى ھېسابلاڭ؛

(2) A، B نىڭ ھەر ئىككىسىدە يامغۇر ياغماسلىق ئېھتىماللىقىنى ھېسابلاڭ؛

(3) كەم دېگەندە A، B ئىككى جاينىڭ بىرىدە يامغۇر يېغىش ئېھتىماللىقىنى ھېسابلاڭ.

4. A بىلەن B ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەر بولسا، A بىلەن $\overline{B}$، $\overline{A}$ بىلەن B، $\overline{A}$ بىلەن $\overline{B}$ نىڭمۇ ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەر بولىدىغانلىقىنى ئىسپاتلاڭ.

5. ئۆزئارا مۇستەقىل ۋەقەلەرگە دائىر 2 ئەمەلىي مىسال كەلتۈرۈڭ.

3-2-2 مۇستەقىل تەكرار تەجرىبە ۋە ئىككى ئەزالىق تەقسىماتى

تاسادىپىي ھادىسىلەرنى تەتقىق قىلغاندا، كۆپ ھاللاردا ئوخشاش شەرت ئاستىدا نۇرغۇن تەجرىبىلەرنى تەكرار ئىشلەپ قانۇنىيەتنى بايقاشقا توغرا كېلىدۇ. مەسىلەن، مېتال پۇل تاشلاش نەتىجىسىنىڭ قانۇنىيىتىنى تەتقىق قىلىش ئۈچۈن نۇرغۇن مېتال پۇل تاشلاش تەجرىبىلىرىنى ئىشلەشكە توغرا كېلىدۇ. روشەنكى، مېتال پۇلنى n قېتىم تەكرار تاشلاش جەريانىدا، ھەر قېتىمقى مېتال پۇل تاشلاش تەجرىبىسىنىڭ نەتىجىسى قالغان مېتال پۇل تاشلاش تەجرىبىلىرىنىڭ تەسىرىگە ئۇچرىمايدۇ. يەنى

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \qquad (1)$$

بۇنىڭدىكى A_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ بولسا i نچى قېتىمقى تەجرىبىنىڭ نەتىجىسى.

ئومۇمەن، ئوخشاش شەرت ئاستىدا n قېتىم تەكرار ئىشلەنگەن تەجرىبە n **قېتىملىق مۇستەقىل تەكرار تەجرىبە** (independent and repeated trials) دەپ ئاتىلىدۇ.

n قېتىملىق مۇستەقىل تەجرىبىدە، «ئوخشاش شەرت ئاستىدا» دېگەنلىك ھەرقايسى قېتىملىق تەجرىبە نەتىجىلىرىنىڭ باشقا تەجرىبىلەرنىڭ تەسىرىگە ئۇچرىمايدىغانلىقى بىلەن، يەنى (1) ئىپادىنىڭ كۈچكە ئىگە بولۇشى بىلەن تەڭ كۈچلۈك بولىدۇ.

ئىزدىنىش

بىر باسما مىخنى تاشلاشتا، مىخ ئۇچىنىڭ يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈش ئېھتىماللىقىنى p دېسەك، مىخ ئۇچىنىڭ تۆۋەنگە قاراپ چۈشۈش ئېھتىماللىقى $q=1-p$ بولىدۇ. بىر باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچىنىڭ پەقەت 1 قېتىملا يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈشىنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

بىر باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلاش دېگەنلىك 3 قېتىم مۇستەقىل تەكرار تەجرىبە ئىشلەش دېگەنلىكتۇر. «i نچى قېتىم تاشلىغاندا مىخ ئۇچى يۇقىرىغا قاراپ چۈشىدۇ» دېگەن ۋەقەنى $A_i(i=1, 2, 3)$ بىلەن، «مىخ ئۇچى پەقەت 1 قېتىملا يۇقىرىغا قاراپ چۈشىدۇ» دېگەن ۋەقەنى B_1 بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا:

$$B_1=(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ ، $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ ، $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ ۋەقەلەر ئۆزئارا سىغىشالمايدىغانلىقى ئۈچۈن، ئېھتىماللىقنىڭ قوشۇش فورمۇلىسىغا ئاساسەن:

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=q^2p+q^2p+q^2p=3q^2p.\end{aligned}$$

شۇڭا، باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچىنىڭ پەقەت 1 لا قېتىم يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈش ئېھتىماللىقى $3q^2p$.

مۇلاھىزە ?

يۇقىرىدا بىر باسما مىخنى 1 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچىنىڭ يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈش ئېھتىماللىقىنى p دەپ پەرەز قىلىۋېلىپ، باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچىنىڭ پەقەت 1 لا قېتىم يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىپ چىقتۇق. ئۇنداق بولسا، باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچىنىڭ k $(0 \leqslant k \leqslant 3)$ قېتىم يۇقىرىغا قاراپ چۈشۈشىنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟ بۇنىڭدىكى قانۇنىيەتنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

ھەرقانداق $0 \leqslant k \leqslant 3$ كە نىسبەتەن، «بىر باسما مىخنى ئۇدا 3 قېتىم تاشلىغاندا، مىخ ئۇچى k قېتىم يۇقىرىغا قاراپ چۈشىدۇ» دېگەن ۋەقەنى B_k بىلەن ئىپادىلىسەك، يۇقىرىقى مۇھاكىمىلەرگە تەقلىد قىلىنغان ھالدا تۆۋەندىكىنى كەلتۈرۈپ چىقىرالايمىز:

$$P(B_0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=q^3,$$
$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=3q^2p,$$
$$P(B_2)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)=3qp^2,$$
$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=p^3.$$

يۇقىرىقى تەڭلىكلەرنى ئىنچىكىلىك بىلەن كۆزىتىپ شۇنى بايقىيالايمىزكى:

$$P(B_k)=\mathrm{C}_3^k p^k q^{3-k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

ئومۇمەن، n قېتىملىق مۇستەقىل تەكرار تەجرىبىدە، A ۋەقەنىڭ يۈز بېرىش قېتىم سانىنى X بىلەن ئىپادىلەيمىز، A ۋەقەنىڭ ھەر قېتىمقى تەجرىبىدە يۈز بېرىش ئېھتىماللىقىنى p دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا

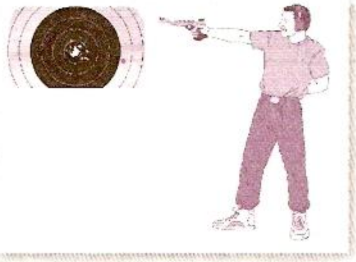
$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$ ❶

بۇ چاغدا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نى **ئىككى ئەزالىق تەقسىمات** (binomial distribution) قا بويسۇنىدۇ دەيمىز ۋە ئۇنى $X \sim B(n,\ p)$ قىلىپ يازىمىز ھەمدە p نى ئۇتۇق ئېھتىماللىقى دەپ ئاتايمىز.

❶ بۇ فورمۇلا بىلەن ئىككى ئەزالىق تېئورېمىسىنىڭ فورمۇلىسىنى سېلىشتۇرۇپ، ئىككىسىنىڭ باغلىنىشىنى بايقىيالىدىڭىزمۇ؟

مۇلاھىزە ?

ئىككى ئەزالىق تەقسىمات بىلەن ئىككى نۇقتىلىق تەقسىماتنىڭ قانداق مۇناسىۋىتى بار؟



4 - مىسال. بىر مەرگەننىڭ ھەر قېتىم قارىغا ئاتقاندىكى نىشانغا تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقى 0.8 بولسا، بۇ مەرگەن 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندا:

(1) دەل 8 قېتىم نىشانغا تەگكۈزۈشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى؛

(2) كەم دېگەندە 8 قېتىم نىشانغا تەگكۈزۈشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تاپايلى (نەتىجىسىنى ئىككى ئىناۋەتلىك رەقەمگىچە ئېنىقلىقتا ئالايلى).

يېشىش: نىشانغا تەگكۈزۈش قېتىم سانىنى X دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $X\sim B(10,\ 0.8)$ بولىدۇ.

(1) 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندا دەل 8 قېتىم نىشانغا تەگكۈزۈشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(X=8)=C_{10}^{8}\times 0.8^{8}\times(1-0.8)^{10-8}\approx 0.30.$$

(2) 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندا كەم دېگەندە 8 قېتىم نىشانغا تەگكۈزۈشنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 8)&=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)\\&=C_{10}^{8}\times 0.8^{8}\times(1-0.8)^{10-8}+C_{10}^{9}\times 0.8^{9}\times(1-0.8)^{10-9}+\\&\quad C_{10}^{10}\times 0.8^{10}\times(1-0.8)^{10-10}\\&\approx 0.68.\end{aligned}$$

مەشىق

1. بىر خىل مەھسۇلات 5 ئىش تەرتىپى بىلەن ئىشلەپچىقىرىلىدۇ ھەمدە 1 — 5 - گىچە بولغان ئىش تەرتىپلىرىدىكى ئىشلەپچىقىرىشنىڭ لاياقەتلىك نىسبىتى ئايرىم - ئايرىم 96%، 99%، 98%، 97%، 96%. ئەگەر پۈتكەن مەھسۇلاتتىن خالىغان 1 ى ئېلىنسا، لاياقەتلىك مەھسۇلاتنىڭ ئېلىنىش ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

2. بىر مېتال پۇلنى ئۇدا 5 قېتىم ئاتقاندىكى ئوڭ چۈشۈش قېتىم سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تېپىڭ.

3. بىر مەرگەننىڭ ھەر قېتىم قارىغا ئاتقاندىكى نىشانغا تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقى 0.9 بولۇپ، ھەر قېتىمقى قارىغا ئېتىش نەتىجىلىرى ئۆزئارا مۇستەقىل بولسا، بۇ مەرگەننىڭ ئۇدا 4 قېتىم قارىغا ئېتىپ، 1 - قېتىم نىشانغا تەگكۈزەلمەي، كېيىنكى 3 قېتىمنىڭ ھەممىسىدە نىشانغا تەگكۈزەلىشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

4. ئىككى ئەزالىق تەقسىماتقا بويسۇنىدىغان تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا دائىر ئىككى ئەمەلىي مىسال كەلتۈرۈڭ.

ئىككى ئەزالىق تەقسىماتقا بويسۇنىدىغان تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار قانداق قىممەت ئالغاندا ئېھتىماللىق ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

ئىككى ئەزالىق تەقسىمات ئەڭ كۆپ قوللىنىلىدىغان دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئېھتىماللىق مودېلى بولۇپ، ئۇنىڭغا ئالاقىدار بەزى مەسىلىلەر ئۈستىدە ئىزدىنىشمۇ ناھايىتى مەنىلىك بولىدۇ. مەسىلەن، يۇقىرىدا كەلتۈرۈلگەن 4 - ئۈلگە مىسالدا، بىز يەنە مۇنداق مەسىلىنى ئوتتۇرىغا قويالايمىز:

ئەگەر بىر مەرگەننىڭ ھەر قېتىم قارىغا ئاتقاندىكى نىشانغا تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقى 0.8 بولۇپ، ھەر قېتىمقى قارىغا ئېتىش نەتىجىلىرى ئۆزئارا مۇستەقىل بولسا، ئۇ ھالدا ئۇ 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندا، نىشانغا قانچە قېتىم تەگكۈزەلىشىنىڭ مۇمكىنچىلىكى ئەڭ چوڭ؟

ئۇنىڭ 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندىكى نىشانغا تەگكۈزۈش قېتىم سانىنى X دەپ پەرەز قىلايلى. ھەر قېتىمقى قارىغا ئېتىش نەتىجىلىرى ئۆزئارا مۇستەقىل بولغانلىقى ئۈچۈن، $X\sim B(10,\ 0.8)$ بولىدۇ. شۇڭا، ئۇنىڭ دەل k قېتىم نىشانغا تەگكۈزەلىشىنىڭ ئېھتىماللىقى:

$$P(X=k)=C_{10}^{k}\times 0.8^{k}\times 0.2^{10-k},\ \ 0\leqslant k\leqslant 10.$$

شۇنىڭ بىلەن:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{(10-k+1)\times 0.8}{k\times 0.2}$$

$$=1+\frac{11\times 0.8-k}{k\times 0.2},\ \ 0\leqslant k\leqslant 10.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، $k<8.8$ بولغاندا، $P(X=k-1)<P(X=k)$؛ $k>8.8$ بولغانـدا، $P(X=k-1)>P(X=k)$ بولىدۇ.

يۇقىرىقى تەھلىللەردىن بىلەلەيمىزكى، بۇ مەرگەن 10 قېتىم قارىغا ئاتقاندا، 8 قېتىم نىشانغا تەگكۈزەلىشىنىڭ مۇمكىنچىلىكى ئەڭ چوڭ بولىدۇ.

مۇلاھىزە؟

ئەگەر $X\sim B(n,p)$ بولۇپ، بۇنىڭدىكى $0<p<1$ بولسا، ئۇ ھالدا k نىڭ قىممىتى 0 دىن n غىچە چوڭايغاندا، $P(X=k)$ قانداق ئۆزگىرىدۇ؟ k قانداق قىممەتنى ئالغاندا $P(X=k)$ ئەڭ چوڭ بولىدۇ؟

2.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. بىر ئاسما چىراغدا ياندىشى ئۇلانغان 3 لامپۇچكا بار. ئەگەر مەلۇم بۆلەك ۋاقىت ئىچىدە ھەربىر لامپۇچكىنىڭ نورمال يورۇتۇش ئېھتىماللىقى ئوخشاشلا 0.7 بولسا، مۇشۇ بۆلەك ۋاقىت ئىچىدە بۇ ئاسما چىراغنىڭ يورۇتالىشىنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

2. بىر ساندۇقتا $2n$ دانە ئاق توپ ۋە $(2n-1)$ دانە قارا توپ بار.

(1) خالىتىدىن بىر قېتىمدا n دانە توپ ئالغاندا، ھەممىسىنىڭ ئاق توپ بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ؛

(2) خالىتىدىن بىر قېتىمدا n دانە توپ ئالغاندا، ئېلىنغان توپلارنىڭ رەڭگى ئوخشاش ئىكەنلىكى مەلۇم بولسا، ئۇلارنىڭ ئاق توپ بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

3. ئەگەر ئوغۇل تۇغۇش بىلەن قىز تۇغۇشنىڭ ئېھتىماللىقى ئوخشاش بولسا، 3 بالا بار بىر ئائىلىدە كەم دېگەندە 2 قىز بالا بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقىنى تېپىڭ.

4. A، B، C ۋەقەلەر $P(A)>0$ ھەمدە B بىلەن C سىغىشالمايدۇ دېگەن شەرتنى قانائەتلەندۈرسە، تۆۋەندىكىنى ئىسپاتلاڭ:

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A).$$

B گۇرۇپپا

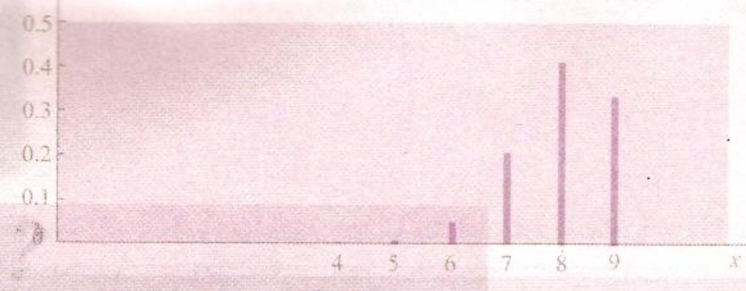
1. A، B ئىككى ماھىر مۇسابىقىلەشمەكچى. ئەگەر A نىڭ ھەربىر مەيدان مۇسابىقىدە ئۇتۇش ئېھتىماللىقى 0.6، B نىڭ ئۇتۇش ئېھتىماللىقى 0.4 بولسا، ئۇ ھالدا 3 مەيداندا 2 مەيدان ئۇتۇش تۈزۈمى بىلەن 5 مەيداندا 3 مەيدان ئۇتۇش تۈزۈمىنىڭ قايسىسى قوللىنىلسا A غا ئېخمۇ پايدىلىق بولىدۇ؟ مەيدان تۈزۈمىنىڭ ئۇزۇن ياكى قىسقا قىلىپ تەسىس قىلىنىشىغا قانداق قارايسىز؟

2. مەكتەپنىڭ باغچە سەيلىسى پائالىيىتىدە مۇنداق بىر ئويۇن تەسىس قىلىنىدى: A ساندۇقتا 3 ئاق توپ، 2 قارا توپ، B ساندۇقتا 2 ئاق توپ، 2 قارا توپ بار، بۇ ئىككى ساندۇقتىن ئايرىم – ئايرىم 1 دىن توپ ئالغاندا، ئېلىنغان ھەر ئىككى توپ ئاق توپ بولسا، توپ ئالغۇچىغا مۇكاپات بېرىلىدۇ. بەزىلەر: ئىككى ساندۇقتىكى ئاق توپلارنىڭ سانى قارا توپتىن كۆپ بولغانلىقى ئۈچۈن، مۇكاپاتقا ئېرىشىش ئېھتىماللىقى 0.5 تىن چوڭ بولىدۇ، دەپ قارايدۇ. سىز قانداق قارايسىز؟

3. بىر تۈركۈم مەھسۇلات بار بولۇپ، ئۇنىڭ ھەر n دانىسىنىڭ ناچار مەھسۇلات نىسبىتى 2%. بۇ بىر تۈركۈم مەھسۇلات ئىچىدىن تەرتىپ بويىچە ھەر قېتىمدا خالىغان 3 نى ئېلىپ تەكشۈرگەندە:

(1) n=500، 5000، 50000 بولغاندا، قايتۇرۇلىدىغان ۋە قايتۇرۇلمايدىغان ئىككى شەكىل بويىچە ئالغاندا دەل 1 ناچار مەھسۇلات چىقىشىنىڭ ئېھتىماللىقى ئايرىم – ئايرىم قانچە؟

(2) (1) گە ئاساسەن، ھىپېر گېئومېتىرىيىلىك تەقسىمات بىلەن ئىككى ئەزالىق تەقسىماتنىڭ مۇناسىۋىتى ھەققىدە قانداق تونۇشقا كەلدىڭىز؟



CHAPTER 2

3-2 دىسكرېت (تارقاق) تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىسى

دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئېھتىماللىق تەقسىمات جەدۋىلىگە ئاساسەن شۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا ئالاقىدار ۋەقەلەرنىڭ ئېھتىماللىقىنى ئېنىقلىغىلى بولىدۇ. بىراق، ئەمەلىي مەسىلىلەردە، بىز بەزىدە تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ بىر قىسىم سانلىق ئالاھىدىلىكلىرىگە تېخىمۇ قىزىقىمىز. مەسىلەن، مەلۇم سىنىپتىكى ئوقۇغۇچىلارنىڭ بىر قېتىملىق ماتېماتىكا سىنىقىدا نامايان قىلغان ئومۇمىي سەۋىيىسىنى ئىگىلەشتە، ئوتتۇرىچە نومۇرغا قاراش ناھايىتى مۇھىم ئىش ھېسابلىنىدۇ؛ مەلۇم سىنىپتىكى ئوقۇغۇچىلارنىڭ ماتېماتىكا نەتىجىسىدە «ئىككى قۇتۇپقا بۆلۈنۈپ كېتىش» ئەھۋالىنىڭ بار - يوقلۇقىنى ئىگىلەشتە، بۇ سىنىپنىڭ ماتېماتىكا نەتىجىسىنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسىغا قاراشقا توغرا كېلىدۇ، ۋە باشقىلار.

1-3-2 دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى

مۇلاھىزە ؟

مەلۇم سودا سارىيى باھاسى ئايرىم - ئايرىم 18/kg يۈەن، 24/kg يۈەن ۋە 36/kg يۈەن بولغان 3 خىل كەمپۈتنى نىسبەت 1 : 2 : 3 بويىچە ئارىلاشتۇرۇپ ساتماقچى بولدى، ئۇلار ئارىلاشما كەمپۈتنىڭ باھاسىنى قانداق بېكىتسە مۇۋاپىق بولىدۇ؟

3 خىل كەمپۈتنىڭ ھەر 1 kg ئارىلاشما كەمپۈتتىكى ماسسىسى ئوتتۇرا ھېساب بىلەن ئايرىم - ئايرىم $\frac{1}{2}$ kg، $\frac{1}{3}$ kg، $\frac{1}{6}$ kg بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئارىلاشما كەمپۈتنىڭ مۇۋاپىق باھاسى:

$$18\times\frac{1}{2}+24\times\frac{1}{3}+36\times\frac{1}{6}=23 \text{ (يۈەن/kg)}.$$

بۇ سان 3 خىل كەمپۈت باھاسىنىڭ بىر خىل ۋەزىنلىك ئوتتۇرىچە قىممىتى[1] بولۇپ، بۇ يەردە ۋەزىن سانى ئايرىم - ئايرىم $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ ۋە $\frac{1}{6}$ بولىدۇ.

[1] ۋەزىننى تارازا تېشىغا ئوخشاتساق، ئۇ ھالدا ۋەزىن سانى ئېغىر - يېنىكلىكنى ئۆلچەش رولىنى ئوينايدىغان سانلىق قىممەت بولىدۇ. ۋەزىنلىك ئوتتۇرىچە قىممەت دېگىنىمىز بىرقانچە مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە سانىنى ھېسابلىغاندا، ھەربىر مىقدارنىڭ ئومۇمىي مىقداردىكى مۇھىملىقىنىڭ ئوخشاش بولماسلىقىغا قاراپ، ئۇلارنى ئايرىم - ئايرىم ئوخشاش بولمىغان ۋەزىن سانىغا ئىگە قىلىشنى كۆرسىتىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر ئاربلاشما كەمپۇتتىكى ھەربىر تال كەمپۇتنىڭ ماسسىسى ئۆزئارا تەڭ بولسا، ۋەزىن سانىنىڭ ئەمەلىي مەنىسىنىڭ نېمە ئىكەنلىكىنى چۈشەندۈرەلەمسىز؟

كلاسسىك ئېھتىماللىق مودېلىغا ئاساسەن، ئارىلاشما كەمپۇتتىن خالىغان بىر كەمپۇتنى ئالساق، بۇ كەمپۇتنىڭ 1 ـ خىل كەمپۇت بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقى $\frac{1}{2}$، 2 ـ خىل كەمپۇت بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقى $\frac{1}{3}$، 3 ـ خىل كەمپۇت بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقى $\frac{1}{6}$ بولىدۇ، يەنى ئېلىنغان بۇ كەمپۇتنىڭ باھاسى 18/kg يۈەن، 24/kg يۈەن، 36/kg يۈەن بولغان كەمپۇت بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقى ئايرىم ـ ئايرىم $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$ ۋە $\frac{1}{6}$ بولىدۇ. بۇ بىر تال كەمپۇتنىڭ باھاسىنى X بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا X دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، ئۇنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى:

6.2 ـ جەدۋەل

X	18	24	36
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

كۆرۈشكە بولىدۇكى، ۋەزىن سانى دەل تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى بولىدۇ. شۇنداق قىلىپ، ھەربىر كىلوگرام ئارىلاشما كەمپۇتنىڭ مۇۋاپىق باھاسىنى تۆۋەندىكىدەك ئىپادىلەشكە بولىدۇ:

$$18\times P(X=18)+24\times P(X=24)+36\times P(X=36).$$

ئومۇمەن، ئەگەر دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى:

7.2 ـ جەدۋەل

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

بولسا، ئۇ ھالدا

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$$

نى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ **ئوتتۇرىچە قىممىتى** (mean) ياكى **ماتېماتىكىلىق كۈتۈلمىسى** (mathematical expectation) دەپ ئاتايمىز. ئۇ دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ قىممەت ئېلىشىنىڭ ئوتتۇرىچە سەۋىيىسىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ.

ئەگەر $Y=aX+b$ بولۇپ، a، b لار تۇراقلىق سان بولسا، ئۇ ھالدا Y مۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولىدۇ.

$$P(Y=ax_i+b)=P(X=x_i),\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

بولغانلىقتىن، Y نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى:

8.2 ـ جەدۋەل

Y	ax_1+b	ax_2+b	…	ax_i+b	…	ax_n+b
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

شۇڭا:

$$E(Y)=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_i+b)p_i+\cdots+(ax_n+b)p_n$$
$$=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots+p_n)$$
$$=aE(X)+b.$$

يەنى

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

1 ـ مىسال. ۋاسكېتبول مۇسابىقىسىدە، گارغا جازا توپ ئاتقاندا 1 قېتىم چۈشۈرگىنىگە 1 نومۇر، چۈشۈرەلمىگىنىگە 0 نومۇر بېرىلىدۇ. بىر تەنھەرىكەتچىنىڭ جازا توپ ئېتىپ گارغا چۈشۈرۈش ئېھتىماللىقى 0.7 بولسا، ئۇنىڭ 1 قېتىم جازا توپ ئېتىپ نومۇرغا ئېرىشىشى X نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى قانچە بولىدۇ؟

يېشىش: چۈنكى $P(X=0)=0.3$ ، $P(X=1)=0.7$ ، شۇڭا:

$$E(X)=1\times P(X=1)+0\times P(X=0)=1\times 0.7+0\times 0.3=0.7.$$

ئومۇمەن، ئەگەر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X ئىككى نۇقتىلىق تەقسىماتقا بويسۇنسا، ئۇ ھالدا:

$$E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p.$$

شۇڭا:

ئەگەر X ئىككى نۇقتىلىق تەقسىماتقا بويسۇنسا، ئۇ ھالدا $E(X)=p$.

ئەگەر $X\sim B(n,\ p)$ بولسا، ئۇ ھالدا $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ غا ئاساسەن:

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}npC_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}$$
$$=np\sum_{k=0}^{n}C_{n-1}^{k}p^kq^{n-1-k}=np.$$

شۇڭا:

ئەگەر $X\sim B(n,\ p)$ بولسا، ئۇ ھالدا $E(X)=np$.

ئىككى نۇقتىلىق تەقسىماتنىڭ ئوتتۇرىچە قىممەت فورمۇلىسىغا ئاساسلانغاندا، ئەگەر جازا توپ ئاتقاندىكى گارغا چۈشۈرۈش ئېھتىماللىقى 0.8 بولسا، بىر قېتىم جازا توپ ئېتىپ 1 نومۇرغا ئېرىشىشنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى قانچە بولىدۇ؟

مۇلاھىزە

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى بىلەن ئەۋرىشكىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ئارىسىدا قانداق باغلىنىش ۋە پەرق بار؟

بايقاشقا بولىدۇكى، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى تۇراقلىق سان بولىدۇ، ھالبۇكى، ئەۋرىشكىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ئەۋرىشكىنىڭ ئوخشاش بولماسلىقىغا ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولىدۇ. ئاددىي تاسادىپىي ئەۋرىشكىلەردە، ئەۋرىشكە سىغىمىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ، ئەۋرىشكىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ئومۇمىي گەۋدىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىگە بارغانسېرى يېقىنلىشىدۇ، شۇڭا بىز ئومۇمىي گەۋدىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى كۆپ ھاللاردا ئەۋرىشكىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىدىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلەيمىز.

2 ـ مىسال. بىر قېتىملىق بۆلەكلەر بويىچە ئېلىنغان سىناقتا توغرا جاۋابنى تاللاش سوئالىدىن 20 سى چىقىرىلدى، ھەربىر سوئالنىڭ 4 جاۋابى بار بولۇپ، ئۇلارنىڭ پەقەت بىرىلا توغرا. ھەربىر سوئالنىڭ توغرا جاۋابى تاللانسا 5 نومۇر بېرىلىدۇ، تاللانمىسا ياكى خاتا تاللانسا نومۇر بېرىلمەيدۇ، تولۇق نومۇر 100 نومۇر. A ئوقۇغۇچىنىڭ خالىغان بىر سوئالنىڭ جاۋابىنى توغرا تاللاش ئېھتىماللىقى 0.9 بولۇپ، B ئوقۇغۇچى سىناقتا ھەربىر سوئالنىڭ 4 جاۋابى ئىچىدىن خالىغان بىرىنى تاسادىپىي تاللىماقچى بولدى. A، B ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇشۇ قېتىمقى سىناقتىكى نەتىجىسىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممەتلىرىنى ئايرىم ـ ئايرىم تاپايلى.

يېشىش: A، B ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇشۇ قېتىمقى بۆلەكلەر بويىچە ئېلىنغان سىناقتا جاۋابىنى توغرا تاللىيالىغان سوئاللىرىنىڭ سانىنى ئايرىم ـ ئايرىم X_1 ۋە X_2 دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $X_1 \sim B(20, 0.9)$، $X_2 \sim B(20, 0.25)$ بولىدۇ، شۇڭا:

$$E(X_1)=20\times 0.9=18,$$

$$E(X_2)=20\times 0.25=5.$$

ھەربىر سوئالنىڭ جاۋابى توغرا تاللانسا 5 نومۇر بېرىلىدىغانلىقى ئۈچۈن، A، B ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ مۇشۇ قېتىمقى سىناقتىكى نەتىجىسى ئايرىم ـ ئايرىم $5X_1$، $5X_2$ بولىدۇ. شۇنىڭ ئۈچۈن، ئۇلارنىڭ سىناقتىكى نەتىجىلىرىنىڭ كۈتۈلمىسى ئايرىم ـ ئايرىم تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$E(5X_1)=5E(X_1)=5\times 18=90,$$

$$E(5X_2)=5E(X_2)=5\times 5=25.$$

مۇلاھىزە؟

A ئوقۇغۇچى بۇ قېتىمقى سىناقتا چوقۇم 90 نومۇر ئالامدۇ؟ ئۇنىڭ نەتىجىسىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى (كۈتۈلمىسى) 90 نومۇر بولىدۇ دېگەن سۆزنىڭ مەنىسى نېمە؟

3 ـ مىسال. ھاۋا رايىدىن ئالدىن بېرىلگەن مەلۇماتقا ئاساسلانغاندا، مەلۇم رايوندا يېقىنقى مەزگىلدە كىچىك كەلكۈن كېلىش ئېھتىماللىقى 0.25، چوڭ كەلكۈن كېلىش ئېھتىماللىقى 0.01 ئىكەن. بۇ رايوندىكى مەلۇم ئىش ئورنىدا چوڭ تىپلىق بىر ئۈسكۈنە بار بولۇپ، چوڭ كەلكۈن كەلسە بۇ ئۈسكۈنىگە 60 000 يۈەنلىك، كىچىك كەلكۈن كەلسە 10 000 يۈەنلىك زىيان سالىدۇ. ئۈسكۈنىنى قوغداپ قېلىشتا تۆۋەندىكىدەك ئۈچ خىل لايىھە بار:

1 ـ لايىھە: ئۈسكۈنىنى يۆتكەپ كېتىش، يۆتكەش ھەققى 3800 يۈەن؛

2 ـ لايىھە: قوغداش تېمى قوپۇرۇش، قۇرۇلۇش ھەققى 2000 يۈەن، ئەمما تام پەقەت كىچىك كەلكۈنگىلا بەرداشلىق بېرەلەيدۇ.

3 ـ لايىھە: كەلكۈن كەلمىسە ئىدى دەپ ئۈمىد قىلىپ، ھېچقانداق تەدبىر قوللانماسلىق.

قايسى لايىھە ياخشىراق؟

يېشىش: ئۈچ خىل لايىھەدىكى زىياننى ئايرىم ـ ئايرىم X_1، X_2 ۋە X_3 بىلەن ئىپادىلەيلى.

1 ـ لايىھىنى قوللانغاندا، مەيلى كەلكۈن كەلسۇن ـ كەلمىسۇن، 3800 يۈەن زىيان بولىدۇ، يەنى

$$X_1=3\,800.$$

2 ـ لايىھىنى قوللانغاندا، چوڭ كەلكۈن كەلسە 62 000=60 000+2 000 يۈەن زىيان بولىدۇ؛ چوڭ كەلكۈن كەلمىسە 2 000 يۈەن زىيان بولىدۇ، يەنى

$$X_2=\begin{cases}62\,000, & \text{چوڭ كەلكۆن كەلسە;}\\ 2000, & \text{چوڭ كەلكۆن كەلمىسە.}\end{cases}$$

ئوخشاشلا، 3 ـ لايىھەنى قوللانغاندا مۇنداق بولىدۇ:

$$X_3=\begin{cases}60\,000, & \text{چوڭ كەلكۆن كەلسە;}\\ 10\,000, & \text{كىچىك كەلكۆن كەلسە;}\\ 0, & \text{كەلكۆن كەلمىسە.}\end{cases}$$

شۇڭا:

$$E(X_1)=3\,800,$$
$$E(X_2)=62\,000\times P(X_2=62\,000)+2\,000\times P(X_2=2\,000)$$
$$=62\,000\times 0.01+2\,000\times(1-0.01)=2\,600,$$
$$E(X_3)=60\,000\times P(X_3=60\,000)+10\,000\times P(X_3=10\,000)+0\times P(X_3=0)$$
$$=60\,000\times 0.01+10\,000\times 0.25=3\,100.$$

دېمەك، 2 ـ لايىھەنى قوللانغاندا زىيان ئەڭ ئاز بولىدىكەن، شۇڭا مۇشۇ لايىھەنى قوللىنىش كېرەك.

شۇنىڭغا دىققەت قىلىش كېرەككى، يۇقىرىدىكى يەكۈن «ئوتتۇرىچە زىيان» نى سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق كەلتۈرۈپ چىقىرىلغان. «ئوتتۇرىچە زىيان» نى ئادەتتە مۇنداق چۈشەنسەك بولىدۇ: مەسىلىدىكى ھاۋا رايى ئەھۋالى ئىلگىرى كۆپ قېتىم يۈز بەرگەن دەپ پەرەز قىلىنغاندا، 2 ـ لايىھە قوللىنىلسا زىياننى ئەڭ ئاز قىلغىلى بولىدۇ. لېكىن، كەلكۈننىڭ يۈز بېرىش ـ بەرمەسلىكى ۋە ئۇنىڭ چوڭ ياكى كىچىكلىكى تاسادىپىي بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، ئايرىم بىر قېتىملىق تەدبىرگە نىسبەتەن ئېيتقاندا، 2 ـ لايىھەنى قوللىنىشنىڭ ئەڭ ياخشى بولۇشىمۇ ناتايىن.

مەشىق

1. دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۈتۈلمىسى چوقۇم ئۇنىڭ تەجرىبىدە كۆرۈلۈش ئېھتىماللىقىنىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتى بولامدۇ؟ كونكرېت ئەمەلىي مىسالغا ئاساسلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ.

2. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

X	0	1	2	3	4	5
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

بولسا، $E(X)$ نى تېپىڭ.

3. بىر مېتال پۇلنى تاشلىغاندا، ئوڭ چۈشكىنىگە 1 نومۇر، تەتۈر چۈشكىنىگە 1- نومۇر بېرىلىدۇ دەپ بەلگىلەنگەن بولسا، ئېرىشىلىدىغان نومۇر X نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى تېپىڭ.

4. مەھسۇلات مىقدارى ئوخشاش بولغان 2 ئىستانوكتا ئوخشاش بىر خىل دېتال ئىشلەپچىقىرىلدى. بۇ 2 ئىستانوكتا 1 سائەت ئىچىدە ئىشلەپچىقىرىلغان ناچار مەھسۇلاتنىڭ سانى X_1، X_2 لەرنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

X_1	0	1	2	3
P	0.4	0.3	0.2	0.1

X_2	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

بولسا، قايسى ئىستانوك تېخىمۇ ياخشى؟ يەكۈنىڭىزنىڭ ئەمەلىي مەنىسىنى چۈشەندۈرۈڭ.

5. سوّيىتى تەكشى بولغان 5 مېتال پۇلنى تەڭلا تاشلىغاندا، ئوڭ چۈشىدىغان مېتال پۇل سانى X نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى تېپىڭ.

2-3-2 دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى

ئىزدىنىش

ئىككى ئوقۇغۇچىدىن برىنى تاللاپ سىنىپقا ۋاكالىتەن قارىغا ئېتىش مۇسابىقىسگە قاتناشتۇرۇشتا، ئۇلارنىڭ ئىلگىرىكى نەتىجىلىرىنىڭ خاتىرىسىگە ئاساسلانغاندا، 1 ـ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئاتقاندىكى ھالقا سانى X_1 نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى تۆۋەندىكىدەك بولغان:

9.2 ـ جەدۋەل

X_1	5	6	7	8	9	10
P	0.03	0.09	0.20	0.31	0.27	0.10

2 ـ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئاتقاندىكى ھالقا سانى X_2 نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى تۆۋەندىكىدەك بولغان:

10.2 ـ جەدۋەل

X_2	5	6	7	8	9
P	0.01	0.05	0.20	0.41	0.33

ئۇلارنىڭ قايسىسىنى مۇسابىقىگە قاتناشتۇرۇش كېرەك؟

ئىلگىرى ئۆگەنگەن بىلىملىرىمىزگە ئاساسەن، قارىغا ئاتقاندىكى ئوتتۇرىچە ھالقا سانىدىن پايدىلىنىپ ئۇلارنىڭ قارىغا ئېتىش سەۋىيىسىنىڭ يۇقىرى ـ تۆۋەنلىكىنى سېلىشتۇرۇشقا، يەنى X_1، X_2 لەرنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش سەۋىيىسىنىڭ يۇقىرى ـ تۆۋەنلىكىنى ئېنىقلاشقا بولىدۇ. ھېسابلىساق،

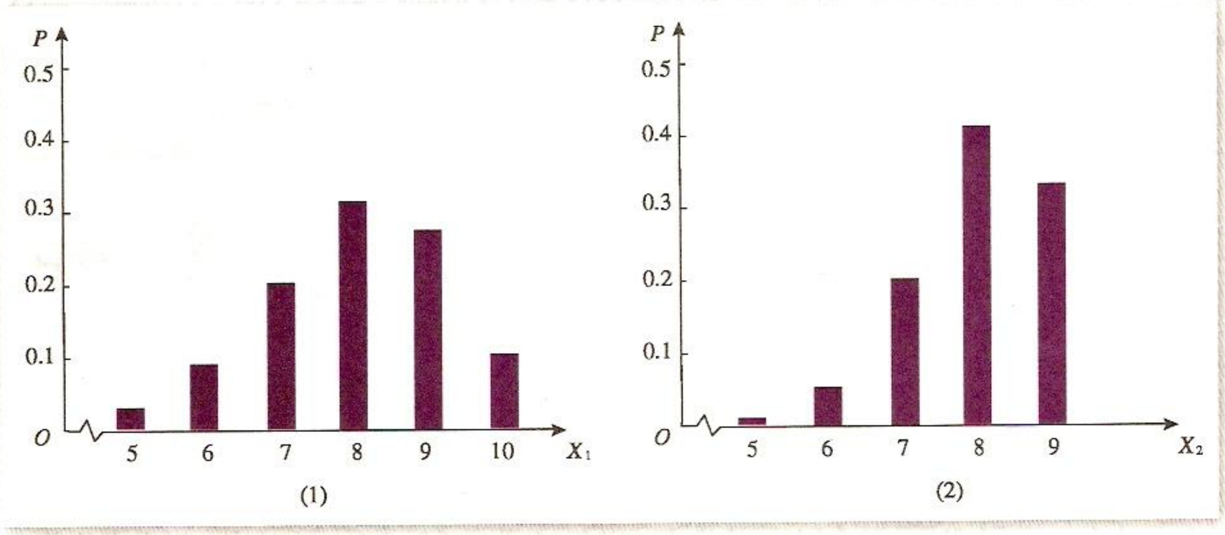
$$E(X_1)=8,\quad E(X_2)=8$$

بولۇپ، ئىككى ئوتتۇرىچە قىممەت ئۆزئارا تەڭ بولۇپ قالدى، بۇنىڭدىن بايقىيالايمىزكى، بۇ ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش سەۋىيىسىنى پەقەت ئوتتۇرىچە قىممەتكىلا ئاساسلىنىپ پەرق ئەتكىلى بولمايدىكەن.

مۇلاھىزە ؟

قارىغا ئاتقاندىكى ئوتتۇرىچە ھالقا سانىدىن سىرت، ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ ئۆزىگە خاس قارىغا ئېتىش ئالاھىدىلىكىنى سۈرەتلەپ بېرەلەيدىغان باشقا كۆرسەتكۈچ بارمۇ؟

1.3.2 ـ رەسىم (1) ۋە (2) ئايرىم ـ ئايرىم X_1 بىلەن X_2 نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى ئىپادىلەيدۇ. (1) ۋە (2) نى سېلىشتۇرۇش ئارقىلىق، 2 ـ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىسى 8 ـ ھالقىغا بەكرەك مەركەزلەشكەنلىكىنى، يەنى مۇشۇ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىسى تېخىمۇ مۇقىم ئىكەنلىكىنى بايقىيالايمىز.



1.3.2 ـ رەسىم

مۇلاھىزە؟

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ مۇقىملىقىنى مىقدار جەھەتتىن قانداق سۈرەتلەش كېرەك؟

بىزگە مەلۇمكى، ئەۋرىشكىنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى بارلىق ئەۋرىشكە سانلىق مەلۇماتلىرى بىلەن ئەۋرىشكە ئوتتۇرىچە قىممىتىنىڭ ئېغىش دەرىجىسىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ، ئۇنىڭدىن پايدىلىنىپ ئەۋ-رىشكە سانلىق مەلۇماتلىرىنىڭ مۇقىملىقىنى سۈرەتلەشكە بولىدۇ. شۇنىڭ بىلەن، تەبىئىي ھالدا بىر ئويغا كېلىمىزكى، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ مۇقىملىقىنى ئەۋرىشكىنىڭ كۋادراتلىق ئايرى-مىسىغا ئوخشىشىپ كېتىدىغان بىر مىقداردىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەشكە بولامدۇ يوق؟

دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى

11.2 ـ جەدۋەل

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

دەپ پەرەز قىلساق، ئۇ ھالدا $(x_i-E(X))^2$ نىڭ ئوتتۇرىچە قىممەت $(i=1, 2, \cdots, n)$ x_i قىممىتى نىڭ $E(X)$ كە نىسبەتەن ئېغىش دەرىجىسىنى تەسۋىرلەپ بېرىدۇ. ھالبۇكى،

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$$

بولسا مۇشۇ ئېغىش دەرىجىلىرىنىڭ ۋەزىنلىك ئوتتۇرىچە قىممىتى بولۇپ، ئۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ ئۆزىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى $E(X)$ كە نىسبەتەن ئوتتۇرىچە ئېغىش دەرىجىسىنى سۈرەت-لەپ بېرىدۇ. بىز $D(X)$ نى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ **كۋادراتلىق ئايرىمىسى** (variance) دەپ ئاتايمىز، ئۇنىڭ ئارىفمېتىكىلىق كۋادرات يىلتىزى $\sqrt{D(X)}$ نى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ **ئۆلچەملىك ئايرىمىسى** (standard deviation) دەيمىز.

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى بىلەن ئۆلچەملىك ئايرىمىسىنىڭ ھەر

ئىككىسى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلارنىڭ قىممىتىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممەتكە نىسبەتەن ئوتتۇرىچ
ئېغىش دەرىجىسىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ. كۋادراتلىق ئايرىما ياكى ئۆلچەملىك ئايرىما قانچىكى كىچىـ
بولسا، تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممەتكە نىسبەتەن ئوتتۇرىچە ئېغىش دەرىجىسـ
مۇ شۇنچە كىچىك بولىدۇ.

مۇلاھىزە ؟

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى بىلەن ئەۋرىشكىنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى ئارىسىدا قانداق باغلىنىش ۋە پەرق بار؟

تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى تۇراقلىق سان بولىدۇ. ھالبۇكى، ئەۋرىش
كىنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى ئەۋرىشكىنىڭ ئوخشاش بولماسلىقىغا ئەگىشىپ ئۆزگىرىدىغانلىقى ئۈ
چۈن، ئۇ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولىدۇ. ئاددىي تاسادىپىي ئەۋرىشكىلەردە، ئەۋرىشكە كۋادراتلى
ئايرىمىسى ئەۋرىشكە سىغىمىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ ئومۇمىي گەۋدە كۋادراتلىق ئايرىمىسىغا بارغا
سېرى يېقىنلىشىدىغانلىقى ئۈچۈن، بىز كۆپ ھاللاردا ئومۇمىي گەۋدە كۋادراتلىق ئايرىمىسىنى ئەۋرىش
كە كۋادراتلىق ئايرىمىسىدىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلەيمىز.

ئەمدى، ماھىر تالاشنى ئاساس بىلەن تەمىن ئېتىش ئۈچۈن، يۇقىرىدىكى ئىككى ئوقۇغۇچىنىڭ ئۆ
زىگە خاس قارىغا ئېتىش ئالاھىدىلىكلىرىنى ئۇلارنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىلىرىنىڭ كۋادراتلىق ئايـ
مىسىدىن پايدىلىنىپ سۈرەتلەيمىز. ئالدىدىكى ھېسابلاش نەتىجىلىرى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىنىڭ ئېنىق
لىمىسىغا ئاساسەن:

$$D(X_1)=\sum_{i=5}^{10}(i-8)^2P(X_1=i)=1.50,$$

$$D(X_2)=\sum_{i=5}^{9}(i-8)^2P(X_2=i)=0.82.$$

شۇنىڭ ئۈچۈن، 1 ـ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىسىنىڭ مۇقىملىقى ناچارراق، 2 ـ ئوقۇغ
چىنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىسىنىڭ مۇقىملىقى ياخشىراق بولۇپ، 2 ـ ئوقۇغۇچىنىڭ قارىغا ئېتىش ن
تىجىسى 8 ـ ھالقا ئەتراپىغا مۇقىملاشقان.

مۇلاھىزە ؟

ئەگەر باشقا سىنىپتىكى ماھىرلارنىڭ قارىغا ئېتىش نەتىجىسى 9 ـ ھالقا ئەتراپىدا بولسا، بۇ سىنىپتىن قايسى ماھىرنى مۇسابىقىگە قاتناشتۇرۇش كېرەك؟ ئەگەر باشقا سىنىپتىكى ماھىرلارنىڭ نەتىجىسى 7 ـ ھالقا ئەتراپىدا بولسا، بۇ سىنىپتىن قايسى ماھىرنى مۇسابىقىگە قاتناشتۇرۇش كېرەك؟

تۆۋەندىكى يەكۈنلەرنى ئىسپاتلاشقا بولىدۇ:

ئەگەر X ئىككى نۇقتىلىق تەقسىماتقا بويسۇنسا، ئۇ ھالدا $D(X)=p(1-p)$.

ئەگەر $X\sim B(n,\ p)$ بولسا، ئۇ ھالدا $D(X)=np(1-p)$.

ئىزدىنىش

تۆۋەندىكى يەكۈننى ئىسپاتلىيالامسىز؟

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

4 ـ مىسال. سۈپىتى تەكشى بولغان بىر شىشخالنى تاسادىپىي تاشلىغاندىكى يۇقىرىغا قاراپ چۈشكەن چېكىت سانى X نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى، كۋادراتلىق ئايرىمىسى ۋە ئۆلچەملىك ئايرىمىسىنى تاپايلى.

يېشىش: شىشخال تاشلىغاندا كېلىپ چىقىدىغان چېكىت سانى X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى:

12.2 ـ جەدۋەل

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

شۇڭا:

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5;$$

$$D(X)=(1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(2-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(3-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(4-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(5-3.5)^2\times\frac{1}{6}+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6}\approx 2.92;$$

$$\sqrt{D(X)}\approx 1.71.$$

5 ـ مىسال. A، B ئىدارىلەرنىڭ ھەر ئىككىسى سىزنى خىزمەتكە تەكلىپ قىلىشنى خالايدۇ، سىز تۆۋەندىكىدەك ئۇچۇرلارغا ئىگە بولدىڭىز:

13.2 ـ جەدۋەل

A ئىدارىدىكى ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ ئايلىق مائاشى X_1 (يۈەن)	1200	1400	1600	1800
ماس ئىش ئورنىغا ئېرىشىشنىڭ ئېھتىماللىقى P_1	0.4	0.3	0.2	0.1

14.2 ـ جەدۋەل

B ئىدارىدىكى ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ ئايلىق مائاشى X_2 (يۈەن)	1000	1400	1800	2200
ماس ئىش ئورنىغا ئېرىشىشنىڭ ئېھتىماللىقى P_2	0.4	0.3	0.2	0.1

مائاش تەمىناتىنىڭ پەرقلىنىش ئەھۋالىغا ئاساسەن، قايسى ئىدارىنى تاللاشنى خالايسىز؟

يېشىش: ئايلىق مائاشنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىگە ئاساسەن، ھېسابلىغۇچ بىلەن ھېسابلىساق:

$$E(X_1)=1200\times0.4+1400\times0.3+1600\times0.2+1800\times0.1=1400,$$

$$
\begin{aligned}
D(X_1) &= (1\,200-1\,400)^2\times 0.4+(1\,400-1\,400)^2\times 0.3+\\
&\quad (1\,600-1\,400)^2\times 0.2+(1\,800-1400)^2\times 0.1\\
&= 40\,000;\\
E(X_2) &= 1\,000\times 0.4+1\,400\times 0.3+1\,800\times 0.2+2\,200\times 0.1\\
&= 1\,400,\\
D(X_2) &= (1\,000-1\,400)^2\times 0.4+(1\,400-1\,400)^2\times 0.3+\\
&\quad (1\,800-1\,400)^2\times 0.2+(2\,200-1\,400)^2\times 0.1\\
&= 160000.
\end{aligned}
$$

$D(X_1)<D(X_2)$ ، $E(X_1)=E(X_2)$ بولغانلىقتىن، ئىككى ئىدارىنىڭ مائاشىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ئۆزئارا تەڭ، ئەمما A ئىدارىنىڭ ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ مائاشى نىسبەتەن مەركەزلەشكەن، B ئىدارىنىڭ ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ مائاشى نىسبەتەن تارقاق. يۇقىرىدىكىلەرگە ئاساسلانغاندا، ئەگەر ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ مائاش پەرقى كىچىكرەك بولۇشنى خالىسىڭىز A ئىدارىنى تاللاڭ؛ ئوخشاش بولمىغان ئىش ئورۇنلىرىنىڭ مائاش پەرقى چوڭراق بولۇشنى خالىسىڭىز B ئىدارىنى تاللاڭ.

مەشىق

1. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

X	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

بولسا، $D(X)$ بىلەن $\sqrt{D(X)}$ نى تېپىڭ.

2. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ $P(X=c)=1$ (c تۇراقلىق سان) نى قانائەتلەندۈرىدىغانلىقى بېرىلگەن بولسا، $D(X)$ نى تېپىڭ.

3. كۋادراتلىق ئايرىمىنىڭ ئەمەلىيەتتىكى قوللىنىلىشى نېمە؟ كونكرېت ئەمەلىي مىساللار بىلەن چۈشەندۈرۈڭ.

3.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

X	-2	1	3
P	0.16	0.44	0.40

بولسا، $E(X)$ ، $E(2X+5)$ ، $D(X)$ ، $\sqrt{D(X)}$ لەرنى تېپىڭ.

2. بىر مەرگەننىڭ قارا مەركىزىگە تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقى 0.9 . ئەگەر بۇ مەرگەن ئوخشاش شەرت ئاستىدا قارىغا ئۇدا 10 قېتىم ئاتقان بولسا، ئۇنىڭ قارا مەركىزىگە تەگكۈزۈش قېتىم سانىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى تېپىڭ.

3. 10 000 دانە لاتارىيە بېلەتى تارقىتىلدى. ئۇلارنىڭ ئىچىدە، مۇكاپات سوممىسى 2 يۈەن بولغىنىدىن 1000 دانە بېلەت، 10 يۈەنلىكتىن 300 دانە بېلەت، 50 يۈەنلىكتىن 100 دانە بېلەت، 100 يۈەنلىكتىن 50 دانە بېلەت، 1000 يۈەنلىكتىن 5 دانە بېلەت بار بولسا، 1 دانە لاتارىيە بېلەتى سېتىۋالغاندا چىقىشى مۇمكىن بولغان مۇكاپات سوممىسىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى قانچە يۈەن؟

4. A ، B ئىككى مەرگەننىڭ ئوخشاش شەرت ئاستىدا قارىغا ئاتقاندىكى ھالقا سانى X_1 ، X_2 لەرنىڭ تەقسىمات جەدۋىلى ئايرىم ـ ئايرىم

X_1	6	7	8	9	10
P	0.16	0.14	0.42	0.1	0.18

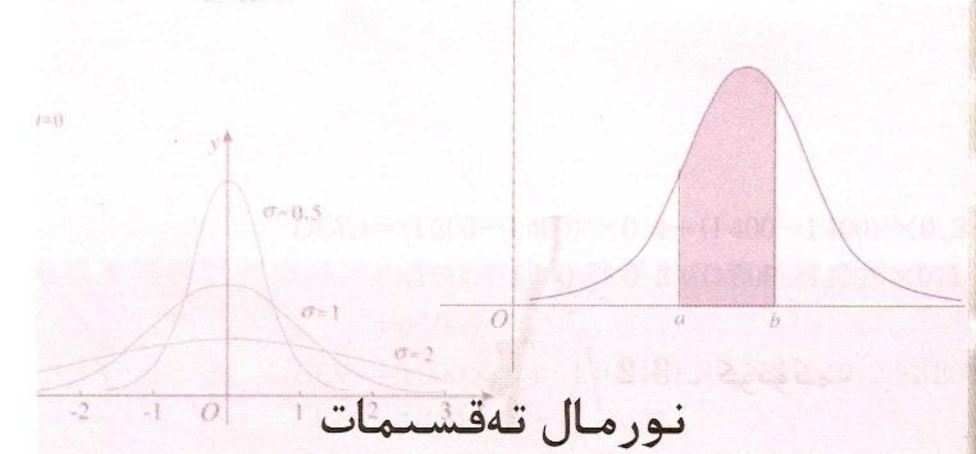
X_2	6	7	8	9	10
P	0.19	0.24	0.12	0.28	0.17

بولسا، ھالقا سانىنىڭ كۈتۈلمىسى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىسىغا ئاساسەن، بۇ ئىككى مەرگەننىڭ قارىغا ئېتىش سەۋىيىسىنى سېلىشتۇرۇڭ.

B گۇرۇپپا

1. ئىككى شەشخالنى تاشلاش تەجرىبىسى ئىشلىگەندە، كەم دېگەندە شەشخالنىڭ بىرىدە 5 چېكىت ياكى بىرىدە 6 چېكىت كۆرۈلسە تەجرىبە مۇۋەپپەقىيەتلىك بولدى دەپ قارىلىدۇ، مۇشۇنداق 30 قېتىملىق تەجرىبىدىكى مۇۋەپپەقىيەتلىك بولۇش قېتىم سانى X نىڭ كۈتۈلمىسىنى تېپىڭ.

2. بىر ماشىنىدا بىر كۈن ئىچىدە كاشىلا يۈز بېرىش ئېھتىماللىقى 0.1 . بىر ھەپتىدىكى 5 ئىش كۈنى ئىچىدە، بۇ ماشىنىدا كاشىلا يۈز بەرمىسە 50 مىڭ يۈەن، 1 قېتىم كاشىلا يۈز بەرسە 25 مىڭ يۈەن، 2 قېتىم كاشىلا يۈز بەرسە 0 يۈەن پايدا ئالغىلى بولۇپ، 3 قېتىم ياكى 3 قېتىمدىن ئارتۇق كاشىلا يۈز بەرسە 10 مىڭ يۈەن زىيان بولىدۇ. بۇ ماشىنىدىن بىر ھەپتە ئىچىدە ئېلىش مۇمكىن بولغان پايدىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىنى تېپىڭ.

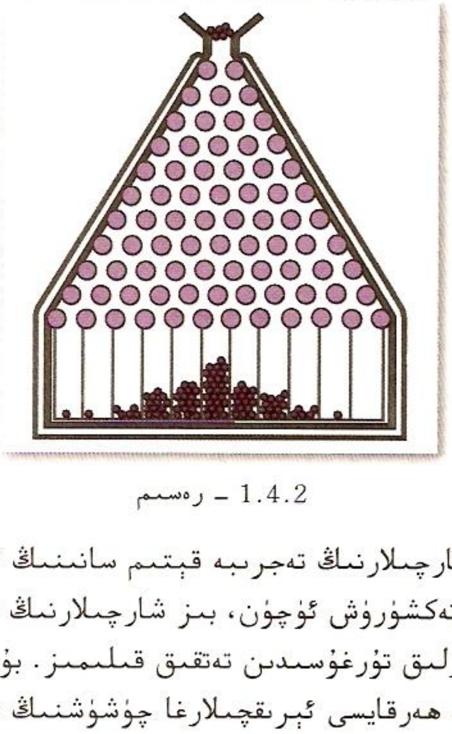


CHAPTER 2

4-2 نورمال تەقسىمات

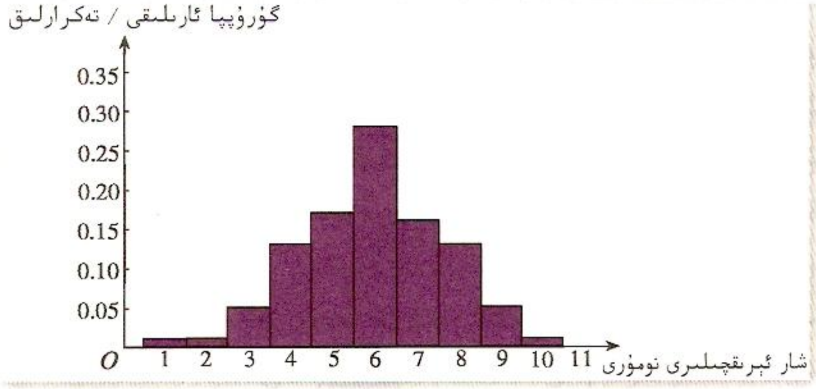
سىز گالتون تاختىسىنى كۆرۈپ باققانمۇ؟ 1.4.2 ـ رەسىمدە بېرىلگىنى گالتون تاختىسىنىڭ سخېمىسى. بۇنىڭدا، بىر ياغاچ تاختىغا بىرقانچە قاتار سىلىندىر شەكىللىك ياغاچ پارچىسى ئۆزئارا پاراللېل ھەم بىر ـ بىرىگە تاقىشىپ قالمايدىغان قىلىپ مىخلىنىپ، ياغاچ پارچىلىرى ئارىسىغا ئۆتۈش يولى ئورنىدا مۇۋاپىق يوچۇق قالدۇرۇلىدۇ، ئالدى تەرەپتە بىر ئەينەك توسۇق بار. بىر شارچە گالتون تاختىسىنىڭ ئۈستى تەرىپىدىكى ئۆتۈش ئېغىزىدىن تۆۋەنگە چۈشۈرۈلگەندە، شارچە چۈشۈش جەريانىدا قەۋەتمۇقەۋەت ياغاچ پارچىلىرى بىلەن سوقۇلۇپ، ئاخىر گالتون تاختىسىنىڭ تۆۋەن تەرىپىدىكى مەلۇم بىر شار ئېرىقچىسى ئىچىگە چۈشىدۇ.

شار ئېرىقچىلىرىغا نومۇر قويۇۋالساق، شارچىنىڭ زادى قانچىنچى نومۇرلۇق ئېرىقچىغا چۈشكەنلىكىنى تەكشۈرۈش ئاسان بولىدۇ. گالتون تاختىسى تەجرىبىسىنى تەكرار ئىشلىگەندە، ھەرقايسى ئېرىقچىلارغا چۈشىدىغان شارچىلارنىڭ سانى تەجرىبە قېتىم سانىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ بارغانسېرى كۆپىيىپ، ئۇلارنىڭ دۆۋىلىنىش ئېگىزلىكىمۇ بارغانسېرى يۇقىرىلايدۇ. ھەرقايسى ئېرىقچىلاردىكى دۆۋىلىنىش ئېگىزلىكى شارچىلارنىڭ ھەرقايسى ئېرىقچىلارغا چۈشكەن سانىنىڭ ئاز ـ كۆپلۈكىنى ئەكس ئەتتۈرىدۇ.



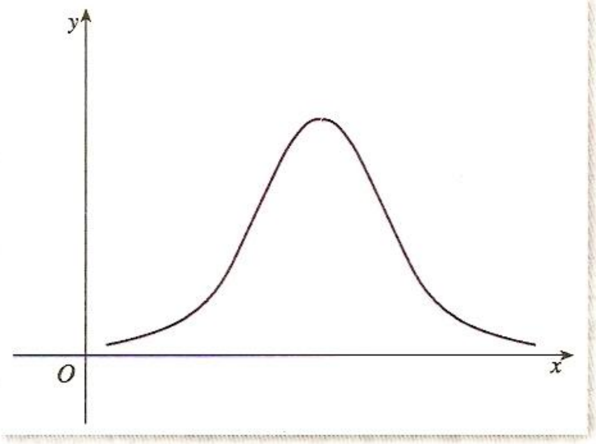
1.4.2 ـ رەسىم

ھەرقايسى ئېرىقچىلاردىكى شارچىلارنىڭ تەجرىبە قېتىم سانىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ تەقسىملىنىش ئەھۋالىنى تېخىمۇ ياخشى تەكشۈرۈش ئۈچۈن، بىز شارچىلارنىڭ تەقسىملىنىش قانۇنىيىتىنى يەنىمۇ ئىلگىرىلىگەن ھالدا تەكرارلىق تۇرغۇسىدىن تەتقىق قىلىمىز. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئېرىقچىلارنىڭ نومۇرىنى ئابسىسسا، شارچىلارنىڭ ھەرقايسى ئېرىقچىلارغا چۈشۈشىنىڭ تەكرارلىق قىممىتىنى ئوردىنات قىلىپ ئېلىپ، تەكرارلىقنىڭ تەقسىمات گىستوگراممىسىنى سىزىپ چىقىمىز (2.4.2 ـ رەسىم).



2.4.2 ـ رەسىم

تەكرارلاش قېتىم سانىنىڭ ئېشىشىغا ئەگىشىپ، بۇ تەكرارلىق گىستوگراممىسىنىڭ شەكلى بىر قوڭغۇراقسىمان ئەگرى سىزىققا بارغانسېرى يېقىنلىشىدۇ (3.4.2 ـ رەسىم).



3.4.2 ـ رەسىم

بۇ ئەگرى سىزىق دەل (ياكى تەقرىبىي ھالدا) تۆۋەندىكى فۇنكسىيىنىڭ گرافىكى بولىدۇ:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(-\infty,\ +\infty),$$

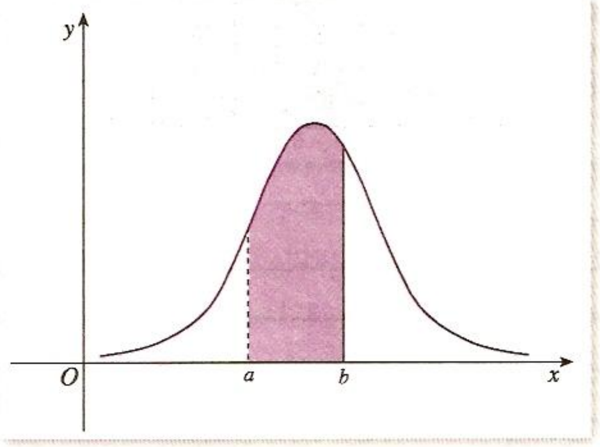
بۇنىڭدىكى ھەقىقىي سان μ ۋە σ [1] ($\sigma>0$) پارامېتىر. بىز $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ نىڭ گرافىكىنى **نورمال تەقسىماتنىڭ زىچلىق ئەگرى سىزىقى**، قىسقىچە **نورمال ئەگرى سىزىق** دەپ ئاتايمىز.

ئەگەر گالتون تاختىسى تەجرىبىسىدە ئەڭ تۆۋەن تەرەپتىكى ئېرىقچىلارنى چىقىرىۋېتىپ، ئۇنىڭ تۆۋەن تەرىپىنى بويلاپ بىر گورىزونتال ئوردىنات ئوقى ھاسىل قىلساق ھەمدە ئېرىقچىنىڭ كەڭلىكىنى شكالا بىرلىكى قىلىپ ئېلىپ، چۈشكەن شارچىنىڭ گالتون تاختىسىنىڭ تۆۋەن قىسمى بىلەن 1 ـ قېتىم تېگىشكەن چاغدىكى كوئوردېناتىنى X بىلەن ئىپادىلىسەك، ئۇ ھالدا X بىر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بولۇپ، ئۇنىڭ ئىنتېرۋال $(a, b]$ غا چۈشۈش ئېھتىماللىقى تۆۋەندىكىدەك بولىدۇ:

$$P(a<X\leqslant b)\approx\int_a^b\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x.$$

[1] μ، σ لار گرېكچە ھەرپ بولۇپ، ئايرىم ـ ئايرىم [mjuː]، ['sigmə] دەپ ئوقۇلىدۇ.

بۇ ئىپادە بىزگە شۇنى بىلدۈرىدۇكى، نورمال ئەگرى سىزىق، $(a, 0)$، $(b, 0)$ ئىككى نۇقتىدىن ئۆتكەن ھەمدە x ئوقىغا تىك بولغان ئىككى تۈز سىزىق ۋە x ئوق بىلەن قورشالغان تەكشىلىك شەكىلنىڭ يۈزى (4.4.2 ـ رەسىمدىكى تۇتۇق قىسىمنىڭ يۈزى) دەل X نىڭ ئىنتېرۋال $(a, b]$ غا چۈشۈش ئېھتىماللىقىنىڭ تەقرىبىي قىممىتى بولىدۇ.



4.4.2 ـ رەسىم

ئومۇمەن، ئەگەر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X ھەرقانداق ھەقىقىي سان $a<b$ غا نىسبەتەن

$$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\ \mathrm{d}x,$$

نى قانائەتلەندۈرسە، ئۇ ھالدا X نىڭ تەقسىماتى **نورمال تەقسىمات** (normal distribution) دەپ ئاتىلىدۇ. نورمال تەقسىماتنى پارامېتىر μ ۋە σ [1] ئارقىلىق تامامەن ئېنىقلاشقا بولىدۇ، شۇڭا ئۇ ئادەتتە $N(\mu, \sigma^2)$ قىلىپ يېزىلىدۇ. ئەگەر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نورمال تەقسىماتقا بويسۇنسا، ئۇ ھالدا ئۇ $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ قىلىپ يېزىلىدۇ.

تەجرىبىلەر ئىسپاتلىدىكى، ئەگەر بىر تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار كۆپلىگەن، ئۆزئارا ئالاقىسى بولمىغان، مۇھىم، مۇھىم ئەمەس دەپ ئايرىلمىغان تاسادىپىي ئامىللار تەسىرىنىڭ نەتىجىلىرىنىڭ يىغىندىسى بولسا، ئۇ ھالدا ئۇ نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ ياكى تەقرىبىي بويسۇنىدۇ. مەسىلەن، گالتون تاختىسى تەجرىبىسىدە، شارچە چۈشۈش جەريانىدا كۆپلىگەن ياغاچ پارچىلىرىغا سوقۇلىدۇ، ھەر قېتىملىق سوقۇلۇش نەتىجىسىدە تاسادىپىي ھالدا سولدىن ياكى ئوڭدىن تۆۋەنگە چۈشىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن ، شارچىنىڭ گالتون تاختىسىنىڭ تۆۋەن قىسمى بىلەن 1 ـ قېتىم تې-

[1] پارامېتىر μ تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار قىممىتىنىڭ ئوتتۇرىچە سەۋىيىسىنى ئەكس ئەتتۈرىدىغان خاراكتېرلىگۈچى سان بولۇپ، ئۇنى ئەۋرىشكىنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتىدىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلىگىلى بولىدۇ؛ σ بولسا تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئومۇمىي جەھەتتىن تەۋرىنىشىنىڭ چوڭ ـ كىچىكلىكىنى ئۆلچەيدىغان خاراكتېرلىگۈچى سان بولۇپ، ئۇنى ئەۋرىشكىنىڭ ئۆلچەملىك ئايرىمىسىدىن پايدىلىنىپ مۆلچەرلىگىلى بولىدۇ.

فرانسىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى دې موۋر 1733 ـ يىلى $n!$ نىڭ تەقرىبىي فورمۇلىسىدىن پايدىلىنىپ نورمال تەقسىماتنى كەلتۈرۈپ چىقارغانىدى. كېيىن، گېرمانىيىلىك ماتېماتىكا ئالىمى گائۇس خاتالىق پەرقىنى ئۆلچەشنى تەتقىق قىلغاندا نورمال تەقسىماتنى باشقا بىر تۇرغۇدىن كەلتۈرۈپ چىقاردى ھەمدە ئۇنىڭ خۇسۇسىيىتىنى تەتقىق قىلدى. شۇڭا، كىشىلەر نورمال تەقسىماتنى گائۇس تەقسىماتى دەپمۇ ئاتايدۇ.

گىشكەن چاغدىكى كوئوردىناتى X كۆپلىگەن تاسادىپىي سوقۇلۇشلارنىڭ نەتىجىسى بولۇپ، ئۇ نورمال تەقسىماتقا تەقرىبىي بويسۇنىدۇ.

رېئال تۇرمۇشتىكى نۇرغۇن تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارلار نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ ياكى تەقرىبىي بويسۇنىدۇ. مەسىلەن، ئۇزۇنلۇق ئۆلچەشتىكى خاتالىق پەرقى؛ مەلۇم رايوندىكى تەڭ ياشلىق ئادەملەر توپىنىڭ بوي ئېگىزلىكى، بەدەن ئېغىرلىقى، ئۆپكىسىنىڭ نەپەس ئېلىش سىغىمچانلىقى قاتارلىقلار؛ مۇئەييەن شارائىتتا ئۆسكەن بۇغداينىڭ تۈپ ئېگىزلىكى، باشاق ئۇزۇنلۇقى، بىرلىك مەھسۇلات مىقدارى قاتارلىقلار؛ نورمال ئىشلەپچىقىرىش شارائىتىدىكى ھەر خىل مەھسۇلاتلارنىڭ سۈپەت كۆرسەتكۈچى (مەسىلەن، دېتالنىڭ ئۆلچىمى، تالانىڭ ئىنچىكىلىكى، كوندېنساتورنىڭ ئېلېكتر سىغىمچانلىقى، ئېلېكترون لامپىسىنىڭ ئىشلىتىلىش ئۆمرى قاتارلىقلار)؛ مەلۇم جاينىڭ ھەر يىلى 7 - ئايدىكى ئوتتۇرىچە تېمپېراتۇرىسى، ئوتتۇرىچە نەملىكى، ھۆل - يېغىن مىقدارى قاتارلىقلار.

شۇنىڭ ئۈچۈن، نورمال تەقسىمات تەبىئىي ھادىسە، ئىشلەپچىقىرىش ۋە تۇرمۇش ئەمەلىيىتىدە كەڭ مەۋجۇت بولۇپ، ئېھتىماللىق ۋە ستاتىستىكىدا مۇھىم ئورۇننى ئىگىلەيدۇ.

مۇلاھىزە ؟

4.4.2 - رەسىمنى كۆزىتىڭ، ئاندىن $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ نىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى ۋە ئېھتىماللىقنىڭ خۇسۇسىيىتىگە بىرلەشتۈرۈپ، نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ ئالاھىدىلىكىنى سۆزلەپ بېرىڭ.

بايقاشقا بولىدۇكى، نورمال ئەگرى سىزىق تۆۋەندىكىدەك ئالاھىدىلىكلەرگە ئىگە:

(1) ئەگرى سىزىق x ئوقنىڭ يۇقىرى تەرىپىدە ياتىدۇ ھەمدە x ئوق بىلەن كېسىشمەيدۇ؛

(2) ئەگرى سىزىق يەككە چوققىلىق بولۇپ، تۈز سىزىق $x=\mu$ غا نىسبەتەن سىممېترىك؛

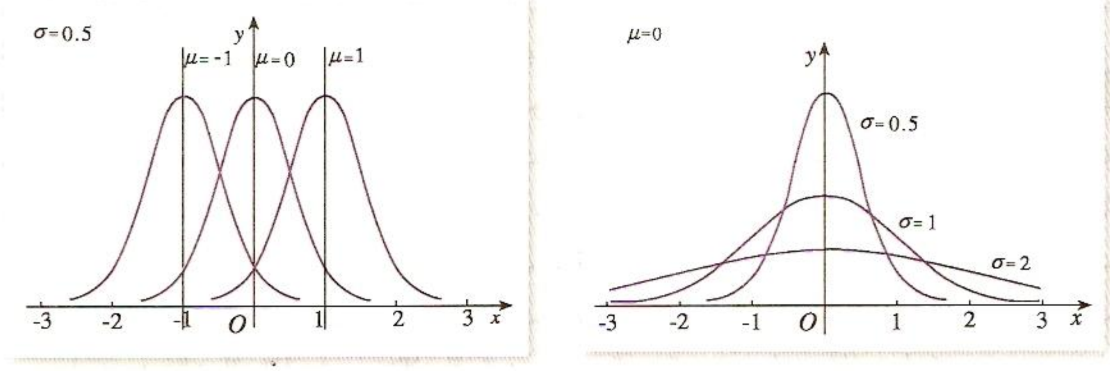
(3) ئەگرى سىزىق $x=\mu$ ئورۇندا چوققا قىممەت $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ گە ئېرىشىدۇ؛

(4) ئەگرى سىزىق بىلەن x ئوق ئارىسىدىكى يۈزىنىڭ چوڭ - كىچىكلىكى 1 گە تەڭ.

ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ μ ۋە σ نىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىش ئالاھىدىلىكىنى كومپيۇتېردىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىش

نورمال تەقسىماتنى μ ۋە σ ئارقىلىق تامامەن ئېنىقلاشقا بولىدىغانلىقى ئۈچۈن، نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ ئالاھىدىلىكىنى μ ۋە σ نىڭ ئۇنىڭغا كۆرسىتىدىغان تەسىرىنى تەتقىق قىلىش ئارقىلىق تونۇيالايمىز. بۇنىڭ ئۈچۈن، ئاۋۋال σ نىڭ قىممىتىنى مۇقىم قىلىپ، μ ئوخشاش بولمىغان قىممەتلەرنى ئالغاندىكى گرافىكنى سىزىمىز (5.4.2 - رەسىم (1))؛ ئاندىن μ نىڭ قىممىتىنى مۇقىم قىلىپ، σ ئوخشاش بولمىغان قىممەتلەرنى ئالغاندىكى گرافىكنى سىزىمىز (5.4.2 - رەسىم (2)).



(1) (2)

5.4.2 ـ رەسىم

يۇقىرىقى جەرياندىن يەنە نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ تۆۋەندىكى ئالاھىدىلىكلىرىنى بايقىيالايمىز:

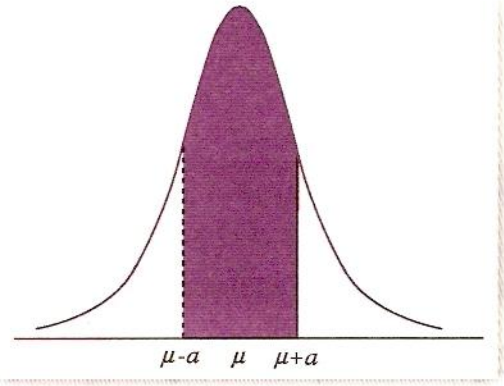
(5) σ مۇقىم بولغاندا، ئەگرى سىزىق μ نىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگەشكەن ھالدا x ئوقىنى بويلاپ پاراللېل يۆتكىلىدۇ؛

(6) μ مۇقىم بولغاندا، ئەگرى سىزىقنىڭ شەكلى σ تەرىپىدىن بەلگىلىنىدۇ. σ قانچىكى كىچىك بولسا، ئەگرى سىزىق شۇنچە «ئورۇق ھەم ئېگىز» بولىدۇ، بۇ، ئومۇمىي گەۋدىنىڭ تەقسىماتى شۇنچە مەركەزلىشىدىغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ؛ σ قانچىكى چوڭ بولسا، ئەگرى سىزىق شۇنچە «پاكار ھەم سېمىز» بولىدۇ، بۇ، ئومۇمىي گەۋدىنىڭ تەقسىماتى شۇنچە تارقاق بولىدىغانلىقىنى ئىپادىلەيدۇ.

ئەمدى مۇھاكىمىنى يەنىمۇ چوڭقۇرلاشتۇرىمىز. ئەگەر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ بولسا، ئۇ ھالدا ھەرقانداق ھەقىقىي سان $a>0$ گە نىسبەتەن، ئېھتىماللىق

$$P(\mu - a < X \leqslant \mu + a) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x$$

6.4.2 ـ رەسىمدىكى تۇتۇق قىسمىنىڭ يۈزىدىن ئىبارەت بولۇپ، μ بىلەن a مۇقىم بولغاندا، بۇ يۈز σ نىڭ كىچىكلىشىگە ئەگىشىپ چوڭىيىپ بارىدۇ. بۇ، σ قانچىكى كىچىك بولسا، X نىڭ ئىنتېرۋال $[\mu - a, \mu + a]$ غا چۈشۈش ئېھتىماللىقى شۇنچە چوڭ بولىدىغانلىقى، يەنى X نىڭ μ ئەتراپىغا مەركەزلىشىش ئېھتىماللىقى شۇنچە چوڭ بولىدىغانلىقىنى چۈشەندۈرىدۇ.

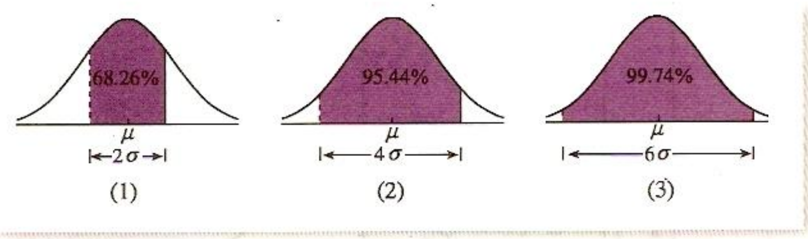


6.4.2 ـ رەسىم

ئالاھىدە ئەھۋالدا:

$$P(\mu - \sigma < X \leqslant \mu + \sigma) = 0.6826,$$
$$P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0.9544,$$
$$P(\mu - 3\sigma < X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0.9974.$$

يۇقىرىقى نەتىجىنى 7.4.2 ـ رەسىم بىلەن ئىپادىلەشكە بولىدۇ:



7.4.2 ـ رەسىم

كۆرەلەيمىزكى، نورمال ئومۇمىي گەۋدىنىڭ قىممەت ئېلىشى ھامان ئىنتېرۋال $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ ئىچىدە دېگۈدەكلا بولىدۇ. ئۇنىڭ بۇ ئىنتېرۋالنىڭ سىرتىدا قىممەت ئېلىش ئېھتىماللىقى 0.0026 بولۇپ، ئادەتتە بۇ خىل ئەھۋالنىڭ بىر قېتىملىق تەجرىبىدە يۈز بېرىشى مۇمكىن ئەمەس دېيەرلىكلا بولىدۇ دەپ قارىلىدۇ.

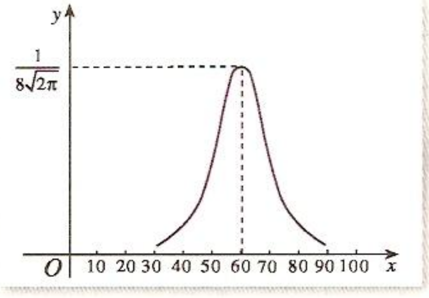
ئەمەلىي قوللىنىشلاردا، ئادەتتە نورمال تەقسىمات $N(\mu, \sigma^2)$ غا بويسۇنىدىغان تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X پەقەت $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ ئارىلىقىدىكى قىممەتلەرنىلا ئالىدۇ دەپ قارىلىدۇ ھەمدە بۇ قاراش 3σ پرىنسىپى دەپ ئاتىلىدۇ.

مەشىق

1. مەلۇم رايوندىكى ئوقۇغۇچىلارنىڭ ماتېماتىكا ئىمتىھان نەتىجىسى X نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ. ئەگەر ئۇنىڭ زىچلىق فۇنكسىيە ئەگرى سىزىقى رەسىمدىكىدەك بولسا، X نىڭ ئىنتېرۋال [52, 68] دا بولۇش ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

2. نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدىغان تاسادىپىي ھادىسىگە دائىر ئەمەلىي مىسالدىن ئىككىنى كەلتۈرۈڭ.

3. ئەگەر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ بولسا، X نىڭ ساھە $(\mu, \mu+\sigma]$ دا بولۇش ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟



(1 ـ مىسال ئۈچۈن)

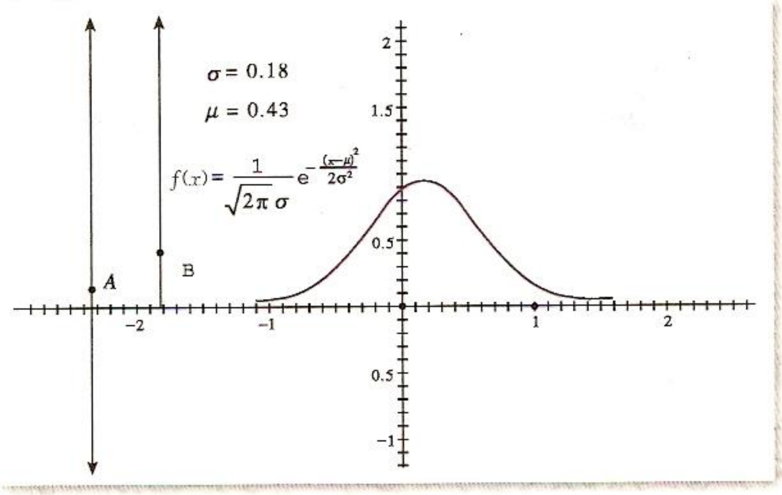
ئۇچۇر تېخنىكىسىنىڭ قوللىنىلىشى

μ ۋە σ نىڭ نورمال تەقسىماتقا تەسىرى

پارامېتىر μ ۋە σ نىڭ نورمال ئەگرى سىزىققا كۆرسىتىدىغان تەسىرىنى «گېئومېترىيىلىك سىزىش تاختىسى» دىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلالايمىز. مەشغۇلات باسقۇچلىرى تۆۋەندىكىچە:

(1) x ئوقىدا تىك قىلىپ بىر تۈز سىزىق ئۆتكۈزىمىز ھەمدە بۇ تۈز سىزىق ئۈستىدىن خالىغان بىر A نۇقتىنى ئېلىپ، پارامېتىر μ نىڭ ئۆزگىرىشىنى A نۇقتىنىڭ ئوردىناتى بىلەن كونترول قىلىمىز؛

(2) x ئوق ئۈستىدىكى بىر نۇقتا ئارقىلىق x ئوقىغا تىك قىلىپ بىر نۇر ئۆتكۈزىمىز ھەمدە بۇ نۇر ئۈستىدىن خالىغان بىر B نۇقتىنى ئېلىپ، پارامېتىر σ نىڭ ئۆزگىرىشىنى B نۇقتىنىڭ ئوردىناتى بىلەن كونترول قىلىمىز؛



(3) فۇنكسىيىنىڭ ئانالىتىك ئىپادىسى $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ نى كىرگۈزۈپ، $f(x)$ فۇنكسىيىنىڭ گرافىكىنى سىزىمىز؛

(4) A، B نۇقتىلارنى ھەرىكەتلەندۈرۈپ، نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ پارامېتىر μ، σ لار ئالغان قىممەتلەرنىڭ ئۆزگىرىشىگە ئەگىشىپ ئۆزگىرىش ئەھۋالىنى كۆزەتكىلى بولىدۇ.

4.2 ـ كۆنۈكمە

A گۇرۇپپا

1. تۆۋەندە ئۆلچەملىك نورمال تەخسىمات زىچلىق فۇنكسىيىسى بېرىلدى:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

(1) $f(x)$ نىڭ جۈپ فۇنكسىيە ئىكەنلىكىنى ئىسپاتلاڭ؛

(2) $f(x)$ نىڭ ئەڭ چوڭ قىممىتىنى تېپىڭ؛

(3) $f(x)$ نىڭ ئېشىش ـ كېمىيىشچانلىقىنى كۆرسەتكۈچلۈك فۇنكسىيىنىڭ خۇسۇسىيىتىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرۈڭ.

2. سودا سارىيىدىكى مەلۇم خىل خالتىلىق گۈرۈچنىڭ ماسسىسى نورمال تەقسىمات $N(10,\ 0.1^2)$ غا بويسۇنىدۇ (بىرلىكى: kg). مۇشۇ خىل گۈرۈچنىڭ خالىغان بىر خالتىسىنى تاللىغاندا، ئۇنىڭ ماسسىسى 9.8 ~ 10.2 kg ئارىلىقىدا بولۇشىنىڭ ئېھتىماللىقى قانچە بولىدۇ؟

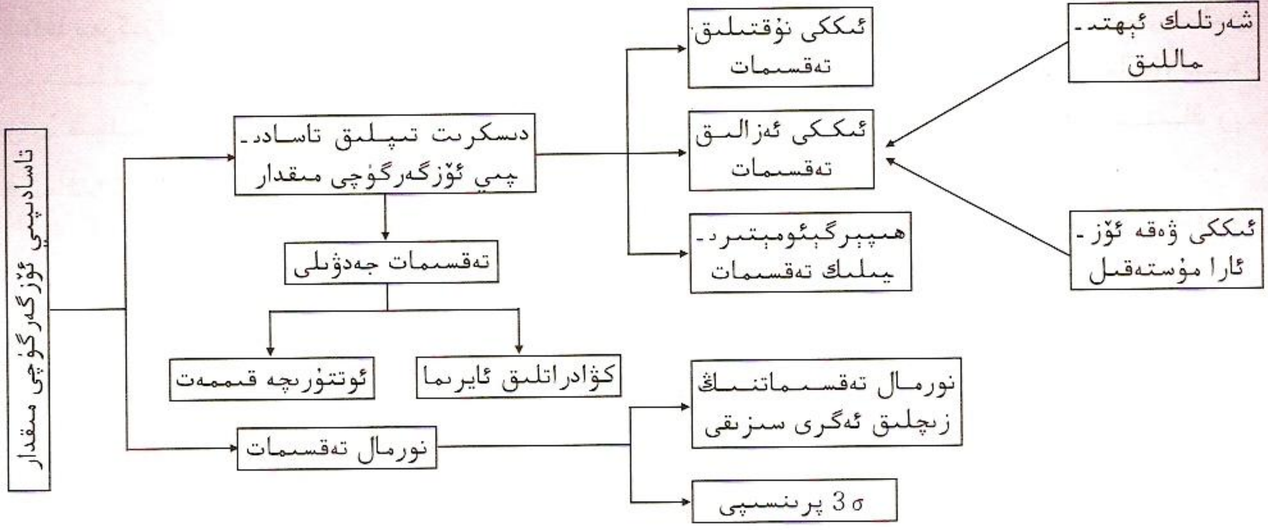
B گۇرۇپپا

1. ئەگەر $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ بولۇپ، a ھەقىقىي سان بولسا، $P(X=a)=0$ نى ئىسپاتلاڭ.

2. ئەگەر $X\sim N(5,\ 1)$ بولسا، $P(6<X<7)$ نى تېپىڭ.

خۇلاسە

I بۇ بابتىكى بىلىملەرنىڭ قۇرۇلما رامكىسى



II ئەسلەش ۋە مۇلاھىزە

1. تاسادىپىي ھادىسىنىڭ نەتىجىسىنى مىقدارلاشتۇرۇش، يەنى تاسادىپىي ھادىسىنىڭ نەتىجىسىنى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار بىلەن ئىپادىلەش بىزنىڭ تاسادىپىي ھادىسىنىڭ نەتىجىسىنى ماتېماتىكىلىق قورال (مەسىلەن، فۇنكسىيە، ئىنتېگرال قاتارلىقلار) دىن پايدىلىنىپ تەتقىق قىلىشىمىزغا ئىمكانىيەت يارىتىپ بېرىدۇ. بىر تاسادىپىي ھادىسىنى تەتقىق قىلىشتا، شۇ تاسادىپىي ھادىسىنىڭ كۆرۈلۈشى مۇمكىن بولغان بارلىق نەتىجىلىرىنى ۋە ھەربىر نەتىجىنىڭ كۆرۈلۈش ئېھتىماللىقىنى بىلىۋېلىش مەقسەت قىلىنىدۇ. تەقسىمات جەدۋىلى دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار ئىپادىلىگەن تاسادىپىي ھادىسىنىڭ ئېھتىماللىق قانۇنىيىتىنى سۈرەتلەپ بېرەلەيدۇ. سىز دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارغا دائىر بەزى ئەمەلىي مىساللارنى كەلتۈرەلەمسىز؟ ئۇلارنىڭ تەقسىمات جەدۋىلىنى تۈزەلەمسىز؟

2. ھىپېر گېئومېتىرىيىلىك تەقسىمات ۋە ئىككى ئەزالىق تەقسىمات ئىنتايىن مۇھىم ھەم قوللىنىلىشى ناھايىتى كەڭ ئىككى ئېھتىماللىق مودېلى بولۇپ، ئەمەلىي تۇرمۇش ۋە ئىشلەپچىقىرىش ئەمەلىيىتىدىكى نۇرغۇن مەسىلىلەرنى مۇشۇ ئىككى ئېھتىماللىق مودېلىدىن پايدىلىنىپ ھەل قىلغىلى بولىدۇ.

(1) ھىپېر گېئومېتىرىيىلىك تەقسىمات ۋە ئۇنىڭ كەلتۈرۈپ چىقىرىلىش جەريانىنى ئەمەلىي مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرۈپ بېرەلەمسىز؟

(2) تۆۋەندىكى بايانىنىڭ توغرا ئەمەسلىكىنى ئىككى ئەزالىق تەقسىماتتىن ئىبارەت ئېھتىماللىق مودېلىدىن پايدىلىنىپ چۈشەندۈرەلەمسىز؟

«سۈپىتى تەكشى بولغان بىر مېتال پۇلنى تاسادىپىي تاشلىغاندىكى ئوڭ چۈشۈش ئېھتىماللىقى 0.5 بولىدۇ، شۇنىڭ ئۈچۈن، مۇشۇنداق بىر مېتال پۇلنى 100 قېتىم تاشلىغاندا، 50 قېتىم ئوڭ چۈشۈشنىڭ مۇمكىنچىلىكىمۇ 0.5 بولۇشى كېرەك.»

3. دىسكرېت تىپلىق تسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە (ياكى مەركىزىي) ئورنىغا ۋەكىللىك قىلىدۇ، ئۇنىڭ ئەۋرىشكە ئوتتۇرىچە سانى بىلەن ئوخشىشىپ كېتىدىغان يېرى بار؛ دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ كۋادراتلىق ئايرىمىسى تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممەتتە مۇقىملىشىش (ياكى ئۇنىڭغا مەركەزلىشىش) دەرىجىسىنى سۈرەتلەپ بېرىدۇ، ئۇنىڭ ئەۋرىشكە كۋادراتلىق ئايرىمىسى بىلەن ئوخشىشىپ كېتىدىغان يېرى بار. دەرسلىكتە كەلتۈرۈلگەن ئۈلگە مىسالغا تەقلىد قىلغان هالدا، دىسكرېت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدارنىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى ۋە كۋادراتلىق ئايرىمىسىنىڭ رېئال تۇرمۇشتىكى رولىنى مىسال كەلتۈرۈپ چۈشەندۈرەلەمسىز؟

4. ئىشلەپچىقىرىش ئەمەلىيىتى ۋە ئەمەلىي تۇرمۇشتا، نۇرغۇن تاسادىپىي هادىسىلەر نورمال تەقسىماتقا بويسۇنىدۇ ياكى تەقرىبىي بويسۇنىدۇ، شۇڭا نورمال تەقسىماتنىڭ قوللىنىلىشى ناهايىتى كەڭ.

(1) نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ ئالاھىدىلىكىگە ئاساسەن، بىر نورمال ئەگرى سىزىقنىڭ دەسلەپكى شەكلىنى سىزىپ چىقالامسىز؟

(2) تەنتەربىيە ئوقۇتقۇچىڭىزدىن سوراپ، ئۆز يىللىقىڭىزدىكى ساۋاقداشلىرىڭىزنىڭ بوي ئېگىزلىكىگە دائىر سانلىق مەلۇمات ماتېرىياللىرىنى توپلاڭ، ئاندىن دەرسلىكتىكى ئۇسۇلغا تەقلىد قىلغان هالدا، يىللىقىڭىزدىكى ساۋاقداشلىرىڭىزنىڭ بوي ئېگىزلىكى نورمال تەقسىماتقا تەقرىبىي بويسۇنىدىغان ـ بويسۇنمايدىغانلىقىنى تەتقىق قىلىڭ. ئەگەر بويسۇنسا، پارامېتىر μ نىڭ قىممىتىنى مۆلچەرلەڭ.

تەكرارلاشتا پايدىلىنىش مىساللىرى

A گۇرۇپپا

1. دىسكرىت تىپلىق تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ تەقسىمات جەدۋىلى

X	0	1	2
P	0.5	$1-2p$	q^2

بولسا، ئۇ هالدا تۇراقلىق سان ______ = q.

2. تاسادىپىي ئۆزگەرگۈچى مىقدار X نىڭ مۇمكىن بولغان بارلىق قىممەت 1، 2، ⋯، n لارنى ئېلىش مۇمكىنچىلىكى ئۆزئارا تەڭ ھەمدە X نىڭ ئوتتۇرىچە قىممىتى 50.5 بولسا، n نىڭ قىممىتىنى تېپىڭ.

3. ھەربىر زەمبىرەك بىلەن بىر قېتىم ئوق ئاتقاندىكى نىشانغا تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقى 0.3 ئىكەنلىكى بېرىلگەن، مەلۇم بىر نىشانغا ئوق تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقىنى 95% تىن ئاشۇرۇش ئۈچۈن، مۇشۇنداق قانچە زەمبىرەك بىلەن نىشانغا قارىتىپ تەڭلا بىر قېتىمدىن ئوق ئېتىش كېرەك؟ نىشانغا تەگكۈزۈش ئېھتىماللىقىنى يۇقىرى كۆتۈرۈش ھەققىدىكى قاراشلىرىڭىزنى سۆزلەپ بېقىڭ.

4. مەلۇم سودا سارىيى ئۆكتەبىر بايرىمىدا سېتىشنى تېزلىتىش پائالىيىتى ئۆتكۈزمەكچى بولۇپ، پائالىيەتنىڭ ساراي ئىچكى ياكى سىرتىدا ئۆيۈشتۇرۇلۇشىنى ھاۋا رايىدىن ئالدىن بېرىلگەن مەلۇماتقا ئاساسەن بېكىتمەكچى بولىدى. ستاتىستىكا ماتېرىياللىرىدىن مەلۇم بولۇشىچە، ھەريىلى ئۆكتەبىر بايرىمىدا سېتىشنى تېزلىتىش پائالىيىتى ساراي ئىچىدە ئۆتكۈزۈلسە پايدىسى 20 مىڭ يۈەن بولىدىكەن؛ ساراي سىرتىدا ئۆتكۈزۈلگەندە، شۇ كۈنى يامغۇر ياغمىسا پايدىسى 100 مىڭ يۈەن، يامغۇر يېغىپ قالسا زىيىنى 40 مىڭ يۈەن بولىدىكەن. 9 ـ ئاينىڭ 30 ـ كۈنى ھاۋا رايى ئىستانسىسى بايرام كۈنى شۇ جايدا يامغۇر يېغىش ئېھتىماللىقى 40% دەپ ئالدىن مەلۇمات بەرگەن بولسا، سودا سارىيى قايسى خىل سېتىشنى تېزلىتىش شەكلىنى قوللىنىشى كېرەك؟

B گۇرۇپپا

1. مەلۇم خىل تاسادىپىي زەخىملەندۈرۈش سۇغۇرتا پۇلىنىڭ بىر كىشىلىكى 20 يۈەن بولۇپ، ئۇنىڭ سۇغۇرتا تۆلەم سوممىسى 450 مىڭ يۈەن. مەلۇم شەھەردىكى بىر سۇغۇرتا شىركىتى بىر يىلدا مۇشۇ خىل سۇغۇرتا ھۆججىتىدىن 100 مىڭ كىشىلىك ساتىدۇ، بۇنىڭ پۇل تۆلەش ئېھتىماللىقى 10^{-6}. تۆۋەندىكىلەرنى مۇۋاپىق ئۇسۇل تاللاپ ھەم كومپيۇتېر ياكى ھېسابلىغۇچتىن پايدىلىنىپ تېپىڭ:

(1) بۇ سۇغۇرتا شىركىتىنىڭ زىيان تارتىش ئېھتىماللىقى؛

(2) بۇ سۇغۇرتا شىركىتىنىڭ بىر يىل ئىچىدىكى پايدىسىنىڭ 110 000 0 يۈەندىن ئاز بولماسلىق ئېھتىماللىقى (ئۇن مىڭنى بىرلىك قىلىپ ھېسابلىسىڭىز ئاسانراق بولىدۇ).

2. $X \sim N(1, 1)$ دەپ پەرەز قىلىپ $P(3<X\leqslant 4)$ نى تېپىڭ.

3. $X \sim N(\mu, 1)$ دەپ پەرەز قىلىپ، $P(\mu-3<X\leqslant \mu-2)$ نى تېپىڭ.